

Université Paris Sud 11

MEMOIRE DE M2

dans le cadre du **Master 2 Probabilités et Statistiques**

LE MODÈLE D'ISING CURIE-WEISS ET SES GÉNÉRALISATIONS

par **Matthias Gorny**

sous la direction de **Raphaël Cerf**

année universitaire : **2011/2012**

Table des matières

Introduction	3
Première partie : Le modèle d'Ising Curie-Weiss	5
I Définition du modèle	5
1) Ferromagnétisme	5
2) Construction d'un modèle	5
3) Le modèle d'Ising standard	6
4) Le modèle d'Ising Curie-Weiss	7
II Théorèmes limites	7
1) Convergence de S_n/n	8
2) Etude du cas sur-critique $\beta < 1$ quand $h = 0$	10
3) Etude du cas critique $\beta = 1$ quand $h = 0$	13
III Généralisation du modèle à des probabilités sous-gaussiennes	16
1) Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé	16
2) Théorème limite	17
3) Exemples	19
a) Lois binomiales	19
b) Une loi symétrique chargeant trois points	19
c) Lois gaussiennes	19
4) Démonstration du théorème III.5	19
5) Quelques résultats plus généraux	25
IV Transitions de phases dans le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé	27
1) Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé	28
2) Théorème limite et existence de valeurs critiques	29
3) Démonstrations	31
4) Différents types de points critiques	35
Deuxième partie : Autour du point critique dans le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé	37
V Un modèle autour du point critique	37
1) Transitions de phase et notion de criticalité auto-organisée	37
2) Rappels sur le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé	38
3) Vers un modèle champ-moyen de criticalité auto-organisée	40
4) Définition du modèle	41
5) Loi de (S_n, T_n) sous $\tilde{\mu}_n$	42
VI Théorème limite pour les lois gaussiennes	43

Annexe	52
A Grandes déviations	52
B Transformée de Cramér	55
Références	57

Introduction

Donnons-nous n variables aléatoires X_1, \dots, X_n réelles centrées et admettant une variance σ^2 finie. Posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Une question fondamentale de la théorie des probabilités est de chercher des théorèmes limites sur S_n .

Si les X_i sont indépendantes et identiquement distribuées alors nous avons les résultats classiques suivants :

★ La loi des grands nombres

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$$

★ Le théorème central limite

$$\frac{S_n}{\sqrt{n\sigma^2}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

où \mathbb{P} désigne la convergence en probabilités, \mathcal{L} la convergence en loi et $\mathcal{N}(0, 1)$ la loi normale centrée et réduite.

Que deviennent ces résultats si les X_i ne sont plus indépendantes ? Voici une situation où elles sont corrélées (strictement) positivement : supposons que (X_1, \dots, X_n) a pour loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

où $T > 0$ désigne la température, ρ désigne la loi binomiale $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$ et Z_n la constante de renormalisation. Ce modèle s'appelle le modèle d'Ising Curie-Weiss. Il s'agit d'une version simplifiée du célèbre modèle d'Ising, utilisé pour modéliser les transitions de phases dans des phénomènes comme le ferromagnétisme. C'est ce modèle qui va nous intéresser dans ce mémoire.

Dans un premier temps, nous verrons pourquoi le phénomène physique de ferromagnétisme nous pousse à introduire un tel modèle. Nous démontrerons des théorèmes limites différents des théorèmes classiques du cas indépendant. Plus précisément il existe une température critique T_c au dessus de laquelle le modèle d'Ising Curie-Weiss présente des résultats très similaires à la loi des grands nombres et au théorème central limite et au-dessous de laquelle ces résultats ne sont pas valides.

Ensuite nous généraliserons ce modèle de deux façons différentes. D'abord nous définirons ce modèle pour des variables aléatoires quelconques et nous montrerons, sous certaines hypothèses, des résultats du type théorème central limite. Puis nous regarderons ce même modèle en remplaçant le terme quadratique dans l'exponentielle par une fonction g (assez régulière) et nous observerons un nombre au plus dénombrable de valeurs critiques.

Enfin nous transformerons ce modèle afin d'obtenir un modèle présentant un phénomène de criticalité auto-organisée. Il s'agit d'un comportement que présentent de nombreux systèmes physiques et dont l'analyse mathématique est très ardue. Nous espérons obtenir un modèle simple de type champ moyen décrivant des mécanismes d'interaction qui sont à l'origine de la criticalité auto-organisée. Ensuite nous voudrions prouver des théorèmes limites pour ce genre de modèles.

Nous présenterons un théorème de type central limite pour les gaussiennes, qui va dans ce sens.

Nous nous référerons principalement au livre de Richard S. Ellis [11] et aux articles de R.S. Ellis et C.M. Newman [12] et de R.S. Ellis et T. Eisele [10].

Première partie :

Le modèle d'Ising Curie-Weiss

I Définition du modèle

Nous allons définir le modèle d'Ising, qui est un modèle suggéré à Ernest Ising par son directeur de thèse, Wilhelm Lenz. Il a été conçu pour expliquer certains phénomènes dans lesquels des effets collectifs sont produits par des interactions locales entre particules à deux états, comme le ferromagnétisme. Cela conduit à introduire une loi de probabilité sur le réseau discret \mathbb{Z}^d . Ising a étudié ce modèle en dimension 1 dans sa thèse de 1924 mais, quand la dimension augmente, le problème devient plus complexe puisque la loi de probabilité possède notamment une corrélation spatiale. Pour simplifier l'étude, nous regarderons la version champ moyen du modèle d'Ising, appelé modèle d'Ising Curie-Weiss (en hommage aux travaux sur le ferromagnétisme des physiciens français Pierre Curie et Pierre Weiss) où la géométrie du réseau n'intervient plus.

1) Ferromagnétisme

Certains matériaux, quand on les plonge dans un champ magnétique extérieur, s'aimantent très fortement. Les aimants gardent la mémoire du champ magnétique après qu'il a disparu. On appelle ce phénomène le ferromagnétisme. Plus précisément, il existe une température critique T_c , appelée température de Curie, telle que quand $T > T_c$ il n'y a pas d'aimantation spontanée, pas de mémoire, et quand $T < T_c$ il y a aimantation spontanée, mémoire du champ.

A l'échelle microscopique un aimant est constitué d'atomes et chaque atome est modélisé par un petit dipôle magnétique. Les petits dipôles s'orientent dans le sens du champ magnétique extérieur. De plus chaque petit dipôle crée un petit champ magnétique qui influe sur les dipôles voisins. Mais l'excitation thermique crée du désordre et tend à aligner les dipôles dans des directions aléatoires.

Nous allons construire un modèle microscopique expliquant le phénomène d'aimantation spontanée.

2) Construction d'un modèle

Nous travaillons sur le réseau discret \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$, dont chaque site est occupé par un atome ou un petit dipôle magnétique qui peut être orienté vers le haut (+1) ou vers le bas (-1). Soit Λ une partie finie de \mathbb{Z}^d , par exemple un cube.

Définition I.1. Une configuration générique dans Λ est une application

$$\begin{aligned} \sigma : \Lambda &\longrightarrow \{-1, 1\} \\ x &\longmapsto \sigma(x) = \text{sens du spin de l'atome au site } x \end{aligned}$$

L'ensemble $\{-1, 1\}^\Lambda$ est alors appelé espace de configuration.

Nous allons maintenant construire une énergie (ou Hamiltonien). Pour cela nous nous donnons un champ magnétique extérieur $h \in \mathbb{R}$ et un potentiel d'interaction J :

Définition I.2. Un potentiel d'interaction est une fonction $J : \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$ symétrique telle que pour tout $x \in \mathbb{Z}^d$, $J(x, x) = 0$. On dit que :

- ★ J est une interaction ferromagnétique si elle est à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Elle tend à aligner les spins dans la même direction.
- ★ J est à portée finie si il existe $R > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d, |x - y| > R \implies J(x, y) = 0$$

Définition I.3. Soit $h \in \mathbb{R}$ un champ magnétique extérieur, et J une interaction ferromagnétique. On définit l'Hamiltonien $H = H_{\Lambda, h}$ dans Λ par l'application

$$H : \{-1, 1\}^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\sigma \mapsto -\frac{1}{2} \sum_{x, y \in \Lambda} J(x, y) \sigma(x) \sigma(y) - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma(x)$$

Le facteur 1/2 dans la définition de l'Hamiltonien vient du fait que chaque paire (x, y) apparaît deux fois dans la somme.

Construisons à présent une mesure de probabilité sur l'espace des configurations.

Définition I.4. Soit $T > 0$ une température. Soit $H = H_{\Lambda, h}$ l'Hamiltonien dans Λ associé au champ extérieur h et au potentiel d'interaction J . Pour tout $\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda$ posons

$$Z_{\Lambda, T, h} = \sum_{\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda} \exp\left(-\frac{H(\sigma)}{T}\right) \quad \text{et} \quad \mu_{\Lambda, T, h}(\sigma) = \frac{1}{Z_{\Lambda, T, h}} \exp\left(-\frac{H(\sigma)}{T}\right)$$

La mesure de probabilité $\mu_{\Lambda, T, h}$ est appelée mesure de Gibbs associé à $H_{\Lambda, h}$ dans le volume Λ , de température $T > 0$. Le coefficient normalisateur $Z_{\Lambda, T, h}$ est appelé fonction de répartition.

La mesure de Gibbs dépend en fait de Λ, T, h et J . Dans la pratique on omet dans les notation ce qui est fixe.

Nous avons construit une probabilité sur l'espace des configurations qui est très complexe puisqu'elle possède notamment une corrélation spatiale. Dans les paragraphes suivants, nous allons regarder des cas particuliers.

3) Le modèle d'Ising standard

Le modèle d'Ising standard sur Λ est le modèle construit au paragraphe précédent avec le potentiel d'interaction ferromagnétique à portée finie suivant :

$$J : (x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } |x - y| = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Ainsi pour tout $\sigma \in \{-1, 1\}^\Lambda$,

$$H(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{x, y \in \Lambda \\ |x - y| = 1}} \sigma(x) \sigma(y) - h \sum_{x \in \Lambda} \sigma(x)$$

La loi de probabilité associée à ce modèle, la mesure de Gibbs, favorise les états d'énergie minimale. C'est à dire :

- ★ Si $h = 0$, 2 états d'énergie minimale : +1 partout et -1 partout.
- ★ Si $h > 0$, 1 état d'énergie minimale : +1 partout.

4) Le modèle d'Ising Curie-Weiss

Le modèle d'Ising champ moyen sur Λ est le modèle construit au paragraphe 1.2 avec le potentiel d'interaction suivant :

$$J : (x, y) \in Z^d \times Z^d \mapsto \frac{1}{|\Lambda|}$$

Tous les spins interagissent entre eux de la même façon. La géométrie du réseau n'intervient donc plus. Nous avons ainsi le modèle suivant, appelé modèle d'Ising Curie-Weiss :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\Omega_n = \{-1, 1\}^n$ l'espace de configuration. Notons $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$ une configuration générique de Ω_n . Pour $h \in \mathbb{R}$, on considère l'Hamiltonien

$$\begin{aligned} H_n : \Omega_n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto -\frac{1}{2n} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \omega_i \omega_j - h \sum_{i=1}^n \omega_i \end{aligned}$$

Soit $T > 0$ la température et $\beta = 1/T$ la température inverse. Posons pour tout $\omega \in \Omega_n$,

$$Z_n = \sum_{\omega \in \Omega_n} \exp(-\beta H_n(\omega)) \quad \text{et} \quad \mu_n(\omega) = \frac{1}{Z_n} \exp(-\beta H_n(\omega))$$

La mesure de probabilité μ_n est la mesure de Gibbs associée à H_n . Elle dépend de h et β .

