Devoir maison n° 8

À rendre le 18 décembre 2023

Exercice : Involutions

Adapté du concours blanc du premier semestre de l'an passé.

Soit E un ensemble non vide. On dit qu'une application $f : E \longrightarrow E$ est une involution sur E si $f \circ f = \mathrm{Id}_E$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in E, \qquad f(f(x)) = x.$$

Partie A : Quelques exemples

Pour montrer qu'une application f définie sur E est une involution, il ne faut pas oublier de vérifier que $f(E) \subset E$ avant de montrer que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.

1) Soit Ω un ensemble non vide. Vérifier que $c : A \in \mathcal{P}(\Omega) \longmapsto \overline{A}$ est une involution sur $\mathcal{P}(\Omega)$.
2) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$. Montrer que $g_{a,b} : x \in \mathbb{R}\backslash\{a\} \longmapsto a + \dfrac{b}{x-a}$ est une involution sur $\mathbb{R}\backslash\{a\}$.
3) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Montrer que $f_n : x \in [0,1] \longmapsto \sqrt[n]{1-x^n}$ est une involution sur $[0,1]$.
4) Montrer que
$$h : x \in \mathbb{R} \longmapsto \begin{cases} 1-x & \text{si} \quad x \in \mathbb{Q} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$
est une involution sur $\mathbb{R}$.
5) Montrer que $s : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (3x-4y, 2x-3y)$ est une involution sur $\mathbb{R}^2$.

Partie B : Quelques propriétés

1) Montrer qu'une involution f sur E est bijective.
Pas question d'appliquer le théorème de la bijection : E n'est pas un intervalle de $\mathbb{R}$ a priori. On montrera qu'elle est injective puis surjective.
2) Justifier que $f^{-1} = f$.
3) Soient f est g deux involutions sur E. Montrer que $f \circ g$ est une involution si et seulement si $f \circ g = g \circ f$.

Partie C : Involutions réelles monotones

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une involution monotone sur $\mathbb{R}$.

1) On rappelle que f est alors une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   a) Montrer que f n'est pas majorée. On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que f n'est pas minorée.
   b) Montrer que f est strictement monotone.
2) Supposons que f est strictement croissante. En raisonnant par l'absurde, montrer que f est alors l'identité de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = x.$$

On suppose dans la suite de cette partie que f est strictement décroissante et on introduit la fonction

$$g : x \in \mathbb{R} \longmapsto x - f(x).$$

3) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.

4) Dans cette question, nous allons montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$. Pour cela, donnons-nous $x_0 \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ et posons

$$\delta = \min\Big(f\big(f(x_0) - \varepsilon\big) - x_0\,,\, x_0 - f\big(f(x_0) + \varepsilon\big)\Big).$$

   a) Justifier que $\delta > 0$.
   b) Montrer que, pour tout $x \in \big[f\big(f(x_0) + \varepsilon\big), f\big(f(x_0) - \varepsilon\big)\big]$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
   c) En déduire que, pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, $|f(x) - f(x_0)| \leqslant \varepsilon$.
   d) Conclure que f est continue sur $\mathbb{R}$.

5) Montrer que g est une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

6) Vérifier que $g^{-1} \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \circ g = f$.

7) Réciproquement, donnons-nous h une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que $\varphi = h^{-1} \circ (-\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}) \circ h$ est une involution continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Nous venons de caractériser les involutions monotones sur $\mathbb{R}$: la seule involution croissante sur $\mathbb{R}$ est l'identité et les involutions décroissantes sur $\mathbb{R}$ sont les applications qui s'écrivent sous la forme $h^{-1} \circ (-\mathrm{Id}_E) \circ h$ avec h une bijection continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.