Devoir maison n° 11

À rendre le lundi 5 février 2024

Exercice 1 : Questions en vrac

1) A l'aide de la méthode[1] du Pivot de Gauss, déterminer l'ensemble des solutions du système

$$\begin{cases} 2x + y - z + t = -1 \\ 3x - y - t = 1 \\ 2y - 2z + 3t = 0 \\ x - z + t = 2 \end{cases}$$

d'inconnues x, y, z, t réelles.

2) Factoriser le polynôme $P = 2X^5 + 3X^4 - X^3 - X^2 + 3X + 2$.
On commencera par chercher une racine évidente et on donnera bien sûr la factorisation complète.

Problème 2 : Polynômes de Tchebychev

Extrait du DS n° 5 de l'an passé.

On définit une suite $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes[2] par la relation suivante :

$$T_0 = 1, \qquad T_1 = X \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme T_n est appelé le $n^{\text{ième}}$ polynôme de Tchebychev.

Partie A : Premières propriétés des polynômes de Tchebychev

1) Vérifier que

$$T_2 = 2X^2 - 1, \qquad T_3 = 4X^3 - 3X, \qquad T_4 = 8X^4 - 8X^2 + 1 \qquad \text{et} \qquad T_5 = 16X^5 - 20X^3 + 5X.$$

2) a) Recopier et compléter la fonction Python suivante, afin qu'elle prenne en entrée un entier naturel n et un réel x et renvoie $T_n(x)$ en utilisant la formule définissant la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

```
def Tchebychev(n,x):
    T=1
    U=x
    ..............
        V=...............#polynome auxiliaire
        T=U
        U=...............
    return T
```

b) Écrire des commandes en Python qui représentent graphiquement T_{20} sur l'intervalle $[-5, 5]$.

3) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est un polynôme de degré n et de coefficient dominant 2^{n-1}.
Il y a bien trois choses à montrer dans cette récurrence : que T_n est un polynôme, qu'il est de degré n et que son coefficient dominant est 2^{n-1}.
Attention : $T_0 = 1$ est bien un polynôme de degré $n = 0$ mais son coefficient dominant est 1 et non pas 2^{n-1}.

1. Elle doit être respectée à la lettre. Notamment aucun échange de ligne ne doit avoir lieu si ce n'est pas absolument nécessaire (en cas de pivot nul).
2. Cela signifie simplement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n est un polynôme.

4) a) Montrer que, pour tous $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\cos(a+b)+\cos(a-b) = 2\cos(a)\cos(b)$.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer alors par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que T_n est l'unique polynôme vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad T_n(\cos(x)) = \cos(nx). \qquad (\star)$$

6) Calculer $T_n(-1)$, $T_n(0)$ et $T_n(1)$.
On simplifiera les calculs et on pourra éventuellement distinguer les cas selon la parité de n.

7) a) Calculer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin(nx)}{\sin(x)}$.

b) En dérivant la relation $(\star)$, montrer que $T_n'(1) = n^2$.

Partie B : Factorisation des polynômes de Tchebychev

1) Factoriser au maximum les polynômes T_2, T_3, T_4 et T_5 calculés à la question 1 de la partie A.
On s'aidera de trinômes du second degré.

2) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, posons $x_k = \cos\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{2n}\right)$.

a) Montrer que $x_1, \dots, x_n$ sont n réels deux à deux distincts.

b) En utilisant $(\star)$, vérifier que $x_1, \dots, x_n$ sont des racines de T_n.

c) En déduire la factorisation de T_n.

Partie C : Calcul de $\zeta(2)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \qquad \text{et} \qquad U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

On admet (nous l'avons déjà montré dans le DM n° 10) que la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers un réel $\zeta(2)$. Dans cette partie, nous allons expliciter la valeur de $\zeta(2)$ à l'aide des polynômes de Tchebychev.

1) Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et posons $f_n : x \longmapsto \ln(|T_n(x)|)$.

a) Déterminer les domaines de définition et de dérivabilité de f_n.

b) En calculant $f_n'(1)$ de deux façons, établir que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1-x_k} = n^2.$$

On pensera à utiliser la factorisation de T_n.

c) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sin^2\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2 \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\tan^2\left(\dfrac{(2k-1)\pi}{4n}\right)} = 2n^2 - n.$$

On vérifiera puis utilisera le fait que $2\sin^2(\theta) = 1-\cos(2\theta)$ et $\dfrac{1}{\tan^2(\theta)} = \dfrac{1}{\sin^2(\theta)} - 1$ pour tout $\theta \in \left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2) a) Montrer que, pour tout $x \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$.

b) En déduire que $U_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi^2}{8}$.

3) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} = \dfrac{1}{4}S_n + U_n$.

b) En déduire que la valeur de $\zeta(2)$.