Pour tout $\omega \in \Omega_n$, nous posons

$$S_n(\omega) = \omega_1 + \dots + \omega_n$$

qui sera notre objet d'étude.

En fait nous avons $H_n = H_{n,h}$, $Z_n = Z_{n,\beta,h}$, $\mu_n = \mu_{n,\beta,h}$ et $S_n = S_{n,\beta,h}$.

Définition I.5. *L'aimantation m est définie par la fonction*

$$\begin{aligned} m : (\beta, h) &\longmapsto \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{n,\beta,h} \left(\frac{S_{n,\beta,h}}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n Z_{n,\beta,h}} \sum_{\omega \in \Omega} S_{n,\beta,h}(\omega) \exp(-\beta H_{n,h}(\omega)) \end{aligned}$$

II Théorèmes limites

Dans le cas où S_n est une somme de variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs $+1$ et -1 avec même probabilité, la théorie des probabilités montre que $(S_n/n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0 (loi des grands nombres) et $(S_n/\sqrt{n})_{n \geq 1}$ converge en loi vers la loi normale centrée et réduite (théorème central limite). Qu'en est-il dans le cadre du modèle d'Ising Curie-Weiss ? Nous allons montrer qu'il existe une température (inverse) critique $\beta_c = 1$ en dessous de laquelle le modèle d'Ising Curie-Weiss présente des résultats similaires à la loi des grands nombres et au théorème central limite. Nous verrons ainsi que ce modèle répond à la problématique du paragraphe I.1). Ce problème a intéressé de nombreux physiciens (notamment Kôdi Husimi et Harold N.V. Temperley) et mathématiciens (notamment Mark Kac, Colin J. Thomson et Richard S. Ellis). Nous présentons ici des démonstrations inspirées du livre de Richard S. Ellis [11].

1) Convergence de S_n/n

Notons \mathcal{L} la convergence en loi.

Théorème II.1. \star Si $(\beta \in]0, 1[$ et $h = 0)$ ou $(\beta > 0$ et $h \neq 0)$ alors il existe $x^* = x^*(\beta, h) \in]-1, 1[$ tel que, sous μ_n ,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \delta_{x^*}$$

De plus si $h = 0$ alors $x^* = 0$.

\star Si $\beta > 1$ et $h = 0$ alors il existe $x^* = x^*(\beta, h) \in]0, 1[$ tel que, sous μ_n ,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{2}(\delta_{-x^*} + \delta_{x^*})$$

Remarquons que dans le premier cas nous obtenons le même résultat que si S_n était une somme de variables aléatoires indépendantes (loi faible des grands nombres).

Démonstration. Commençons par déterminer la loi de S_n/n sous μ_n . Soit $A \subset [-1, 1]$,

$$\mu_n \left(\frac{S_n}{n} \in A \right) = \frac{1}{Z_n} \sum_{\omega \in \Omega_n} \mathbb{1}_{\{\frac{S_n}{n}(\omega) \in A\}} \exp(-\beta H_n(\omega))$$

Pour tout $\omega \in \Omega_n$,

$$H_n(\omega) = -\frac{1}{2n}(S_n(\omega))^2 - hS_n(\omega) = -nF\left(\frac{S_n}{n}(\omega)\right)$$

où $F : x \mapsto x^2/2 + hx$. Ainsi

$$\mu_n \left(\frac{S_n}{n} \in A \right) = \frac{2^n}{Z_n} \sum_{\omega \in \Omega_n} \left(\mathbb{1}_{\{\frac{S_n}{n}(\omega) \in A\}} \exp\left(n\beta F\left(\frac{S_n}{n}(\omega)\right)\right) \frac{1}{2^n} \right)$$

Notons U_n la loi uniforme sur Ω_n et ν_n la loi de S_n/n sous U_n . Alors

$$\begin{aligned} \mu_n \left(\frac{S_n}{n} \in A \right) &= \frac{2^n}{Z_n} \int_{\Omega_n} \mathbb{1}_{\{\frac{S_n}{n}(\omega) \in A\}} \exp\left(n\beta F\left(\frac{S_n}{n}(\omega)\right)\right) dU_n(\omega) \\ &= \frac{2^n}{Z_n} \int_A e^{n\beta F(x)} d\nu_n(x) \end{aligned}$$

En prenant $A = [-1, 1]$ nous obtenons une écriture de $Z_n/2^n$ sous forme intégrale, soit

$$\mu_n \left(\frac{S_n}{n} \in A \right) = \int_A e^{n\beta F(x)} d\nu_n(x) \left(\int_{-1}^1 e^{n\beta F(x)} d\nu_n(x) \right)^{-1}$$

Nous utilisons alors des résultats de grandes déviations (cf. Annexe). D'après le théorème de Cramér, la suite $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par

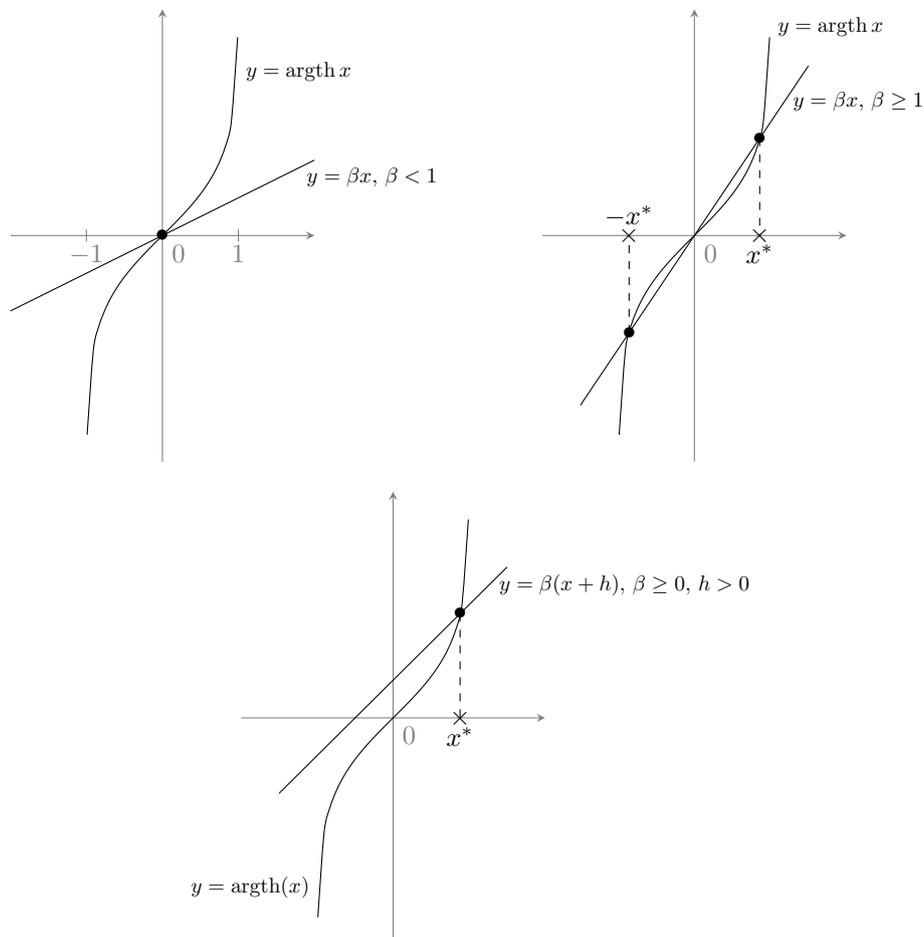
$$I : x \in [-1, 1] \mapsto \frac{1+x}{2} \ln(1+x) + \frac{1-x}{2} \ln(1-x)$$

Notons ρ_n la loi de la loi de S_n/n sous μ_n . Comme βF est continue bornée sur $[-1, 1]$, d'après le corollaire du lemme de Varadhan, $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations sur $[-1, 1]$ de vitesse n , gouverné par la fonction de taux $J : x \mapsto I(x) - \beta F(x) - \inf\{I(y) - \beta F(y) / y \in \mathcal{X}\}$. Asymptotiquement la loi ρ_n se concentre sur les minima globaux de J . Etudions donc l'ensemble \mathcal{K} des minima de J . Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$J'(x) = \operatorname{argth}(x) - \beta(x + h)$$

Une étude de fonction nous permet de conclure que :

- ★ Si $h = 0$ et $\beta \leq 1$, $\mathcal{K} = \{0\}$
- ★ Si $h = 0$ et $\beta > 1$, $\mathcal{K} = \{-x^*, x^*\}$ avec $x^* \in]0, 1[$
- ★ Si $h > 0$ et $\beta \geq 0$, $\mathcal{K} = \{x^*\}$ avec $x^* \in]0, 1[$
- ★ Si $h < 0$ et $\beta \geq 0$, $\mathcal{K} = \{x^*\}$ avec $x^* \in]-1, 0[$



L'espace $\mathcal{M}_1([-1, 1])$ est compact donc il existe une sous suite de $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge en loi vers une mesure ρ . On peut donc appliquer la proposition A.3 de l'annexe. On a deux cas :

- ★ Si $(\beta \in]0, 1[\text{ et } h = 0)$ ou $(\beta > 0 \text{ et } h \neq 0)$ alors il existe $x^* = x^*(\beta, h) \in]-1, 1[$ tel que $\operatorname{supp}(\rho) \subset \{x^*\}$ d'où $\rho = \delta_{x^*}$. Par unicité de la valeur d'adhérence,

$(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge donc en loi vers δ_{x^*} .

★ Si $\beta > 1$ et $h = 0$ alors il existe $x^* = x^*(\beta, h) \in]0, 1[$ tel que $\text{supp} \rho \subset \{-x^*, x^*\}$ donc $\rho = \lambda \delta_{-x^*} + (1 - \lambda) \delta_{x^*}$ pour un certain $\lambda \in [0, 1]$. On a $\mathbb{E}_{\mu_n}(S_n) = 0$ (car $h = 0$) pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\int x d\rho(x) = 0$ d'où $\lambda = 1/2$. Par unicité de la valeur d'adhérence on a donc convergence en loi de $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $(\delta_{-x^*} + \delta_{x^*})/2$. \square

En notant m l'aimantation (définie dans le paragraphe 4), ce théorème implique

$$m(\beta, h) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta > 1, h = 0 \\ x^* & \text{si } \beta \in]0, 1], h = 0 \text{ ou } \beta > 0, h \neq 0 \end{cases}$$

Revenons à l'étude de fonction dans la démonstration précédente. Si $\beta > 1$ et $h > 0$, $\mathcal{K} = \{x^*\}$ avec $x^* = x^*(\beta, h) \in]\sqrt{1 - 1/\beta}, 1[$. Ainsi

$$x^*(\beta, h) \xrightarrow{h \rightarrow 0^+} x^*(\beta) \geq \sqrt{1 - 1/\beta} > 0$$

Si $\beta \leq 1$ et $h > 0$, $\mathcal{K} = \{x^*\}$ où $x^* = x^*(\beta, h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0^+ . Finalement

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} m(\beta, h) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < \beta < 1 \\ x^*(\beta) > 0 & \text{si } \beta > 1 \end{cases}$$

Dans le premier cas la température est trop élevée et on perd l'aimantation quand le champ extérieur est supprimé. Dans le second la température est assez faible et on garde une aimantation du même signe que le champ extérieur quand celui-ci est supprimé.

