# Devoir maison n° 6

**À rendre le jeudi 23 novembre 2023**

## Exercice 1 : Dans tous ses états

**Adapté du DS n° 3 de l'an passé.**

On considère un système qui peut être dans trois états différents, notés A, B ou C. Il est initialement dans l'état B. Chaque seconde on relève l'état dans lequel il se trouve et on sait que :

- S'il est dans l'état A, il y reste pour toujours.
- S'il est dans l'état B alors, à la seconde suivante, il peut y rester avec probabilité $\dfrac{5}{12}$, passer à l'état C avec probabilité $\dfrac{1}{3}$ et passer à l'état A avec probabilité $\dfrac{1}{4}$.
- S'il est dans l'état C alors, à la seconde suivante, il peut y rester avec probabilité $\dfrac{1}{6}$ et passer à l'état B avec probabilité $\dfrac{5}{6}$.

On limite l'observation du système à un nombre fini $N \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ de secondes pour modéliser cette expérience par un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathscr{P}(\Omega), \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à expliciter. Pour tout $n \in [\![0\,;N]\!]$, on note

- $A_n$ l'événement « le système est dans l'état A à la seconde $n$ » et $a_n = \mathbb{P}(A_n)$,
- $B_n$ l'événement « le système est dans l'état B à la seconde $n$ » et $b_n = \mathbb{P}(B_n)$,
- $C_n$ l'événement « le système est dans l'état C à la seconde $n$ » et $c_n = \mathbb{P}(C_n)$.

1) Recopier et compléter la fonction Python suivante qui prend en entrée $n \in \mathbb{N}$, qui simule cette expérience et renvoie l'état du système à la seconde $n$.

```
import ......................
def Systeme(n):
    X='B'
    ..........................#n fois de suite,
        if X=='B':
            k =..............#Un entier uniformément choisi entre 1 et 12
            if k<=4:#Si k vaut 1, 2, 3, 4
                X =..........
            elif k<=7:#Si k vaut 5, 6 ou 7
                X =..........
        elif X=='C':
            .................#Avec probabilité 5/6
                X =.........
    return X
```

2) Donner, sans démonstration, $a_0, b_0, c_0, a_1, b_1, c_1$.

3) Soit $n \in [\![1\,;N]\!]$.

   a) Justifier brièvement que
   $$A_1 \subset A_n, \qquad \bigcap_{k=0}^{n} B_k \subset B_n, \qquad \text{et} \qquad \bigcap_{k=1}^{n} C_k \subset C_n.$$

   b) En déduire que $a_n \geqslant \dfrac{1}{4}$, $b_n \geqslant \left(\dfrac{5}{12}\right)^n$ et $c_n \geqslant \dfrac{1}{3 \times 6^{n-1}}$.

   c) Justifier, sans calculs, que la suite $(a_n)_{1 \leqslant n \leqslant N}$ est croissante.

4) Montrer que, pour tout $n \in [\![1\,;N-1]\!]$,
$$b_{n+1} = \frac{5b_n}{12} + \frac{5c_n}{6} \qquad \text{et} \qquad c_{n+1} = \frac{b_n}{3} + \frac{c_n}{6}.$$

5) Recopier et compléter la fonction Python suivante qui prend en entrée $n$ et renvoie une liste contenant les valeurs de $a_n, b_n, c_n$.

```
def Probas_Etats(n):
    b,c = ...................
    ........................
        b_aux = ...........
        b = ...........
        c = ...........
    return .................
```

6) En déduire que, pour tout $n \in [\![0\,; N-2]\!]$, $c_{n+2} = \dfrac{7c_{n+1}}{12} + \dfrac{5c_n}{24}$.

7) Déterminer une expression de $c_n$ puis de $b_n$ en fonction de $n$ pour tout $n \in [\![0\,; N]\!]$.
*On rappelle que* $169 = 13^2$.

8) En déduire que

$$\forall n \in [\![0\,; N]\!], \qquad a_n = 1 - \alpha\left(\frac{5}{6}\right)^n - \beta\left(-\frac{1}{4}\right)^n,$$

avec $\alpha$ et $\beta$ des réels positifs à expliciter.

9) Déterminer la probabilité que le système n'était pas à l'état $A$ à la $(N-1)^{\text{ième}}$ seconde, sachant qu'il l'est à la $N^{\text{ième}}$ seconde.

