Interrogation écrite n^{o} 1

lundi 18 septembre 2023

A

NOM : **PRÉNOM :**

Dans tout l'énoncé, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ désignent des propositions.

1) Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0,1\}$. Donner la définition de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif x.

2) Qu'est-ce que l'ensemble des réels x vérifiant $|x| \geqslant \sqrt{7}$?

3) Nier la proposition

$$\forall \varepsilon \in \left]1\,;3\right], \qquad \exists \delta > 0, \qquad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad \big(1 < y \leqslant 1+\delta \qquad \Longrightarrow \qquad \ln(y) > \varepsilon(y-1)\big).$$

4) Corriger la grave erreur de rédaction dans la phrase :

Notons $P(n)$ la proposition « Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. »

Écrire le début de la rédaction de l'étape d'hérédité dans la démonstration par récurrence d'une propriété P portant sur les entiers naturels (initialisée à $n_0 = 1$).

5) Pour exprimer que $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A})$, on peut dire (barrer les phrases incorrectes) :

- $\mathcal{C}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{A}$.
- Pour que $\mathcal{A}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{C}$ soit vraie.
- Si $\mathcal{C}$ est fausse, alors $\mathcal{A}$ est fausse.
- Pour que $\mathcal{A}$ soit fausse, il faut que $\mathrm{non}(\mathcal{C})$ soit vraie.

6) Écrire la rédaction type de la démonstration de $(\mathcal{C} \Rightarrow \mathrm{non}(\mathcal{A}))$ par l'absurde.

7) Soient u, v et w des réels tels que $u < 0$ et $v^2 - 4uw > 0$. Pour quelles valeurs du réel x a-t-on $ux^2 + vx + w \leqslant 0$?

8) Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Énoncer la caractérisation de la borne supérieure de A et l'accompagner d'un dessin.

9) Soit Q une propriété portant sur les éléments d'un ensemble F. A l'aide de quantificateurs, exprimer le fait qu'aucun des éléments de F ne vérifie la propriété Q.

10) Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Sous quelles hypothèses sur $n \in \mathbb{Z}^*$ a-t-on $x^n > y^n$?

Interrogation écrite n° 1

lundi 18 septembre 2023

B

NOM : **PRÉNOM :**

Dans tout l'énoncé, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{D}$ désignent des propositions.

1) Pour exprimer que $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D})$, on peut dire (barrer les phrases incorrectes) :

- Pour que $\mathcal{B}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{D}$ soit vraie.
- Si $\mathcal{D}$ est fausse, alors $\text{non}(\mathcal{B})$ est vraie.
- Pour que $\mathcal{B}$ soit fausse, il faut que $\mathcal{D}$ soit fausse.
- $\mathcal{D}$ est une condition nécessaire de $\mathcal{B}$.

2) Soit R une propriété portant sur les éléments d'un ensemble G. A l'aide de quantificateurs, exprimer le fait qu'un élément de G et un seul ne vérifie pas R.

3) Soit A une partie non vide et minorée de $\mathbb{R}$. Énoncer la caractérisation de la borne inférieure de A et l'accompagner d'un dessin.

4) Donner la définition de la partie entière d'un réel x (sans démonstration).

5) Nier la proposition

$$\forall \ell \in \left]-\infty\,;4\right], \qquad \exists \varepsilon > 0, \qquad \exists n \in \mathbb{N}, \qquad \left(n \geqslant 10 \qquad \text{et} \qquad |\cos(n) - \ell| > \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

6) Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Sous quelles hypothèses sur $n \in \mathbb{Z}^*$ a-t-on $x^n < y^n$?

7) Corriger la grave erreur de rédaction dans la phrase :

Notons $P(n)$ la proposition « Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. »

Écrire le début de la rédaction de l'étape d'hérédité dans la démonstration par récurrence d'une propriété P portant un entier naturel (initialisée à $n_0 = 0$).

8) Qu'est-ce que l'ensemble des réels x vérifiant $|x| < \sqrt{5}$?

9) Écrire la rédaction type de la démonstration de $(\mathrm{non}(\mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{D})$ par contraposée.

10) Soient s, t et u des réels tels que $s > 0$ et $t^2 - 4su > 0$. Pour quelles valeurs du réel x a-t-on $sx^2 + tx + u < 0$?

Interrogation écrite n° 1

jeudi 21 septembre 2023

C

NOM : **PRÉNOM :**

Dans tout l'énoncé, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ désignent des propositions.

1) Exprimer, à l'aide d'une valeur absolue, le fait que $x \in]-\infty\,;-\pi] \cup [\pi\,;+\infty[$:

2) Écrire le début de la rédaction de l'étape d'hérédité dans la démonstration par récurrence d'une propriété P portant sur les entiers naturels (initialisée à $n_0 = 2$).

3) Soient a, b et c des réels tels que $b > 0$ et $c^2 - 4ab > 0$. Pour quelles valeurs du réel x a-t-on $bx^2 + cx + a \leqslant 0$?

4) Écrire la rédaction type de la démonstration de $(\mathrm{non}(\mathcal{C}) \Rightarrow \mathcal{B})$ par l'absurde.

5) Pour exprimer que $(\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C})$, on peut dire (barrer les phrases incorrectes) :

- $\mathcal{B}$ est une condition suffisante de $\mathcal{C}$.
- Si $\mathcal{B}$ est fausse, alors $\mathrm{non}(\mathcal{C})$ est vraie.
- Pour que $\mathcal{B}$ soit vraie, il suffit que $\mathcal{C}$ soit vraie.
- Pour que $\mathcal{C}$ soit fausse, il faut que $\mathcal{B}$ soit fausse.

6) Soient x et y deux réels tels que $x < y < 0$. Sous quelles hypothèses sur $n \in \mathbb{Z}^*$ a-t-on $x^n < y^n$?

7) Soit x un réel. Écrire la négation de ($x^2 \notin \mathbb{Q}$ et $x \in \mathbb{Q}$) à l'aide d'une implication.

8) Donner la définition de la partie entière d'un réel x (sans démonstration).

9) Soit A une partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$. Énoncer (sans démonstration) la caractérisation de la borne supérieure de A et l'accompagner d'un dessin.

10) Nier la proposition

$$\exists \varepsilon > 0, \qquad \forall a \in [-2\,;5[\,, \qquad \Big(|a| \leqslant \varepsilon \qquad \Longrightarrow \qquad \Big(\forall x \leqslant a, \qquad \exp(x) \leqslant \exp(\varepsilon)\Big)\Big).$$

11) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$. Donner la définition de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif x.