2) Etude du cas sur-critique $\beta < 1$ quand $h = 0$

Supposons que $h = 0$ et $\beta \leq 1$. Nous avons montré une loi des grands nombres : sous μ_n ,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$$

Nous allons maintenant regarder les fluctuations autour de cette loi des grands nombres et montrer l'équivalent du théorème central limite dans ce contexte.

Donnons-nous une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_n} \left(f \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right) &= \sum_{\omega \in \Omega_n} f \left(\frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \right) \frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{\beta}{2n} S_n^2(\omega) \right) \\ &= \frac{2^n}{Z_n} \int_{\Omega_n} f \left(\frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \right) \exp \left(\frac{\beta}{2} \left(\frac{S_n(\omega)}{\sqrt{n}} \right)^2 \right) dU_n(\omega) \\ &= \frac{2^n}{Z_n} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp \left(\frac{\beta}{2} x^2 \right) d\theta_n(x) \end{aligned}$$

où U_n désigne la loi uniforme sur Ω_n et θ_n la loi de S_n/\sqrt{n} sous U_n . Si on prend $f = 1$ alors

$$1 = \frac{2^n}{Z_n} \int_{\Omega_n} e^{\beta x^2 / 2} d\theta_n(x)$$

Ainsi

$$\mathbb{E}_{\mu_n} \left(f \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right) = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{\beta x^2/2} d\theta_n(x)}{\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x^2/2} d\theta_n(x)}$$

Par le théorème central limite classique,

$$\theta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$$

Nous nous attendons donc à ce que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_n} \left(f \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right) \right) &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{\beta x^2/2} e^{-x^2/2} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x^2/2} e^{-x^2/2} dx} \\ &= \sqrt{\frac{1-\beta}{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{(\beta-1)x^2/2} dx \end{aligned}$$

Ainsi, sous μ_n , $(S_n/\sqrt{n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergerait en loi vers $\mathcal{N}(0, (1-\beta)^{-1})$. Mais on ne peut pas conclure ainsi car la fonction $x \mapsto \exp(\beta x^2/2)$ n'est pas bornée.

Nous allons montrer le lemme suivant :

Lemme II.2. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons*

$$W_n = \exp \left(\frac{\beta}{2} \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right)^2 \right)$$

Sous U_n , $(W_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ est uniformément intégrable, c'est-à-dire*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \int_{\Omega_n} \mathbb{1}_{\{W_n \geq \alpha\}} W_n dU_n \xrightarrow[\alpha \rightarrow +\infty]{} 0$$

Démonstration. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha > 0$,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_n} \mathbb{1}_{\{W_n \geq \alpha\}} W_n dU_n &= \int_{\Omega_n} \mathbb{1}_{\{W_n \geq \alpha\}} \left(\int_{\mathbb{R}^+} \mathbb{1}_{\{0 \leq t \leq W_n\}} dt \right) dU_n \\ &= \int_0^\alpha \left(\int_{\Omega_n} \mathbb{1}_{\{W_n \geq \alpha\}} \mathbb{1}_{\{W_n \geq t\}} dU_n \right) dt \\ &= \int_0^\alpha \left(\int_{\Omega_n} \mathbb{1}_{\{W_n \geq \alpha\}} dU_n \right) dt \\ &\quad + \int_\alpha^{+\infty} \left(\int_{\Omega_n} \mathbb{1}_{\{W_n \geq t\}} dU_n \right) dt \\ &= \alpha U_n(W_n \geq \alpha) + \int_\alpha^{+\infty} U_n(W_n \geq t) dt \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème de Fubini à la deuxième égalité. Soit $t > 0$, notons $x = \sqrt{2 \ln(t)/\beta}$.

$$U_n(W_n \geq t) = U_n \left(\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \right)^2 \geq x^2 \right) = 2U_n \left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq x \right) = 2U_n \left(x \frac{S_n}{\sqrt{n}} \geq x^2 \right)$$

où nous avons utilisé la symétrie de la loi de S_n à la deuxième égalité. Ainsi

$$\begin{aligned} U_n(W_n \geq t) &\leq 2U_n\left(e^{xS_n/\sqrt{n}} \geq e^{x^2}\right) \\ &\leq 2e^{-x^2} \mathbb{E}_{U_n}\left(e^{xS_n/\sqrt{n}}\right) = 2e^{-x^2} \left(\operatorname{ch}\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)\right)^n \end{aligned}$$

puisque sous U_n , S_n est somme de n variables aléatoires i.i.d. de loi $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$. On utilise alors que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{ch}(x) \leq e^{x^2/2}$. Ainsi

$$U_n(W_n \geq t) \leq 2e^{-x^2} \left(e^{x^2/2n}\right)^n = 2e^{-x^2/2} = 2e^{-\ln(t)/\beta} = \frac{2}{t^{1/\beta}}$$

Finalement on obtient une majoration de $\int_{\Omega_n} \mathbb{1}_{\{W_n \geq \alpha\}} W_n dU_n$ par la quantité indépendante de n et finie (car $1/\beta > 1$) :

$$2\alpha^{1-1/\beta} + \int_{\alpha}^{+\infty} \frac{2}{t^{1/\beta}} dt$$

Cette quantité tend bien vers 0 quand α tend vers 0. \square

Nous avons désormais tout en main pour montrer le théorème limite suivant :

Théorème II.3. *Si $T > 1$ ($\beta < 1$) et $h = 0$ alors, sous μ_n ,*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-\beta}\right)$$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée. D'après l'étude précédente et avec les notations du lemme,

$$\mathbb{E}_{\mu_n}\left(f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{2^n}{Z_n} \int_{\Omega_n} f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) W_n dU_n$$

Soit $\alpha > 0$, posons

$$\begin{aligned} A_{n,\alpha} &= \int_{W_n \geq \alpha} f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) W_n dU_n \\ A_\alpha &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\{\exp(\beta x^2/2) \geq \alpha\}} f(x) e^{(\beta-1)x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

D'après le lemme,

$$\sup_{n \in \mathbb{N}^*} A_{n,\alpha} \xrightarrow[\alpha \rightarrow +\infty]{} 0$$

et par convergence dominée A_α tend vers 0 quand α tend vers l'infini. Donc pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|A_{n,\alpha_0} - A_{\alpha_0}| \leq \varepsilon/2$. Posons

$$\begin{aligned} \varphi_{\alpha_0} : x &\longmapsto f(x) e^{\beta x^2/2} \mathbb{1}_{\{\exp(\beta x^2/2) < \alpha\}} \\ B_{n,\alpha_0} &= \int_{\Omega_n} \varphi_{\alpha_0}\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) dU_n - \int_{\mathbb{R}} \varphi_{\alpha_0}(x) e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

Comme φ_{α_0} est une fonction continue sauf en 2 points, le théorème central limite implique la convergence de $(B_{n,\alpha_0})_{n \in \mathbb{N}}$ vers 0 quand n tend vers l'infini. Donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|B_{n,\alpha_0}| \leq \varepsilon/2$. Ainsi

$$\left| \int_{\Omega_n} f\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right) W_n dU_n - \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{(\beta-1)x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right| \leq |A_{n,\alpha_0} - A_{\alpha_0}| + |B_{n,\alpha_0}| \leq \varepsilon$$

Ce même résultat appliqué à $f = 1$ implique la convergence de $(2^n/Z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers $(1-\beta)^{-1/2}$. D'où le théorème. \square

3) Etude du cas critique $\beta = 1$ quand $h = 0$

Supposons que $h = 0$ et $\beta = 1$. Nous avons montré une loi des grands nombres : sous μ_n ,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathbb{P}} 0$$

Mais cette fois les fluctuations ne sont plus d'ordre \sqrt{n} .

Soit $\lambda \in]0, 1[$ et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue bornée. Regardons la quantité $\mathbb{E}_{\mu_n}(f(S_n/n^\lambda))$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_n} \left(f \left(\frac{S_n}{n^\lambda} \right) \right) &= \frac{2^n}{Z_n} \int_{\Omega_n} f \left(\frac{S_n(\omega)}{n} n^{1-\lambda} \right) \exp \left(\frac{n}{2} \left(\frac{S_n(\omega)}{n} \right)^2 \right) dU_n(\omega) \\ &= \frac{2^n}{Z_n} \int_{\mathbb{R}} f(xn^{1-\lambda}) \exp \left(\frac{n}{2} x^2 \right) d\nu_n(x) \end{aligned}$$

où ν_n est la loi de S_n/n sous U_n . D'après le théorème de Cramér (cf. Annexe), la suite $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par

$$I : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1+x}{2} \ln(1+x) + \frac{1-x}{2} \ln(1-x)$$

Ainsi ν_n suit approximativement $e^{-nI(x)} dx$. Donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mu_n} \left(f \left(\frac{S_n}{n^\lambda} \right) \right) &\sim \frac{2^n}{Z_n} \int_{\mathbb{R}} f(xn^{1-\lambda}) \exp \left(\frac{n}{2} x^2 \right) \exp(-nI(x)) dx \\ &\sim \frac{2^n n^{\lambda-1}}{Z_n} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp \left(\frac{y^2}{2} n^{1+2\lambda-2} - nI(n^{\lambda-1}y) \right) dy \end{aligned}$$

Au voisinage de 0 on a $I(x) = x^2/2 + x^4/12 + o(x^4)$ donc l'exposant dans l'exponentielle, à y fixé, quand n tend vers $+\infty$, est

$$\frac{y^2}{2} n^{1+2\lambda-2} - nI(n^{\lambda-1}y) = -\frac{y^4}{12n^{3-4\lambda}} + o\left(\frac{1}{n^{3-4\lambda}}\right)$$

Pour qu'il y ait convergence il faut que $\lambda = 3/4$. Le terme dans l'exponentielle est alors en $-y^4/12$. Nous sommes donc amené à énoncer le théorème :

Théorème II.4. Si $T = 1$ ($\beta = 1$) et $h = 0$ alors, sous μ_n ,

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right) dx$$

où pour tout $x > 0$, $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y} dy$.

Remarque. La mesure limite est bien une probabilité car

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-y^4/12} dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y^4/12} dy = \frac{6}{12^{3/4}} \int_0^{+\infty} x^{1/4-1} e^{-x} dx = \left(\frac{3}{4}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$$

où nous avons effectué le changement de variable $x = y^4/12$ dans la troisième intégrale.

