Devoir surveillé n° 4 (sujet B)

samedi 10 février 2024

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Le devoir est volontairement long et il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Questions en vrac

1) a) On se donne $y \in \mathbb{R}$. En faisant le changement de variable $x = -\ln(t)$, montrer que

$$\int_0^y \frac{e^{-x}}{(1+e^x)^2}\,dx = -\int_1^{e^{-y}} \frac{t^2}{(t+1)^2}\,dt.$$

b) Soit $x \in]-1\,;+\infty[$. A l'aide d'une intégration par parties, montrer que

$$\int_0^x \frac{t^2}{(t+1)^2}\,dt = -\frac{x^2}{1+x} + 2\left(x - \ln(1+x)\right).$$

c) En déduire[1] qu'une primitive de $g : x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$ sur $\mathbb{R}$ est $G : y \longmapsto 2\ln(1+e^{-y}) - \dfrac{2+e^{-y}}{e^y+1}$.

2) a) Justifier que $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x}{1+x^4}\,dx = \frac{\pi}{4}$.

b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{8n^2k}{n^4+k^4} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi\,.$$

3) On fixe $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$F_n(x) = \frac{1}{n!}\int_0^x t^n e^{-t}\,dt.$$

a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre $F_n(x)$ est bien défini sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $F_0(x)$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A l'aide d'une intégration par parties, établir que

$$F_n(x) = -\frac{x^n}{n!}\,e^{-x} + F_{n-1}(x).$$

d) En raisonnant par récurrence, en déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad F_n(x) = 1 - e^{-x}\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}.$$

1. Bien sûr, dériver la fonction G ne sera pas considéré comme une preuve recevable.

Exercice 2 : Étude d'une suite récurrence

On définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $x_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = e^{-x_n^2/2}$.

1) Introduisons les fonctions

$$f : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto e^{-x^2/2} \qquad \text{et} \qquad g : x \in \mathbb{R}_+ \longmapsto f(x) - x.$$

   a) Justifier que f et g sont dérivables sur $\mathbb{R}_+$ puis calculer f' et g'.

   b) Dresser alors le tableau de variations complet (avec les limites) de g sur $\mathbb{R}_+$.
   On placera le point d'abscisse 1 dans le tableau.

   c) Montrer que la fonction g s'annule en unique point α sur $\mathbb{R}_+$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter).

   d) Justifier que $\alpha \in \left]0\,;1\right[$.

   Autrement dit f admet α pour unique point fixe sur $\mathbb{R}_+$.

2) a) Justifier soigneusement que $xe^{-x^2/2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

   b) Justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f''(x)$ est du signe de $x^2 - 1$.

   c) Dresser alors le tableau de variations complet de f' sur $\mathbb{R}_+$.

   d) En déduire que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad -\frac{1}{\sqrt{e}} \leqslant f'(x) \leqslant 0.$$

   e) Justifier alors que, pour tous réels x et y de $\mathbb{R}_+$,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{|x-y|}{\sqrt{e}}.$$

3) a) Conclure que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \left|x_{n+1} - \alpha\right| \leqslant \frac{|x_n - \alpha|}{\sqrt{e}}.$$

   b) Justifier que $|x_0 - \alpha| \leqslant 1$.

   c) Montrer alors, par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad |x_n - \alpha| \leqslant \left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n.$$

   d) En déduire que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

4) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right)^n \leqslant 10^{-4} \qquad \Longleftrightarrow \qquad n \geqslant 8\ln(10).$$

   Que prendre pour valeur de n (entier naturel) pour que x_n soit une approximation de α à 10^{-4} près ?

   b) Recopier et compléter le script Python suivant pour qu'il affiche une valeur approchée de α à 10^{-4} près :

```
import ....................
n = ........................
x = ........................
for ......................
    x = ....................
print(x)
```

On introduit la fonction

$$G : x \longmapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln(t)}.$$

1) a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $t - \ln(t) - 1 \geqslant 0$.

   b) En déduire que la fonction $f : t \longmapsto \dfrac{1}{t - \ln(t)}$ est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

   c) En factorisant au dénominateur, montrer que $f(t) \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$.

   d) Dresser le tableau de variations complet (avec les limites) de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, le nombre $G(x)$ est bien défini.

3) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, écrire $G(x)$ à l'aide d'une primitive de F.
   On justifiera proprement pourquoi F existe.

   b) Montrer alors que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \qquad G'(x) = 2f(2x) - f(x).$$

   c) Justifier que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$.

   d) Montrer que $G'(x)$ est du signe de $\ln(2) - \ln(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   e) Vérifier que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$-\ln(x)G'(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(x) - x} \times \frac{\ln(x)}{\ln(2) + \ln(x) - 2x} \times \frac{\ln(x) - \ln(2)}{\ln(x)}.$$

   f) Justifier que chacun des trois termes constituant le produit ci-dessus tend vers 1 lorsque x tend vers 0^+.

   g) En déduire que $G'(x) \underset{0^+}{\sim} -\dfrac{1}{\ln(x)}$.

