Devoir maison n° 4

À rendre le jeudi 17 octobre 2023

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $x_0=-2$, $x_1=1$ et
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad x_{n+2}=\frac{3}{2}x_{n+1}+x_n.$$
Expliciter x_n en fonction de n pour tout $n\in\mathbb{N}$. En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

2) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\lfloor \pi n^3\rfloor}{n^3}$ puis
$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\lfloor \pi n^3\rfloor-\sqrt{n}(\ln(n))^4}{n^3+2n^5\left(\frac{\pi}{6}\right)^n-\cos(2023^{n!})}.$$

Exercice 2 : Étude d'une suite récurrente (d'après concours)

Extrait du DS n° 2 de 2021/2022.

Soit $f: y\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto \dfrac{e^{-y}}{y}$. L'objectif de cet exercice est d'étudier la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0=1$ et
$$\forall n\in\mathbb{N},\qquad x_{n+1}=f(x_n)=\frac{e^{-x_n}}{x_n}.$$

Partie A : Étude de la fonction f

1) Écrire une fonction en Python appelée `f` qui prend en argument $y\in\mathbb{R}_+^*$ et qui renvoie $f(y)$.

2) Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$.

3) Étudier les variations de la fonction f.

4) a) Étudier les variations de la fonction $g: y\in\mathbb{R}_+^*\longmapsto e^{-y}-y^2$.
   b) En déduire que f admet un unique point fixe sur $\mathbb{R}_+^*$, que l'on notera α.
   On commencera par faire le lien entre les (éventuels) points fixes de f et la fonction g.
   c) Montrer que $\dfrac{1}{e}<\alpha<1$.

5) Dresser le tableau de variation de f et tracer l'allure de sa courbe représentative $\mathscr{C}_f$ dans un repère orthonormé. On fera apparaître le réel α dans le tableau et sur la courbe.

Partie B : Suites de rangs pairs et impairs

1) Montrer que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, x_n est bien définie et $x_n>0$.

2) En vous aidant de la courbe, conjecturer la nature des suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

3) a) Calculer x_1 et x_2.
   b) Montrer soigneusement que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x_{2n+2}>x_{2n}$.
   c) En déduire les variations des suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$.

Partie C : Étude de $f \circ f$

Introduisons la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\forall y \in \mathbb{R}_+, \qquad h(y) = \begin{cases} f \circ f(y) & \text{si} \quad y > 0, \\ 0 & \text{si} \quad y = 0. \end{cases}$$

1) Écrire une fonction en Python appelée `h` qui prend en argument $y \in \mathbb{R}_+$ et qui renvoie $h(y)$.

2) Expliciter $h(y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$.

3) Montrer que $\lim\limits_{y \to 0^+} h(y) = 0$.

4) En déduire que la fonction h est continue sur $\mathbb{R}_+$.

5) Montrer que les réels 0 et α sont les uniques points fixes de h dans $\mathbb{R}_+$.

Partie D : Nature de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

On a vu que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à termes strictement positifs. On a donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{2n+2} = h(x_{2n}) \qquad \text{et} \qquad x_{2n+3} = h(x_{2n+1}).$$

1) Montrer que $(x_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

2) a) Montrer que la suite $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée.
   b) En déduire la limite de $(x_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$

3) Conclure quant à la nature de la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

4) Écrire une fonction en Python qui prend en argument un réel ε strictement positif et calcule le premier rang n tel que $x_{2n} \geqslant 1/\varepsilon$ et $x_{2n+1} \leqslant \varepsilon$.

Exercice 3 : Une équation trigonométrique

Dans cet exercice, nous cherchons à résoudre l'équation $\cos^3(x) + \sin^3(x) = \dfrac{11}{16}$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1) Questions préliminaires (*Les trois questions sont indépendantes*).
   a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
   $$2\big(\cos^3(x) + \sin^3(x)\big) = 3\big(\cos(x) + \sin(x)\big) - \big(\cos(x) + \sin(x)\big)^3.$$
   b) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(x) + \sin(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$.
   c) Vérifier que $\dfrac{-1 + 3\sqrt{5}}{4} < \sqrt{2}$ et que $\dfrac{1 + 3\sqrt{5}}{4} > \sqrt{2}$.

2) On se donne $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\cos^3(x) + \sin^3(x) = \dfrac{11}{16}$.
   a) On pose $t = \cos(x) + \sin(x)$. Vérifier que $8t^3 - 24t + 11 = 0$.
   b) Déterminer des réels a, b et c tels que
   $$\forall z \in \mathbb{R}, \qquad 8z^3 - 24z + 11 = (2z - 1)\left(az^2 + bz + c\right).$$
   c) Donner alors toutes les valeurs de z telles que $8z^3 - 24z + 11 = 0$.
   d) En déduire que $t = \dfrac{1}{2}$.
   On pensera à utiliser les questions préliminaires dans cette question et la suivante.
   e) On admet[1] qu'il existe $\theta_0 \in \left[0\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, $\sin(\theta_0) = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$. En déduire que $x \equiv \theta_0 - \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{3\pi}{4} - \theta_0\,[2\pi]$.

3) Réciproquement, montrer que, si $x \equiv \theta_0 - \dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$ ou $x \equiv \dfrac{3\pi}{4} - \theta_0\,[2\pi]$, alors x est solution de l'équation.

1. C'est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires. Pour information, on a $\theta_0 \approx 0,3614$ (attention ce n'est qu'une approximation donc on n'utilisera absolument pas cette valeur).