Démonstration. Pour démontrer le théorème nous allons utiliser la transformée de Laplace : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$ posons

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E} \left(\exp \left(\frac{tS_n}{n^{3/4}} \right) \right)$$

D'après le théorème de Paul Levy il suffit donc de montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{tx-x^4/12} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^4/12} dx}$$

Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$. Rappelons que pour tout $\omega \in \Omega_n$, $S_n(\omega) = \omega_1 + \dots + \omega_n$ et $H_n(\omega) = -S_n^2(\omega)/2n$. Comme $\beta = 1$,

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{Z_n} \sum_{\omega \in \Omega_n} \exp \left(t \frac{\omega_1 + \dots + \omega_n}{n^{3/4}} + \frac{(\omega_1 + \dots + \omega_n)^2}{2n} \right)$$

Nous utilisons alors la formule :

$$\forall v \in \mathbb{R}, \quad e^{v^2/2} = \int_{\mathbb{R}} e^{vx-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}$$

Ici pour $v = (\omega_1 + \dots + \omega_n)/\sqrt{n}$ nous avons

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}Z_n} \sum_{\omega \in \Omega_n} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} + (\omega_1 + \dots + \omega_n) \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{t}{n^{3/4}} \right) \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}Z_n} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sum_{\omega \in \Omega_n} \exp \left((\omega_1 + \dots + \omega_n) \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{t}{n^{3/4}} \right) \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}Z_n} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \sum_{\omega \in \Omega_n} \prod_{k=1}^n \exp \left(\omega_k \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{t}{n^{3/4}} \right) \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}Z_n} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \prod_{k=1}^n \sum_{\omega_k \in \{-1, +1\}} \exp \left(\omega_k \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{t}{n^{3/4}} \right) \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}Z_n} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2/2} \prod_{k=1}^n 2 \operatorname{ch} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{t}{n^{3/4}} \right) dx \\ &= \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}Z_n} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{x^2}{2} + n \ln \left(\operatorname{ch} \left(\frac{x}{\sqrt{n}} + \frac{t}{n^{3/4}} \right) \right) \right) dx \end{aligned}$$

Effectuons le changement de variable $y = n^{1/4} (x/\sqrt{n} + t/n^{3/4})$:

$$\begin{aligned} \varphi_n(t) &= \frac{2^n n^{1/4}}{2\pi Z_n} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{n}{2} \left(\frac{y}{n^{1/4}} - \frac{t}{n^{3/4}} \right)^2 + n \ln \left(\operatorname{ch} \left(\frac{y}{n^{1/4}} \right) \right) \right) dy \\ &= \underbrace{\frac{2^n n^{1/4}}{2\pi Z_n}}_{C_n} e^{-t^2/(2\sqrt{n})} \int_{\mathbb{R}} \exp \left(-\frac{\sqrt{n}y^2}{2} + ty + n \ln \left(\operatorname{ch} \left(\frac{y}{n^{1/4}} \right) \right) \right) dy \end{aligned}$$

en développant le carré dans l'exponentielle. Posons $G : y \mapsto y^2/2 - \ln(\operatorname{ch}(y))$. Alors

$$\varphi_n(t) \underset{+\infty}{\sim} C_n \int_{\mathbb{R}} \exp \left(ty - n G \left(\frac{y}{n^{1/4}} \right) \right) dy$$

Et comme $\varphi_n(0) = 1$, nous obtenons

$$\varphi_n(t) \underset{+\infty}{\sim} \frac{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(ty - nG\left(\frac{y}{n^{1/4}}\right)\right) dy}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-nG\left(\frac{y}{n^{1/4}}\right)\right) dy}$$

Cherchons maintenant un équivalent de G . Au voisinage de 0,

$$\begin{aligned} G(y) &= \frac{y^2}{2} - \ln\left(1 + \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o(y^4)\right) \\ &= \frac{y^2}{2} - \left(\frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} - \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2}\right)^2 + o(y^4)\right) = \frac{y^4}{12} + o(y^4) \end{aligned}$$

Donc pour tout $y \in \mathbb{R}$

$$nG\left(\frac{y}{n^{1/4}}\right) \underset{+\infty}{\sim} \frac{y^4}{12}$$

Ainsi il suffirait de pouvoir appliquer le théorème de convergence dominée dans les deux intégrales précédentes pour conclure. Ce sera possible en coupant les intégrales en deux.

Comme $G(y) \sim y^4/12$ en 0, il existe $A > 0$ tel que pour tout $y \in [-A, A]$, $G(y) > y^4/20$. Par ailleurs pour tout $y \in \mathbb{R}$, $0 < \text{ch}(y) \leq e^{y^2/2}$ donc $0 < e^{-y^2/2} \text{ch}(y) \leq 1$ donc $G(y) \geq 0$ (avec égalité si et seulement si $y = 0$). De plus $G(y)/y^2$ tend vers $1/2$ quand y tend vers $+\infty$, si bien que $y \mapsto G(y)/y^2$ est minorée sur $[A, +\infty[$ par un certain réel $c > 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{|y| > An^{1/4}} \exp\left(ty - nG\left(\frac{y}{n^{1/4}}\right)\right) dy &\leq \int_{|y| > An^{1/4}} \exp\left(ty - \sqrt{nc}y^2\right) dy \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{tx}{\sqrt{c\sqrt{n}}} - x^2\right) \frac{dx}{\sqrt{c\sqrt{n}}} \end{aligned}$$

où nous avons effectué le changement de variable $x = \sqrt{c\sqrt{n}}y$. En factorisant dans l'exponentielle, cette dernière intégrale est égale à

$$\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\left(x - \frac{t}{2\sqrt{c\sqrt{n}}}\right)^2\right) \frac{e^{t^2/(4c\sqrt{n})}}{\sqrt{c\sqrt{n}}} dx = \frac{\sqrt{4\pi}}{\sqrt{c\sqrt{n}}} \exp\left(\frac{t^2}{4c\sqrt{n}}\right)$$

Par conséquent

$$\int_{|y| > An^{1/4}} \exp\left(ty - nG\left(\frac{y}{n^{1/4}}\right)\right) dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

Ensuite, d'après le théorème de convergence dominée,

$$\int_{|y| \leq An^{1/4}} \exp\left(ty - nG\left(\frac{y}{n^{1/4}}\right)\right) dy \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{ty - y^4/12} dy$$

En effet $nG(y/n^{1/4}) \sim y^4/12$ en $+\infty$,

$$\mathbb{1}_{\{|y| \leq An^{1/4}\}} \exp\left(ty - nG\left(\frac{y}{n^{1/4}}\right)\right) \leq \exp\left(ty - y^4/20\right)$$

et $y \mapsto \exp(ty - y^4/20)$ est intégrable sur \mathbb{R} pour tous $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. En appliquant cela pour $t = 0$, nous obtenons la convergence du dénominateur dans l'expression de $\varphi_n(t)$. Ainsi nous avons pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi_n(t) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} e^{tx - x^4/12} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-x^4/12} dx}$$

d'où le théorème d'après Paul Levy. □

III Généralisation du modèle à des probabilités sous-gaussiennes

Dans le paragraphe précédent nous avons montré des résultats similaires à la loi des grands nombres et au théorème central limite pour le modèle d'Ising Curie-Weiss quand S_n est une somme de variables aléatoires de loi jointe

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{\beta}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

où $\beta \leq 1$ et ρ désigne la loi binomiale $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$. Qu'en est-il du problème quand ρ est une loi de probabilité quelconque (telle que le modèle est bien défini)? Richard S. Ellis et Charles M. Newman ont montré en 1978 dans [12] des théorèmes du type théorème central limite (quand ρ et β satisfont une certaine inégalité). Ce sont ces résultats que nous allons exposer ici.

1) Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} non dégénérée (c'est-à-dire telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\rho \neq \delta_x$). Définissons le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé :

Supposons que ρ vérifie

$$\forall \beta > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{\beta x^2/2} d\rho(x) < \infty$$

Soient $n \geq 1$ et X_1, \dots, X_n n variables aléatoires réelles de loi $\mu_{n,\rho,\beta}$ où

$$d\mu_{n,\rho,\beta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n(\beta)} \exp\left(\frac{\beta}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

avec

$$Z_n(\beta) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{\beta}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

Cette dernière quantité est finie. En effet la convexité de $x \mapsto x^2/2$ entraîne que pour $n \geq 1$

$$1 \leq Z_n(\beta) \leq \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x^2/2} d\rho(x)\right)^n < \infty$$

Nous allons essayer d'obtenir des résultats du type théorème central limite, semblables aux théorèmes II.3 et II.4, pour ce modèle généralisé. Quitte à remplacer la mesure ρ par la mesure $\rho(\cdot/\sqrt{\beta})$ et à considérer $(X_1 + \dots + X_n)/\sqrt{\beta}$ au lieu de $X_1 + \dots + X_n$, nous supposons, pour simplifier les notations, que $\beta = 1$. Nous regardons ainsi le modèle suivant :

Définition III.1. Soit ρ une mesure de probabilité non dégénérée vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} e^{x^2/2} d\rho(x) < \infty$$

Soient $n \geq 1$ et X_1, \dots, X_n n variables aléatoires réelles de loi $\mu_{n,\rho}$ où

$$d\mu_{n,\rho}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{2n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

avec

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{2n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

Posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Quand il n'y a pas de risque de confusion, nous noterons simplement $\mu_n = \mu_{n,\rho}$ (qui, jusqu'ici, désignait la mesure de Gibbs dans le modèle d'Ising Curie-Weiss classique).

Remarquons que le cas où

$$\rho = \frac{1}{2} (\delta_{-\sqrt{\beta}} + \delta_{\sqrt{\beta}})$$

correspond au modèle d'Ising Curie-Weiss classique sans champ extérieur (en regardant $S_n/\sqrt{\beta}$ au lieu de S_n).

2) Théorème limite

Hypothèses III.2. Nous supposons que ρ vérifie :

(a) $\int_{\mathbb{R}} e^{x^2/2} d\rho(x) < \infty$

(b) $\forall s \neq 0, \int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x) < e^{s^2/2}$

L'hypothèse (b) signifie que la transformée de Laplace de ρ existe et est finie partout, et que, sauf en 0, elle est strictement inférieure à la transformée de Laplace de la loi normale centrée réduite. En effet pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{sx - x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{s^2/2}$$

Nous disons qu'une telle probabilité est (strictement) sous-gaussienne.

Définition III.3. Soit $j \in \mathbb{N}$ et ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R} telle que

$$\int_{\mathbb{R}} |x|^j d\nu(x) < \infty$$

Le moment d'ordre j de ν est défini par

$$m_j(\nu) = \int_{\mathbb{R}} x^j d\nu(x)$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous notons $\bar{m}_j = m_j(\mathcal{N}(0,1))$, où $\mathcal{N}(0,1)$ désigne la loi normale centrée et réduite.

Rappelons les moments de $\mathcal{N}(0, 1)$:

$$\bar{m}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } j \text{ impair} \\ 1 & \text{si } j = 0 \\ (j-1) \times (j-3) \times \cdots \times 5 \times 3 \times 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition III.4. *Si ρ vérifie l'hypothèse III.2 (a) alors elle admet des moments de tout ordre. Si ρ vérifie l'hypothèse III.2(b) alors il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$ tels que*

$$\bar{m}_j - m_j(\rho) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \in \{1, \dots, 2k-1\} \\ \lambda & \text{si } j = 2k \end{cases}$$

La mesure ρ est dite de type k et de force λ .