10) a) Justifier que, pour tout $n \in [\![0\,; N]\!]$, $a_n \geqslant 1 - (\alpha+\beta)\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$.

b) En déduire une valeur de $N$ telle que l'on soit sûr à 99% que le système soit dans l'état A à la fin de l'observation ?
*On pourra exprimer $N$ en fonction de $\alpha$ et $\beta$, même si on a trouvé ces valeurs explicitement.*

c) Pour pouvoir déterminer la valeur de $N$ de la question précédente, on a dû effectuer une minoration assez grossière de $a_n$ pour tout $n \in [\![0\,; N]\!]$. Avec l'outil informatique, on peut trouver la plus petite valeur de $N$ telle que l'on soit sûr à 99% que le système soit dans l'état A à la fin de l'observation. Recopier et compléter le script suivant pour qu'il trouve cette plus petite valeur de $N$ à l'aide de la formule de la question 8.

```
n = .................
a = .................
while .............
    n=n+1
    a = .............
print(n)
```

*On pourra mettre* `alpha` *et* `beta` *à la place des vraies valeurs de $\alpha$ et $\beta$.*

## Exercice 2 : Nombre de surjections

Soient $n$ et $p$ des entiers naturels non nuls. Soient $A$ un ensemble à $p$ éléments et $E$ un ensemble à $n$ éléments. Dans l'exercice 9 du TD n° 10, on a calculé le nombres d'applications de $A$ dans $E$ ainsi que les nombres d'applications injectives, bijectives, croissantes et strictement croissantes de $A$ dans $E$. Dans cet exercice, on se propose de calculer le nombre de surjections de $A$ dans $E$.

Pour justifier proprement les choses dans cet exercice, on pourra coder une surjection $f$ de $A = \{x_1, \ldots, x_p\}$ dans $E$ par le $p$-uplet $(f(x_1), \ldots, f(x_p))$ d'éléments de $E$ contenant tous les éléments de $E_n$.

On admet que le nombre de surjections d'un ensemble fini dans un autre ne dépend pas des ensembles en tant que tel mais uniquement de leurs nombres d'éléments. Ainsi, pour tout entiers non nuls $i$ et $j$, on note $S_{i,j}$ le nombre de surjections d'un ensemble quelconque à $i$ éléments dans un ensemble quelconque à $j$ éléments.

1) Que vaut $S_{p,n}$ lorsque $p < n$ ?

On suppose désormais que $p \geqslant n$.

2) a) Calculer $S_{p,1}$ et $S_{p,2}$ lorsque $p \geqslant 2$.

b) Montrer que, si $p = n$, alors tout surjection de $A$ dans $E$ est une bijection. En déduire $S_{p,p}$.

c) Montrer que

$$S_{n+1,n} = n!\binom{n+1}{2}.$$

3) a) Soit $(q, k) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $q \leqslant k$. Soit $B_k$ un ensemble à $k$ éléments. Notons $I_{p,k}(q)$ l'ensemble des applications de $A$ dans $B_k$ dont l'ensemble image possède $q$ éléments. Justifier que

$$\operatorname{card}(I_{p,k}(q)) = \binom{k}{q} S_{p,q}.$$

b) En déduire que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$,

$$k^p = \sum_{q=1}^{k} \binom{k}{q} S_{p,q}.$$

c) Montrer alors que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=1}^{n} \sum_{q=1}^{k} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{q} S_{p,q}$$

puis que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{q=1}^{n} S_{p,q} \left( \sum_{k=q}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \binom{k}{q} \right).$$

d) Vérifier que, pour tout $(q, k) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $q \leqslant k$, on a

$$\binom{n}{q} \binom{n-q}{n-k} = \binom{n}{k} \binom{k}{q}.$$

e) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{q=1}^{n} \binom{n}{q} S_{p,q} \left( \sum_{\ell=0}^{n-q} (-1)^{\ell} \binom{n-q}{\ell} \right)$$

f) Pour tout $a \in \mathbb{N}$, calculer la somme

$$\sum_{\ell=0}^{a} (-1)^{\ell} \binom{a}{\ell}.$$

*Attention, il y a deux cas à faire.*

g) Montrer finalement que

$$S_{p,n} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$