Devoir surveillé n^{o} 4 (sujet A)

samedi 10 février 2024

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Le devoir est volontairement long et il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Questions en vrac

1) a) A l'aide d'une intégration par parties dans une intégrale bien choisie, déterminer[1] une primitive de la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{t^2}{(1+t)^2}$ sur $]-1\,;+\infty[$.

   b) En faisant le changement de variable $x = -\ln(t)$ dans une intégrale bien choisie, et en utilisant la question précédente, déterminer une primitive de la fonction $g : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+e^x)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer, par le calcul, que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{8n^2k}{n^4+k^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi\,.$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, notons

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\,dt.$$

   a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction F_n est bien définie sur $\mathbb{R}$.

   b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad F_n(x) = -\frac{x^n}{n!}\,e^{-x} + F_{n-1}(x).$$

   c) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n(x) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}.$$

1. Pour que vous puissiez faire la question suivante même si vous n'avez pas réussi celle-ci, voici une primitive de f sur $]-1\,;+\infty[$:

$$F : t \longmapsto \frac{t\,(2+t)}{1+t} - 2\ln(1+t).$$

Bien sûr, dériver cette dernière fonction ne sera pas considéré comme une preuve recevable.

Exercice 2 : Étude d'une suite récurrence

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = e^{-x_n^2/2}$.

1) Justifier que la fonction $f : x \longmapsto e^{-x^2/2}$ admet un unique point fixe α sur $\mathbb{R}_+$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter) puis que $\alpha \in \,]0\,;1[$.
2) Dresser le tableau de variations complet de f' sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire que f' est bornée par $\dfrac{1}{\sqrt{e}}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) En déduire que que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \big|x_{n+1} - \alpha\big| \leqslant \frac{|x_n - \alpha|}{\sqrt{e}}.$$
4) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|x_n - \alpha| \leqslant e^{-n/2}$.
5) En déduire que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.
6) Écrire alors un script en Python qui calcule une approximation de α à 10^{-4} près.
On commencera par déterminer mathématique une valeur de n telle que $|x_n - \alpha| \leqslant 10^{-4}$.

Exercice 3 : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On introduit la fonction
$$G : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln(t)}.$$

1) a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t - \ln(t) \geqslant 1$.
   b) En déduire que la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t - \ln(t)}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
   c) Dresser le tableau de variations complet de f sur $\mathbb{R}_+^*$.
2) En déduire que la fonction G est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
3) a) Justifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer sa dérivée en fonction de f.
   b) Montrer que $G'(x)$ est du signe de $\ln\left(\frac{2}{x}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
   c) Justifier que $G'(x) \underset{0^+}{\sim} -\dfrac{1}{\ln(x)}$.
4) a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant G(x) \leqslant x$.
   On utilisera notamment le fait que f est majorée.
   b) En déduire que l'on peut prolonger G en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On précisera sa valeur en 0.
   c) Montrer que, ainsi prolongée, G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que $G'(0) = 0$.
5) On introduit la fonction $h : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t} f(t)$.
   a) Déterminer une primitive de $t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
   b) En déduire que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$,
   $$0 \leqslant \int_x^{2x} h(t)\,dt \leqslant \frac{\ln(2)}{2}\big(\ln(2) + 2\ln(x)\big)f(x).$$
   c) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) - \dfrac{1}{t} = h(t)$ et en déduire que $G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(2)$.

6) a) Dresser le tableau de variations complet de G sur $\mathbb{R}_+$.
On ne cherchera pas à calculer d'autres valeurs prises par la fonction G autre que $G(0)$.

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de G sur $\mathbb{R}_+$.
On placera la tangente en 0, les éventuelles tangentes horizontales et les éventuelles asymptotes.

Problème 4 : Une construction des fonctions trigonométriques

Partie A : Quelques fonctions auxiliaires

On définit la fonction G sur $[-1\,;1]$ par

$$\forall x \in [-1\,;1], \qquad G(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2}\,dt.$$

1) Justifier que G est bien définie sur $[-1\,;1]$.

2) Justifier que $G(1) > 0$. On pose $\alpha = 2G(1)$ (on ne cherchera pas à calculer sa valeur).

3) A l'aide d'un changement de variable, montrer que G est une fonction impaire sur $[-1\,;1]$.

4) Écrire une fonction en Python, appelée `G`, qui prend en argument $x \in [-1\,;1]$ et qui renvoie une approximation de $G(x)$ à l'aide de la méthode des rectangles à gauche.
On admet que 1001 rectangles de bases égales suffisent à approcher $G(x)$ à 10^{-3} près.

On définit la fonction F sur $[-1\,;1]$ par

$$\forall x \in [-1\,;1], \qquad F(x) = 2G(x) - x\sqrt{1-x^2}$$

5) a) Justifier que F est dérivable sur $]-1\,;1[$ et que

$$\forall x \in]-1\,;1[, \qquad F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) En déduire les variations de F sur $[-1\,;1]$.