Démonstration. Le théorème de Fubini entraîne que pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{s^i}{i!} \int_{\mathbb{R}} x^i d\rho(x) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{m_i(\rho)}{i!} s^i$$

Par conséquent si pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\bar{m}_i = m_i(\rho)$ alors l'hypothèse III.2(b) est contredite. Donc il existe $i \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $j \in \{0, \dots, i-1\}$, $\bar{m}_j = m_j(\rho)$ et $\bar{m}_i - m_i(\rho) = \lambda \neq 0$. Ainsi pour tout $s \neq 0$,

$$\sum_{j=i}^{+\infty} \frac{m_j(\rho)}{j!} s^j < \sum_{j=i}^{+\infty} \frac{\bar{m}_j}{j!} s^j$$

En divisant par $s > 0$ puis en faisant tendre s vers 0 nous obtenons $\bar{m}_i < m_i(\rho)$ et donc $\lambda > 0$. Si de plus i est impair alors en divisant par $s < 0$ puis en faisant tendre s vers 0 nous obtenons $\bar{m}_i > m_i(\rho)$ et donc $\lambda = 0$ ce qui est absurde. Ainsi i est pair et nous définissons le type de ρ par $k = i/2$ et sa force par $\lambda > 0$. \square

Théorème III.5. *Soit ρ une mesure de probabilité non dégénérée, qui vérifie les hypothèses III.2, de type $k \in \mathbb{N}^*$ et de force $\lambda > 0$. Alors, sous $\mu_{n,\rho}$,*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \delta_0$$

De plus si $k = 1$ alors $\lambda < 1$ et, sous $\mu_{n,\rho}$,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda} - 1\right)$$

Si $k \geq 2$ alors, en notant $C_{k,\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda x^{2k}/(2k)!) dx\right)^{-1}$, sous $\mu_{n,\rho}$,

$$\frac{S_n}{n^{1-1/2k}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} C_{k,\lambda} \exp\left(-\lambda \frac{s^{2k}}{(2k)!}\right) ds$$

3) Exemples

a) Lois binomiales

Si $\beta \in]0, 1]$, il est quasiment immédiat que $\rho = (\delta_{-\sqrt{\beta}} + \delta_{\sqrt{\beta}})/2$ satisfait les hypothèses III.2. Nous avons ensuite deux cas :

★ Si $\beta < 1$ alors ρ est de type 1 et de force $1 - \beta$ et alors, sous $\mu_{n,\rho}$,

$$\frac{\sqrt{\beta}S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-\beta} - 1\right)$$

donc

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1-\beta}\right)$$

★ Si $\beta = 1$ alors ρ est de type 2 et de force $3 - 1 = 2$ et alors, sous $\mu_{n,\rho}$,

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{\exp\left(-\frac{x^4}{12}\right) dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{y^4}{12}\right) dy}$$

Il s'agit bien des théorèmes démontrés dans le paragraphe I.

b) Une loi symétrique chargeant trois points

Considérons la loi

$$\rho = \frac{2}{3}\delta_0 + \frac{1}{6}(\delta_{-\sqrt{3}} + \delta_{\sqrt{3}})$$

Elle satisfait les hypothèses III.2, elle est de type 3 et de force 6. Si bien que, sous $\mu_{n,\rho}$,

$$\frac{S_n}{n^{5/6}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \frac{e^{-s^6} ds}{\int_{\mathbb{R}} e^{-y^6} dy}$$

c) Lois gaussiennes

La loi de probabilité $\rho = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ satisfait les hypothèses III.2 si et seulement si $\sigma^2 < 1$. Dans ce cas, elle est de type 1 et de force $1 - \sigma^2$. Ainsi, sous $\mu_{n,\rho}$,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{1-\sigma^2}\right)$$

4) Démonstration du théorème III.5

Soit ρ une mesure de probabilité non dégénérée vérifiant l'hypothèse III.2(a). Nous posons pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$G(s) = \frac{s^2}{2} - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x)$$

Cette fonction est bien définie sur \mathbb{R} et finie partout puisqu'alors pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x) \in]0, +\infty[$$

Nous montrerons ci-dessous, au lemme III.8, que pour tout $n \geq 1$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(s)} ds < +\infty$$

La démonstration du théorème III.5 repose sur l'étude de la fonction G en vertu du lemme :

Lemme III.6. *Soit W est une variable aléatoire réelle de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et indépendante de S_n (sous $\mu_{n,\rho}$) pour tout $n \geq 1$. Alors pour tous $\gamma \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$, sous $\mu_{n,\rho}$,*

$$\frac{W}{n^{1/2-\gamma}} + \frac{S_n}{n^{1-\gamma}} \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} \frac{\int_{\mathbb{R}} \exp(-nG(s/n^\gamma)) ds}{\int_{\mathbb{R}} \exp(-nG(t/n^\gamma)) dt}$$

Démonstration. La loi de S_n sous $\rho^{\otimes n}$ est ρ^{*n} donc la loi de S_n sous $\mu_{n,\rho}$ est

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{x^2}{2n}\right) d\rho^{*n}(x)$$

Soit f une fonction continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{W}{n^{1/2-\gamma}} + \frac{S_n}{n^{1-\gamma}}\right)\right) &= \mathbb{E}\left(f\left(\frac{\sqrt{n}W + S_n}{n^{1-\gamma}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{Z_n \sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{w+x}{n^{1-\gamma}}\right) \exp\left(\frac{x^2}{2n} - \frac{w^2}{2n}\right) dw \right) d\rho^{*n}(x) \end{aligned}$$

d'après le théorème de transfert et le théorème de Fubini. Effectuons le changement de variable $z = w + x$ (à x fixé) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(f\left(\frac{W}{n^{1/2-\gamma}} + \frac{S_n}{n^{1-\gamma}}\right)\right) &= \frac{1}{Z_n \sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{z}{n^{1-\gamma}}\right) \exp\left(\frac{x^2}{2n} - \frac{(z-x)^2}{2n}\right) dz \right) d\rho^{*n}(x) \\ &= \frac{1}{Z_n \sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{z}{n^{1-\gamma}}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2n} + \frac{zx}{n}\right) dz \right) d\rho^{*n}(x) \\ &= \frac{1}{Z_n \sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{z}{n^{1-\gamma}}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2n}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{zx}{n}\right) d\rho^{*n}(x) \right) dz \\ &= \frac{1}{Z_n \sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{z}{n^{1-\gamma}}\right) \exp\left(-\frac{z^2}{2n}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(\frac{zx}{n}\right) d\rho(x) \right)^n dz \\ &= \frac{1}{Z_n \sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} f\left(\frac{z}{n^{1-\gamma}}\right) \exp\left(-nG\left(\frac{z}{n}\right)\right) dz \end{aligned}$$

Les différentes interversions d'intégrales découlent du théorème de Fubini. Enfin le changement de variable $s = z/n^{1-\gamma}$ entraîne que

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{W}{n^{1/2-\gamma}} + \frac{S_n}{n^{1-\gamma}}\right)\right) = \frac{n^{1-\gamma}}{Z_n \sqrt{2\pi n}} \int_{\mathbb{R}} f(s) \exp\left(-nG\left(\frac{s}{n^\gamma}\right)\right) ds$$

Enfin en prenant $f = 1$ nous obtenons l'expression de $Z_n \sqrt{2\pi n} n^{\gamma-1}$:

$$\mathbb{E}\left(f\left(\frac{W}{n^{1/2-\gamma}} + \frac{S_n}{n^{1-\gamma}}\right)\right) = \frac{\int_{\mathbb{R}} f(s) \exp(-nG(s/n^\gamma)) ds}{\int_{\mathbb{R}} \exp(-nG(t/n^\gamma)) dt}$$

Ceci démontre le lemme. □

Soit $\gamma \in \mathbb{R}$. Pour obtenir la convergence en loi de $S_n/n^{1-\gamma}$ à partir de la convergence en loi de $W/n^{1/2-\gamma} + S_n/n^{1-\gamma}$, nous avons également besoin du petit lemme suivant :

Lemme III.7. *Soient $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites de variables aléatoires telles que :*

- ★ *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, W_n est indépendante de Y_n .*
 - ★ *$(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en loi vers une variable aléatoire ν .*
 - ★ *La fonction caractéristique Φ_ν de ν ne s'annule pas.*
- Soit μ une mesure de probabilité. Alors*

$$Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mu \iff W_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \nu \star \mu$$

Démonstration. D'après le lemme de Paul Levy,

$$W_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \nu \star \mu \iff \forall u \in \mathbb{R} \quad \Phi_{W_n + Y_n}(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi_{\nu \star \mu}(u)$$

Pour tous $u \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\Phi_{\nu \star \mu}(u) = \Phi_\nu(u)\Phi_\mu(u)$ et l'indépendance de W_n et Y_n entraîne que

$$\Phi_{W_n + Y_n}(u) = \Phi_{W_n}(u)\Phi_{Y_n}(u)$$

De plus

$$\Phi_{W_n}(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi_\nu(u) \neq 0$$

Donc pour n assez grand, $\Phi_{W_n}(u) \neq 0$. Ainsi

$$W_n + Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \nu \star \mu \iff \forall u \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{Y_n}(u) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \Phi_\mu(u) \iff Y_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mu$$

le lemme de Paul Levy entraînant la dernière équivalence. □

Étudions à présent la fonction G en vue d'appliquer la méthode de Laplace au résultat du lemme précédent.

Lemme III.8. *La fonction G possède les propriétés suivantes :*

- (a) *G est analytique réelle.*
- (b) *$G(s)$ tend vers $+\infty$ quand $|s|$ tend vers $+\infty$.*
- (c) *G a un nombre fini de minima globaux.*
- (d) *Pour tout $n \geq 1$,*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-nG(s)} ds < +\infty$$

- (e) *G admet un unique minimum global en 0 si et seulement l'hypothèse III.2(b) est satisfaite. Si c'est le cas alors au voisinage de 0,*

$$G(s) = \lambda \frac{s^{2k}}{(2k)!} + o(s^{2k})$$

si et seulement si ρ est de type k et de force λ .

Démonstration. (a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ nous définissons

$$g(z) = \int_{\mathbb{R}} e^{zx} d\rho(x)$$

Pour $L > 0$, $z \in D(0, L)$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$|e^{zx}| \leq e^{|zx|} \leq e^{L^2/2} e^{x^2/2}$$

L'hypothèse III.2(a) et le théorème de Morera (démontré dans [16]) impliquent alors que la fonction g est bien définie et holomorphe sur \mathbb{C} . Notons \tilde{g} la restriction de g à \mathbb{R} . La fonction \tilde{g} est ainsi analytique réelle.

Soit $s_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de réels telle qu'au voisinage de s_0 ,

$$\tilde{g}(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k (s - s_0)^k$$

Comme \tilde{g} est à valeurs dans \mathbb{R}_+^* , nous avons en particulier que $\tilde{g}(s_0) > 0$ et donc $a_0 > 0$. Ainsi

$$G(s) = \frac{s^2}{2} - \ln(a_0) - \ln(1 + h(s))$$

avec

$$h(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k}{a_0} (s - s_0)^k$$

Enfin $h(s_0) = 0$ donc, sur un voisinage de s_0 , $|h(s)| < 1$. Comme $x \mapsto \ln(1+x)$ est analytique sur $] -1, 1[$, nous en déduisons que G est analytique au voisinage de s_0 . Ainsi G est analytique réelle.

(b) Soit $L > 0$ et $s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x) \right| &\leq \int_{|x| \leq L} e^{|sx|} d\rho(x) + \int_{|x| > L} e^{|sx|} d\rho(x) \\ &\leq \rho([-L, L]) e^{L|s|} + e^{s^2/2} \int_{|x| > L} e^{x^2/2} d\rho(x) \end{aligned}$$

Prenons $L = \sqrt{|s|}$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x) \right| \leq e^{s^2/2} \left(\exp\left(|s|^{3/2} - \frac{s^2}{2}\right) + \int_{|x| > \sqrt{|s|}} e^{x^2/2} d\rho(x) \right)$$

Ainsi

$$e^{-s^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x) \xrightarrow{|s| \rightarrow +\infty} 0$$

Et donc

$$G(s) = -\ln\left(e^{-s^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x)\right) \xrightarrow{|s| \rightarrow +\infty} +\infty$$

(c) Nous déduisons du (b) que tous les minima globaux de G sont compris dans un segment I de \mathbb{R} . Comme G est analytique réelle, il en est de même pour G' et le théorème des zéros isolés implique que G' a un nombre fini de zéros dans

le compact I . Par conséquent G a un nombre fini de minima globaux dans I et donc dans \mathbb{R} .