4) a) Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}_+^*$, et $t \in [x\,;2x]$, $0 \leqslant f(t) \leqslant 1$.

   b) En déduire que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $0 \leqslant G(x) \leqslant x$.

   c) Montrer alors que l'on peut prolonger G en une fonction continue sur $\mathbb{R}_+$. On précisera sa valeur en 0.

   d) Montrer que $G'(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} 0$. En déduire que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ et que $G'(0) = 0$.

5) On introduit la fonction $h : t \longmapsto \dfrac{\ln(t)}{t} f(t)$. On se donne $x \in [1\,;+\infty[$.

   a) Justifier que

$$\forall t \in [x\,;2x]\,, \qquad 0 \leqslant h(t) \leqslant \frac{\ln(t)}{t} f(x).$$

   b) En déduire que

$$0 \leqslant \int_x^{2x} h(t)\,dt \leqslant \frac{f(x)}{2} \int_x^{2x} 2 \times \frac{1}{t} \times \ln(t)\,dt.$$

   c) Montrer ensuite que

$$0 \leqslant \int_x^{2x} h(t)\,dt \leqslant \frac{\ln(2)}{2}\big(\ln(2) + 2\ln(x)\big) f(x).$$

   d) Vérifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) - \dfrac{1}{t} = h(t)$.

   e) En déduire que

$$0 \leqslant G(x) - \ln(2) \leqslant \frac{\ln(2)}{2}\big(\ln(2) + 2\ln(x)\big) f(x).$$

f) Conclure que $G(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ln(2)$.

6) a) Dresser le tableau de variations complet de G sur $\mathbb{R}_+$.
On ne cherchera pas à calculer d'autres valeurs prises par la fonction G autre que $G(0)$. On rappelle qu'une information sur le signe de la dérivée a été obtenue à la question 3d.

b) Tracer l'allure de la courbe représentative de G sur $\mathbb{R}_+$.
On placera la tangente en 0, les éventuelles tangentes horizontales et l'asymptote en $+\infty$.

Exercice 4 : Étude d'une réciproque

1) Justifier que la fonction $g : t \longmapsto \sqrt{1-t^2}$ admet une primitive sur $[-1\,;1]$.

On note G l'unique primitive de g sur $[-1\,;1]$ qui s'annule en 0, c'est-à-dire

$$\forall x \in [-1\,;1]\,, \qquad G(x) = \int_0^x g(t)\,dt.$$

On définit la fonction F sur $[-1\,;1]$ par

$$\forall x \in [-1\,;1]\,, \qquad F(x) = 2G(x) - x\sqrt{1-x^2}.$$

2) Justifier que $G(1) > 0$. On notera $\ell = G(1)$ et on ne cherchera pas à calculer cette quantité.

3) Écrire une fonction en Python, appelée `G`, qui prend en argument $x \in [-1\,;1]$ et qui renvoie la quantité

$$\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1} g\left(\frac{kx}{n}\right), \qquad \text{avec } n = 1000\,.$$

On justifiera brièvement pourquoi il s'agit bien d'une approximation de $G(x)$.

4) a) Justifier que F est dérivable sur $]-1\,;1[$ et calculer que

$$\forall x \in \,]-1\,;1[\,, \qquad F'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

b) En déduire les variations de F sur $[-1\,;1]$.

5) Montrer que F réalise une bijection de $[-1\,;1]$ dans $[-2\ell\,;2\ell]$. On note φ la réciproque de F.

6) Construire le tableau de variation complet (sans utiliser de dérivées) de φ sur $[-2\ell\,;2\ell]$.

7) Recopier et compléter les fonctions suivantes. La première prend en argument $x \in [-1\,;1]$ et qui renvoie une approximation de $F(x)$ à l'aide de la fonction `G`. La deuxième prend en argument x dans $[-2\ell\,;2\ell]$ et renvoie une approximation par défaut de $\varphi(x)$ à 10^{-3} près avec la méthode de dichotomie.

```
def F(t):
    return ................

def phi(x):
    a,b=..................
    while ................
        c=................
        if F(c)>x:
            ................
        else:
            ................
    return ................
```

8) 9) Soit $x \in [-1\,;1]$. A l'aide du changement de variable $t = -u$, montrer que $G(-x) = -G(x)$.

a) En déduire que F est une fonction impaire sur $[-1\,;1]$.

b) Montrer alors que, pour tout $x \in [-2\ell\,;2\ell]$, $F(\varphi(-x)) = F(-\varphi(x))$.

c) Conclure que φ est une fonction impaire sur $[-2\ell\,;2\ell]$.

10) Montrer que φ est dérivable sur $]-2\ell\,;2\ell[$ et que $\varphi' = \sqrt{1-\varphi^2}$.