Partie B : Réciproque de F

1) Montrer que F réalise une bijection de $[-1\,;1]$ dans $[-\alpha\,;\alpha]$. On note φ la réciproque de F. Préciser les variations de φ sur $[-\alpha\,;\alpha]$.

2) Recopier et compléter les fonctions suivantes. La première prend en argument $x \in [-1\,;1]$ et qui renvoie une approximation de $F(x)$ à l'aide de la fonction `G`. La deuxième prend en argument x dans $[-\alpha\,;\alpha]$ et renvoie une approximation par défaut de $\varphi(x)$ à 10^{-3} près avec la méthode de dichotomie.

```
def F(x):
    return ................

def phi(x):
    a,b = ..................
    while ................
        c = ................
        if F(c)>x:
            ................
        else:
            ................
    return ................
```

3) a) Justifier que, pour tout $x \in [-\alpha\,;\alpha]$, $F(\varphi(-x)) = F(-\varphi(x))$.

b) En déduire que φ est une fonction impaire sur $[-\alpha\,;\alpha]$.

4) Montrer que φ est dérivable sur $]-\alpha\,;\alpha[$ et que $\varphi' = \sqrt{1-\varphi^2}$.

Partie C : Prolongements de φ

On définit la fonction s sur $[-2\alpha\,;2\alpha]$ de la façon suivante :

$$\forall x \in [-2\alpha\,;2\alpha]\,, \qquad s(x) = \begin{cases} \varphi(-2\alpha - x) & \text{si} \quad x \in [-2\alpha\,;-\alpha[\\ \varphi(x) & \text{si} \quad x \in [-\alpha\,;\alpha] \\ \varphi(2\alpha - x) & \text{si} \quad x \in]\alpha\,;2\alpha] \end{cases}$$

On peut déjà affirmer que, sur $]-\alpha\,;\alpha[$, s est dérivable et $s' = \sqrt{1-s^2}$.

1) a) Montrer que s est bien définie et continue sur $]-\alpha\,;2\alpha]$.

   b) Montrer que, sur $]\alpha\,;2\alpha[$, s est de classe C^1 et $s' = -\sqrt{1-s^2}$.

   c) Montrer que s est de classe C^1 sur $]-\alpha\,;2\alpha[$ et que $s'(\alpha) = 0$.

On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que s est de classe C^1 sur $[-2\alpha\,;2\alpha]$ et que

$$\forall x \in [-2\alpha\,;2\alpha]\,, \qquad s'(x) = \begin{cases} \sqrt{1-s^2(x)} & \text{si} \quad x \in [-\alpha\,;\alpha] \\ -\sqrt{1-s^2(x)} & \text{si} \quad x \in [-2\alpha\,;-\alpha[\,\cup\,]\alpha\,;2\alpha] \end{cases}$$

2) Justifier que s' est de classe C^1 sur $]-\alpha\,;\alpha[$ et que $s'' = -s$.

On admet que s' est de classe C^1 sur $[-2\alpha\,;2\alpha]$ tout entier et que $s'' = -s$. On définit alors la fonction c sur $[-2\alpha\,;2\alpha]$ par $c = s'$. Il s'ensuit que c est de classe C^1 sur $[-2\alpha\,;2\alpha]$ et vérifie $c' = -s$ et $c^2 + s^2 = 1$.

3) a) Écrire une fonction Python, appelée `s`, qui prend en entrée x dans $[-2\alpha\,;2\alpha]$ et qui renvoie une approximation de $s(x)$ à l'aide de la fonction `phi`.
   On pourra prendre `F(1)` *pour valeur approchée de α.*

   b) Écrire des commandes en Python qui représentent graphiquement la fonction s sur $[-2\alpha\,;2\alpha]$.

4) Dresser les tableaux de variations de c et s sur $[-2\alpha\,;2\alpha]$. On fera apparaître les valeurs de c et s en les points -2α, $-\alpha$, 0, α et 2α.

On prolonge alors c et s en des fonctions 4α-périodiques sur $\mathbb{R}$. On admet alors que, ainsi prolongées, c et s sont des fonctions de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ vérifiant $s' = c$, $c' = -s$ et $c^2 + s^2 = 1$.

Partie D : Formules d'addition

Fixons $y \in \mathbb{R}$. On pose

$$f : x \longmapsto s(x+y) - s(x)c(y) - c(x)s(y).$$

1) Montrer que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f' et f''.

2) Vérifier que $f'' = -f$ et que $f'(0) = f(0) = 0$.

3) Posons $g = f'$. Vérifier que $(g^2)' = (-f^2)'$.

4) En déduire que f est la fonction nulle.

5) Montrer alors que, pour tout réels x et y,

$$s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y) \qquad \text{et} \qquad c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y).$$