(d) Si $n = 1$, en utilisant le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-G(s)} ds &= \int_{\mathbb{R}} e^{-s^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(s-x)^2/2} e^{x^2/2} d\rho(x) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{x^2/2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-(s-x)^2/2} ds \right) d\rho(x) \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{x^2/2} d\rho(x) < +\infty \end{aligned}$$

Si $n \geq 2$, comme $G(s)$ tend vers $+\infty$ quand $|s|$ tend vers $+\infty$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $|x| > a$, $G(x) \geq 0$ et donc $-nG(x) \leq -G(x)$. Et de plus G est bornée sur $[-a, a]$ par un certain $M \in \mathbb{R}$. Donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{-nG(s)} ds &\leq \int_{|s| \leq a} e^{-nG(s)} ds + \int_{|s| > a} e^{-G(s)} ds \\ &\leq \int_{-a}^a e^{nM} ds + \int_{\mathbb{R}} e^{-G(s)} ds < +\infty \end{aligned}$$

(e) La fonction G est nulle en 0 donc elle admet un unique minimum global en 0 si et seulement pour tout $s \neq 0$, $G(s) > 0$. C'est à dire si et seulement si pour tout $s \neq 0$,

$$e^{-s^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x) = e^{-G(s)} < 1$$

Ce qui est vrai si et seulement l'hypothèse III.2(b) est satisfaite.

Supposons que c'est le cas. La fonction G est analytique donc il existe une suite $(K_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de réels, appelés cumulants de ρ , tels que dans un voisinage de 0,

$$\ln \int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} K_j \frac{s^j}{j!}$$

Il est clair que $K_0 = 0$ et que

$$G(s) = -K_1 s + (1 - K_2) \frac{s^2}{2} - \sum_{j=3}^{+\infty} K_j \frac{z^j}{j!}$$

Donc $G(s) = \lambda s^{2k}/(2k)! + o(s^{2k})$ si et seulement si $K_2 = 1$, $K_1 = K_3 = K_4 = \dots = K_{2k-1} = 0$ et $K_{2k} = -\lambda$. En dérivant l'expression ci-dessus, nous obtenons :

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} x e^{sx} d\rho(x)}{\int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x)} = \sum_{j=1}^{+\infty} K_j \frac{z^{j-1}}{(j-1)!}$$

En évaluant en 0 nous avons $K_1 = m_1(\rho)$. En dérivant à nouveau et en prenant $s = 0$, il vient $K_2 = m_2(\rho) - (m_1(\rho))^2$. Par récurrence il est clair que les cumulants s'expriment en fonction des moments de ρ . Remarquons enfin que

les cumulants $\overline{K_j}$ de $\mathcal{N}(0, 1)$ sont tous nuls sauf $\overline{K_2}$ qui vaut 1. Le fait que ρ soit de type k et de force λ est donc équivalent à ce qu'au voisinage de 0, $G(s) = \lambda s^{2k}/(2k)! + o(s^{2k})$. \square

Nous pouvons à présent démontrer le théorème III.5. Donnons-nous ρ une mesure de probabilité non dégénérée, qui vérifie les hypothèses III.2, de type $k \in \mathbb{N}^*$ et de force $\lambda > 0$. Nous allons montrer que pour toute fonction h continue bornée,

$$\frac{\int_{\mathbb{R}} h(s) \exp(-nG(s/n^{1/2k})) ds}{\int_{\mathbb{R}} \exp(-nG(t/n^{1/2k})) dt} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} h(s) \exp(-\lambda s^{2k}/(2k)!) ds}{\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda t^{2k}/(2k)!) dt} \quad (*)$$

Supposons que (*) soit prouvé et voyons comment la preuve se termine. Le lemme III.6 et le lemme de Paul Lévy impliquent que

$$\frac{W}{n^{1/2-1/2k}} + \frac{S_n}{n^{1-1/2k}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{\exp(-\lambda s^{2k}/(2k)!) ds}{\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda t^{2k}/(2k)!) dt}$$

Nous avons alors deux cas de figure :

★ le type $k \geq 2$ et alors

$$\frac{W}{n^{1/2-1/2k}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} 0$$

Le lemme III.7 implique alors que

$$\frac{S_n}{n^{1-1/2k}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{\exp(-\lambda s^{2k}/(2k)!) ds}{\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda t^{2k}/(2k)!) dt}$$

★ le type $k = 1$ et alors

$$W + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1/\lambda)$$

Or la fonction G est analytique et pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$G''(s) = 1 - \frac{(\int e^{sx} d\rho(x)) (\int x^2 e^{sx} d\rho(x)) - (\int x e^{sx} d\rho(x))^2}{(\int e^{sx} d\rho(x))^2}$$

Donc

$$G''(0) = 1 - \int_{\mathbb{R}} x^2 d\rho(x) < 1$$

Enfin le lemme III.8 entraîne que $G''(0) = \lambda$ et donc $\lambda < 1$ si bien que

$$W + \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1) + \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda} - 1\right)$$

Le lemme III.7 implique alors que

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{\lambda} - 1\right)$$

Il s'agit donc de montrer (*). Nous allons pour cela utiliser la méthode de Laplace. Le lemme III.8 entraîne que, au voisinage de 0,

$$G(s) = \lambda \frac{s^{2k}}{(2k)!} + o(s^{2k})$$

Donc il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $s \in]-\delta, \delta[$,

$$-G(s) < -\frac{\lambda}{2} \frac{s^{2k}}{(2k)!}$$

et de plus

$$-nG\left(\frac{s}{n^{1/2k}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\lambda \frac{s^{2k}}{(2k)!}$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \int_{|x| < \delta n^{1/2k}} h(s) \exp(-nG(s/n^{1/2k})) ds$$

La fonction $s \mapsto -\lambda s^{2k}/(2(2k)!)$ est intégrable sur \mathbb{R} donc le théorème de convergence dominée implique que

$$A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(s) \exp(-\lambda s^{2k}/(2k)!) ds$$

Posons pour $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n = \int_{|x| \geq \delta n^{1/2k}} h(s) \exp(-nG(s/n^{1/2k})) ds$$

Notons $\varepsilon = \inf \{ G(x) : |x| \geq \delta \} > 0$. Alors

$$\begin{aligned} B_n &\leq e^{-(n-1)\varepsilon} \|h\|_{\infty} \int_{|x| \geq \delta n^{1/2k}} \exp(-G(s/n^{1/2k})) ds \\ &\leq e^{-(n-1)\varepsilon} \|h\|_{\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp(-G(s)) ds \\ &= e^{-(n-1)\varepsilon} \|h\|_{\infty} \sqrt{2\pi} \int_{\mathbb{R}} e^{x^2/2} d\rho(x) \end{aligned}$$

Ainsi

$$A_n + B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(s) \exp(-\lambda s^{2k}/(2k)!) ds$$

En appliquant cela avec $h = 1$ nous obtenons la limite du dénominateur. Ainsi nous avons montré (*) et donc le théorème.

5) Quelques résultats plus généraux

Nous pouvons observer que l'essentiel de la preuve du théorème III.5 repose sur l'étude de la fonction G et plus précisément sur l'étude de ses minima. C'est l'hypothèse III.2(b) qui assure l'unicité du minima de G en 0 et son comportement au voisinage de 0. La preuve s'adapte donc à une mesure de probabilité dont nous connaissons les minima et leurs propriétés. Nous donnons ici, sans démonstration, quelques généralisations du théorème III.5.

Théorème III.9. Soient $p \in \mathbb{N}^*$, m_1, \dots, m_p des réels distincts, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels strictement positifs et k_1, \dots, k_p des entiers non nuls. Soit ρ une loi de probabilité satisfaisant l'hypothèse III.2(a). Pour tout $s \in \mathbb{R}$, posons

$$G(s) = \frac{s^2}{2} - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x)$$

Supposons que m_1, \dots, m_p sont les minima globaux de G et que pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, au voisinage de m_i ,

$$G(s) - G(m_i) \sim \lambda_i \frac{(s - m_i)^{2k_i}}{(2k_i)!}$$

Alors il existe des réels positifs b_1, \dots, b_p de somme égale à 1 tels que, sous $\mu_{n,\rho}$,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \sum_{i=1}^p b_i \delta_{m_i}$$

Par exemple donnons-nous la probabilité $\rho = (\delta_{-\sqrt{\beta}} + \delta_{\sqrt{\beta}})/2$ (afin de nous placer dans le cas du théorème d'Ising Curie-Weiss classique). Elle satisfait l'hypothèse III.2(a) et pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$G(s) = \frac{s^2}{2} - \ln \operatorname{ch}(s\sqrt{\beta})$$

Nous montrons via une simple étude de fonction que si $\beta > 1$ alors il existe un réel $m(\beta) > 0$ tel que la fonction G admet deux minima globaux en $-m(\beta)$ et $m(\beta)$. Le théorème précédent implique que sous $\mu_{n,\rho}$,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{2} (\delta_{-m(\beta)} + \delta_{m(\beta)})$$

Il s'agit du théorème II.1 dans le cas où $\beta > 1$.

Dans le cas où G admet un unique minimum nous avons le théorème suivant :

Théorème III.10. Soit ρ et $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ des mesures de probabilité non dégénérées, qui vérifient l'hypothèse III.2(a) et telles que pour toute fonction f continue bornée,

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) e^{x^2/2} d\rho_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{x^2/2} d\rho(x)$$

Nous définissons la fonction G associée à ρ par

$$G : s \in \mathbb{R} \mapsto \frac{s^2}{2} - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{sx} d\rho(x)$$

Nous supposons que G admet un unique minimum en $m \in \mathbb{R}$ au voisinage duquel

$$G(s) - G(m) \sim \lambda \frac{(s - m)^{2k}}{(2k)!}$$

où $k \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, nous définissons les fonctions G_n , associées à ρ_n . Nous supposons qu'il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{2k-1}$ des réels positifs tels que pour tout $j \in \{1, \dots, 2k-1\}$, quand n tend vers $+\infty$,

$$G_n^{(j)}(m) \sim \frac{\lambda_j}{n^{1-j/2k}}$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, nous introduisons n variables aléatoires X_1, \dots, X_n de loi jointe

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{2n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho_n(x_i)$$

où Z_n est la constante de renormalisation. Nous posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \delta_m$$

De plus si $k = 1$ alors $\lambda < 1$ et,

$$\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(-\frac{\lambda_1}{\lambda}, \frac{1}{\lambda} - 1\right)$$

Si $k \geq 2$ alors,

$$\frac{S_n - nm}{n^{1-1/2k}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} C \exp\left(-\lambda \frac{s^{2k}}{(2k)!} - \sum_{j=1}^{2k-1} \lambda_j \frac{s^j}{j!}\right) ds$$

Ces théorèmes sont démontrés dans [12] et le théorème III.5 en est une conséquence (avec $\lambda_1 = \dots = \lambda_{2k-1} = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_n = \rho$).

Nous terminons par quelques théorèmes d'existence.

Théorème III.11. *Soit ρ une mesure de probabilité non dégénérée, qui vérifie les hypothèses III.2, de type $k \in \mathbb{N}^*$ et de force $\lambda > 0$. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_{2k-1}$ des réels. Alors il existe une suite de mesures de probabilités $(\rho_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ qui converge étroitement vers ρ et telle que,*

$$\frac{S_n}{n^{1-1/2k}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} C \exp\left(-\lambda \frac{s^{2k}}{(2k)!} - \sum_{j=1}^{2k-1} \lambda_j \frac{s^j}{j!}\right) ds$$

Théorème III.12. *Soit ρ une mesure de probabilité non dégénérée, qui vérifie les hypothèses III.2, de type $k \in \mathbb{N}^*$ et de force $\lambda > 0$. Alors $\lambda \leq k!$.*

Théorème III.13. *Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\lambda \in]0, k!]$, il existe une infinité non dénombrable de probabilités ρ vérifiant les hypothèses du théorème III.5 avec k et λ . Mais il existe une unique probabilité $\rho^{(k)}$ de type k et de force $\lambda = k!$. Il s'agit d'une mesure symétrique chargeant au plus k points.*

IV Transitions de phases dans le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé

Dans le paragraphe précédent nous avons étudié un modèle d'Ising Curie-Weiss plus général et obtenu une généralisation des théorèmes II.3 et II.4 (du type théorème central limite). Nous regardons à présent un autre aspect important du modèle d'Ising Curie-Weiss : l'existence d'une valeur critique β_c et d'une transition de phase. Pour cela nous allons considérer le modèle d'Ising Curie-Weiss avec une généralisation supplémentaire : le terme quadratique dans l'hamiltonien est remplacé par une fonction g (suffisamment régulière et de façon à ce que

le modèle soit bien défini). En supposant que la loi ρ est symétrique, nous allons observer l'existence, non plus d'une seule valeur critique β_c , mais d'un ensemble au plus dénombrable de valeurs critiques. Nous démontrerons des théorèmes limites pour S_n/n en fonction de la position de β par rapport aux différentes valeurs critiques. Nous présenterons quelques éléments des preuves de l'article de 1987 de Theodor Eisele et Richard S. Ellis [10].

1) Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé

Nous avons vu dans la démonstration du théorème II.1 que, sous $\mu_n = \mu_{n,\beta}$,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{2}(\delta_{-m(\beta)} + \delta_{m(\beta)})$$

où $m(\beta)$ est l'unique minimum de la fonction $u \mapsto I(u) - \beta u^2/2$ sur $[0, 1]$ avec

$$I : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1+x}{2} \ln(1+x) + \frac{1-x}{2} \ln(1-x)$$

Nous avons deux cas :

- * Si $\beta \in]0, 1]$ alors $m(\beta) = 0$ et la loi limite est δ_0 .
- * Si $\beta > 1$ alors $m(\beta) = b^{-1}(\beta)$ où b est la fonction

$$x \mapsto \frac{I'(x)}{x} = \frac{\operatorname{argth}(x)}{x}$$

qui est une bijection sur $]0, 1[$ et qui est analytique réelle. Elle se prolonge par continuité en 0 en posant $b(0) = 1$. Ainsi la fonction $\beta \mapsto m(\beta)$, appelée fonction de magnétisation spontanée, est continue sur $]0, +\infty[$, analytique réelle sur $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$. Cependant elle n'est pas différentiable en $\beta = 1$:

$$m'(\beta) \xrightarrow[\beta \rightarrow 1^+]{\quad} +\infty$$

Nous disons que le modèle d'Ising Curie-Weiss classique présente un point critique (de second ordre).

Nous allons alors généraliser le modèle d'Ising Curie-Weiss en remplaçant le terme quadratique dans l'hamiltonien par une fonction plus générale (mais cependant assez régulière). Par contre, nous supposerons que la mesure de probabilité ρ est symétrique. Nous allons alors observer l'existence d'une suite de transitions de phase en différentes valeurs critiques de β .

Définissons le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé :

Définition IV.1. Soit ρ une mesure de probabilité non dégénérée et g une fonction réelle à valeurs réelles. Notons

$$L = \sup \{ x \in \mathbb{R} : x \in \operatorname{supp}(\rho) \}$$

Supposons qu'il existe une fonction h convexe sur $[-L, L]$ telle que pour tout $x \in [-L, L]$, $g(x) \leq h(x)$ et pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_{[-L, L]} e^{\alpha h(x)} d\rho(x) < \infty$$

Soient $\beta > 0$, $n \geq 1$ et X_1, \dots, X_n n variables aléatoires réelles de loi $\mu_{n,\rho,g}$ où

$$d\mu_{n,\rho,g}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n(\beta)} \exp\left(n\beta g\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right)\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

avec

$$Z_n(\beta) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(n\beta g\left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right)\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

Posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

Quand il n'y a pas de risque de confusion, nous noterons simplement $\mu_n = \mu_{n,\rho,g}$ (qui, jusqu'ici, désignait la mesure de Gibbs dans le modèle d'Ising Curie-Weiss classique).

Notons que la convexité de h entraîne que pour tout $\beta > 0$ et $n \geq 1$

$$1 \leq Z_n(\beta) \leq \left(\int_{[-L,L]} e^{\beta h(x)} d\rho(x)\right)^n < \infty$$

Remarquons que le cas $g = h : x \mapsto x^2/2$ et $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ correspond au modèle d'Ising Curie-Weiss classique sans champ extérieur.

2) Théorème limite et existence de valeurs critiques

Commençons par quelques hypothèses sur ρ et g :

Hypothèses IV.2. Nous supposons que ρ et g vérifient :

(a) g est paire, analytique réelle, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et $g(0) = 0$.

(b) ρ est une mesure de probabilité symétrique et non dégénérée.

(c) Soit $L = \sup\{x \in \mathbb{R} : x \in \text{supp}(\rho)\}$. Il existe une fonction h symétrique, convexe, non constante sur $[-L, L]$ telle que pour tout $x \in [-L, L]$, $g(x) \leq h(x)$ et pour tout $\alpha > 0$,

$$\int_{[-L,L]} e^{\alpha h(x)} d\rho(x) < \infty$$

Posons pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Lambda(t) = \ln \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\rho(x)$$

La fonction Λ est appelée la Log-Laplace de la loi ρ . Elle est finie partout dès que g et ρ satisfont les hypothèses IV.2. En effet puisque la fonction h est paire, convexe, positive et non constante sur $[-L, L]$, il existe deux réels $\alpha > 0$ et $\gamma \geq 0$ tels que pour tout $x \in [-L, L]$, $h(x) \geq \alpha|x| - \gamma$. Ainsi

$$\exp \Lambda(t) = \int_{[-L,L]} e^{tx} d\rho(x) \leq \int_{[-L,L]} e^{t(\alpha|x| + \gamma)/\alpha} d\rho(x) < +\infty$$

De plus ρ est symétrique et non dégénérée donc pour tout $t \neq 0$,

$$\int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\rho(x) = \rho(\{0\}) + 2 \int_{]0,+\infty[} \text{ch}(tx) d\rho(x) > 1$$

Si bien que Λ est paire et strictement positive sur \mathbb{R}^* .

Nous définissons enfin la transformée de Cramér I de la loi ρ par

$$I : u \in \mathbb{R} \mapsto \Lambda^*(u) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (tu - \Lambda(t))$$

Plusieurs propriétés de la transformée de Cramér sont rappelées dans l'annexe et la proposition suivante :

Proposition IV.3. *Si g et ρ vérifient les hypothèses IV.2 alors la fonction I est une fonction analytique réelle et paire sur $] -L, L[$ telle que $I(0) = I'(0) = 0$ et $I''(0) = 1/\mu_2(\rho)$. De plus pour tout $\beta > 0$, la fonction $I - \beta g$ atteint son minimum sur $] -L, L[$. Si m réalise ce minimum alors $\beta g'(m) = I'(m)$.*

La démonstration de cette proposition fait appel à la proposition B.2 de l'annexe ainsi qu'au lemme IV.6.

Théorème IV.4. *Supposons que g et ρ vérifient les hypothèses IV.2. Alors il existe $\beta_1 > 0$ et \mathcal{P} un ensemble au plus dénombrable de valeurs critiques strictement supérieures à β_1 et tels que :*

★ *Pour tout $\beta \in]0, \beta_1[$ le minimum de $I - \beta g$ est atteint en 0.*

★ *Pour tout $\beta \in]\beta_1, \infty[\setminus \mathcal{P}$ le minimum de $I - \beta g$ est atteint en deux points $m(\beta) > 0$ et $-m(\beta)$.*

La fonction $\beta \mapsto m(\beta)$ est appelée fonction de magnétisation spontanée. Elle vérifie

$$\forall \beta \in]\beta_1, \infty[\setminus \mathcal{P}, \quad \beta g'(m(\beta)) = I'(m(\beta))$$

Elle est analytique réelle sur chaque intervalle ouvert de $]0, \infty[\setminus \mathcal{P}$ (mais elle n'est pas la restriction d'une fonction analytique au voisinage de β_1 et des points de \mathcal{P}). Alors, sous $\mu_{n,\rho,g}$,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \begin{cases} \delta_0 & \text{si } \beta \in]0, \beta_1[\\ \frac{1}{2}(\delta_{-m(\beta)} + \delta_{m(\beta)}) & \text{si } \beta \in]\beta_1, \infty[\setminus \mathcal{P} \end{cases}$$

Remarquons que dans le cas où $\beta < \beta_1$ nous avons le même résultat que la loi des grands nombres classiques. Nous sommes en effet dans une région de faibles interactions.

Remarque. ★ Si β est une valeur critique telle que

$$m^-(\beta) = \lim_{\alpha \rightarrow \beta^-} m(\alpha) < m^+(\beta) = \lim_{\alpha \rightarrow \beta^+} m(\alpha)$$

(valeur critique du premier ordre) alors l'ensemble des minima de $I - \beta g$ peut être constitué de plus que deux points. Il s'agit de plus d'un sous ensemble symétrique de

$$[-m^+(\beta), -m^-(\beta)] \cup [m^-(\beta), m^+(\beta)]$$

qui contient les points $m^+(\beta)$, $-m^+(\beta)$, $-m^-(\beta)$ et $m^-(\beta)$.

★ Si β est une valeur critique telle que $m^-(\beta) = m^+(\beta)$ (valeur critique du second ordre) alors l'ensemble des minima de $I - \beta g$ est $\{-m^+(\beta), m^+(\beta)\}$ et sous $\mu_{n,\rho,g}$,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{2}(\delta_{-m^+(\beta)} + \delta_{m^+(\beta)})$$

Nous terminons ce paragraphe par d'autres propriétés de la fonction de magnétisation spontanée et de \mathcal{P} :

Proposition IV.5. (a) La fonction $\beta \mapsto m(\beta)$ est strictement croissante sur $]0, +\infty[\setminus \mathcal{P}$ et elle tend vers L quand β tend vers $+\infty$ dans $]0, +\infty[\setminus \mathcal{P}$.

(b) Si $L < \infty$ et $\rho(\{L\}) > 0$ alors \mathcal{P} est fini.

3) Démonstrations

Dans ce paragraphe, nous allons donner les grandes lignes de la démonstration du théorème IV.4, objet de l'article [10] (plus précisément nous ferons appel à des lemmes, nous renvoyons à [10] pour leur démonstration). Comme pour le modèle d'Ising Curie-Weiss classique nous utilisons le théorème de Varadhan pour faire intervenir la fonction de taux I des grandes déviations de S_n/n sous ρ (cf. annexe) et nous étudions l'ensemble des minima de la fonction $I - \beta g$.

Commençons par vérifier que nous pouvons appliquer le théorème de Varadhan à la loi de S_n/n sous $\mu_{n,\rho,g}$, que nous notons $\nu_{n,\beta,g}$. Soit A un borélien de \mathbb{R} .

$$\mu_{n,\rho,g} \left(\frac{S_n}{n} \in A \right) = \frac{1}{Z_n(\beta)} \int_{S_n/n \in A} \exp \left(n\beta g \left(\frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \right) \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

Notons θ_n la loi de S_n/n sous $\rho^{\otimes n}$. Alors

$$\nu_{n,\beta,g}(A) = \mu_{n,\rho,g}(S_n/n \in A) = \int_A e^{n\beta g(x)} d\theta_n(x) \left(\int_A e^{n\beta g(x)} d\theta_n(x) \right)^{-1}$$

D'après le théorème de Cramér (cf. annexe), la suite $(\theta_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ satisfait le PGD de vitesse n , gouverné par la bonne fonction de taux $I = \Lambda^*$. La fonction βg est continue mais pas bornée, ainsi nous ne pouvons pas appliquer la version classique du théorème de Varadhan. Soit alors $M \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \int_{\{\beta g(x) \geq M\}} e^{n\beta g(x)} d\theta_n(x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{kM \leq \beta g(x) \leq (k+1)M\}} e^{n\beta g(x)} d\theta_n(x) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{n(k+1)M} \mathbb{P} \left(\beta g \left(\frac{S_n}{n} \right) \geq kM \right) \end{aligned}$$

Le fait que $g \leq h$ sur $[-L, L]$ et la convexité de h entraînent que

$$\begin{aligned} \int_{\{\beta g(x) \geq M\}} e^{n\beta g(x)} d\theta_n(x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{n(k+1)M} \mathbb{P} \left(\frac{\beta}{n} \sum_{j=1}^n h(X_j) \geq kM \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{n(k+1)M} \mathbb{P} \left(\exp \left(3\beta \sum_{j=1}^n h(X_j) \right) \geq e^{3nkM} \right) \end{aligned}$$

Il découle de l'inégalité de Markov et de l'indépendance des X_i que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\exp \left(3\beta \sum_{j=1}^n h(X_j) \right) \geq e^{3nkM} \right) &\leq e^{-3nkM} \mathbb{E} \left(\exp \left(3\beta \sum_{j=1}^n h(X_j) \right) \right) \\ &= e^{-3nkM} \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n e^{3\beta h(X_i)} \right) \\ S &= e^{-3nkM} K(\beta)^n \end{aligned}$$

avec

$$K(\beta) = \int_{[-L,L]} e^{3\beta h(x)} d\rho(x)$$

Il s'agit d'une quantité finie d'après l'hypothèse IV.2(c). Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\{\beta g(x) \geq M\}} e^{n\beta g(x)} d\theta_n(x) &\leq K(\beta)^n e^{nM} \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2knM} \\ &= K(\beta)^n e^{-nM} (1 - e^{-2nM})^{-1} \end{aligned}$$

Finalement

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\{\beta g(x) \geq M\}} e^{n\beta g(x)} d\theta_n(x) = -M + \ln K(\beta)$$

qui tend vers $-\infty$ quand M tend vers $+\infty$. Ainsi d'après le théorème de Varadhan (cf. annexe), sous $\mu_{n,\rho,g}$, S_n/n satisfait le PGD de vitesse n , gouverné par la fonction de taux

$$J_\beta : x \mapsto I(x) - \beta g(x) - \inf_{y \in \mathbb{R}} (I(y) - \beta g(y))$$

Ainsi la loi de S_n/n sous $\mu_{n,\rho,g}$ se concentre sur les minima de J_β .

Le lemme suivant assure que, pour tout $\beta > 0$, le minimum de J_β est atteint :

Lemme IV.6. *Pour tout $\beta > 0$, il existe $m \in]-L, L[$ tel que*

$$I(m) - \beta g(m) = \inf_{x \in \mathbb{R}} (I(x) - \beta g(x))$$

De plus m vérifie $I'(m) = \beta g'(m)$.

Nous introduisons, pour $\beta > 0$, l'ensemble

$$\mathcal{M}_\beta = \left\{ m \in \mathbb{R} : I(m) - \beta g(m) = \inf_{x \in \mathbb{R}} (I(x) - \beta g(x)) \right\}$$

Il est non vide d'après le lemme précédent. Par parité de I et g , nous restreignons l'étude de cet ensemble à celle de

$$\mathcal{M}_\beta^+ = \mathcal{M}_\beta \cap]0, +\infty[$$

Si $m \in \mathcal{M}_\beta^+$ alors $I'(m) = \beta g'(m)$. Les hypothèses IV.2 (ainsi que les propriétés de la transformée de Cramér rappelées dans l'annexe) entraînent que $g'(0) =$

$\Lambda'(0) = I'(0) = 0$, que pour tout $x \in]0, L[$, $g'(x) = -g'(-x) > 0$ et que $g''(0) \geq 0$. Si $m \in \mathcal{M}_\beta^+$ alors $b(m) = \beta$ où

$$b : x \in]-L, L[\setminus \{0\} \mapsto \frac{I'(x)}{g'(x)}$$

Ainsi la démonstration repose sur l'étude de la fonction b puisqu'alors la fonction de magnétisation $\beta \mapsto m(\beta)$ est localement l'inverse de la fonction b . En voici quelques propriétés découlant des hypothèses sur ρ et g :

Lemme IV.7. *La fonction b est strictement positive, paire et analytique réelle sur $] -L, 0[\cup]0, L[$. Si $g''(0) > 0$ alors b peut être prolongée en une fonction analytique réelle sur $] -L, L[$ en posant*

$$b(0) = \frac{I''(0)}{g''(0)} = \frac{1}{g''(0)\sigma^2}$$

Dans ce cas $b'(0) = 0$.

Poursuivons par un lemme faisant état de la structure des ensembles \mathcal{M}_β^+ , $\beta > 0$:

Lemme IV.8. (a) *Il existe $\beta > 0$ tel que $\mathcal{M}_\beta^+ \neq \emptyset$.*

(b) *Si $\mathcal{M}_\beta^+ \neq \emptyset$ et $\gamma > \beta$ alors $0 \notin \mathcal{M}_\gamma$ et $\mathcal{M}_\gamma^+ \neq \emptyset$.*

(c) *Soit $\beta < \gamma$, $m \in \mathcal{M}_\beta$ et $\tilde{m} \in \mathcal{M}_\gamma$ alors $m < \tilde{m}$.*

(d) *Nous définissons la quantité*

$$\beta_1 = \inf \{ \beta > 0 : \mathcal{M}_\beta^+ \neq \emptyset \}$$

Alors $\beta_1 > 0$, $\beta_1 = \inf \{ \beta > 0 : 0 \notin \mathcal{M}_\beta \}$ et aussi

$$\beta_1 = \sup \{ \beta > 0 : \mathcal{M}_\beta^+ = \emptyset \} = \sup \{ \beta > 0 : \mathcal{M}_\beta = \{0\} \}$$

Si $\beta < \beta_1$ alors $\mathcal{M}_\beta = \{0\}$, $\mathcal{M}_\beta^+ = \emptyset$. Si $\beta > \beta_1$ alors $\mathcal{M}_\beta^+ \neq \emptyset$ si bien que nous pouvons définir les quantités :

$$m^-(\beta) = \sup \{ m : m \in \mathcal{M}_{\beta'}^+, \beta_1 < \beta' < \beta \}$$

$$m^+(\beta) = \inf \{ m : m \in \mathcal{M}_{\beta'}^+, \beta' > \beta \}$$

Elles obéissent aux propriétés suivantes :

Lemme IV.9. (a) *Si $\beta > \beta_1$ alors $0 < m^-(\beta) \leq m^+(\beta) < L$.*

(b) *Si $\beta > \beta_1$ alors $m^-(\beta)$ et $m^+(\beta)$ appartiennent à l'ensemble \mathcal{M}_β^+ . Ainsi*

$$b(m^-(\beta)) = \beta = b(m^+(\beta))$$

(c) *Si $\beta > \beta_1$ et $m \in \mathcal{M}_\beta^+$ alors $m^-(\beta) \leq m \leq m^+(\beta)$.*

(d) *Les fonctions $\beta \mapsto m^-(\beta)$ et $\beta \mapsto m^+(\beta)$ sont strictement croissantes sur $] \beta_1, +\infty[$ et sont respectivement continues à gauche et continues à droite.*

(e) *Si $m^+(\beta_1) = 0$ alors la fonction b peut être prolongée en une fonction analytique réelle sur $] -L, L[$.*

Nous prolongeons les fonctions $\beta \mapsto m^-(\beta)$ et $\beta \mapsto m^+(\beta)$ à $]0, +\infty[$ en posant $m^-(\beta) = m^+(\beta) = 0$ si $\beta \in]0, \beta_1[$ et

$$m^-(\beta_1) = 0 \quad \text{et} \quad m^+(\beta_1) = \lim_{\beta \rightarrow \beta_1^+} m^+(\beta)$$

si bien qu'elles sont respectivement continues à gauche et continues à droite sur $]0, +\infty[$. Pour un $\beta > \beta_1$ donné, nous avons trois possibilités :

★ ou bien $m^-(\beta) < m^+(\beta)$. Nous parlons alors d'une transition de phase du premier ordre en la valeur critique β .

★ ou bien $m^-(\beta) = m^+(\beta) = \bar{m}$ avec $b'(\bar{m}) = 0$. Nous parlons alors d'une transition de phase du second ordre en la valeur critique β .

★ ou bien $m^-(\beta) = m^+(\beta) = \bar{m}$ avec $b'(\bar{m}) \neq 0$. Nous parlons alors de valeur régulière.

Notons \mathcal{P} l'ensemble des valeurs critiques de $[\beta_1, +\infty[\setminus \{\beta_1\}$. Il vérifie les propriétés suivantes :

Lemme IV.10. (a) β_1 est la plus petite valeur critique.

(b) Pour tout $\beta \in \{\beta_1\} \cup \mathcal{P}$, il existe $\bar{m} \in [m^-(\beta), m^+(\beta)]$ telle que $b'(\bar{m}) = 0$.

(c) \mathcal{P} est localement finie (c'est-à-dire pour tout $\lambda > 0$, $\mathcal{P} \cap [0, \lambda]$ est finie).

Nous pouvons à présent démontrer le théorème IV.4 : nous venons d'introduire l'ensemble $\{\beta_1\} \cup \mathcal{P}$ des valeurs critiques qui est au plus dénombrable, d'après le (c) du lemme précédent. Les éléments de \mathcal{P} sont strictement supérieurs à β_1 . Séparons l'étude en deux cas :

★ Si $\beta < \beta_1$ alors $\mathcal{M}_\beta = \{0\}$, c'est-à-dire que la fonction $I - \beta g$ admet un unique minimum en 0. Or nous avons vu au début de ce paragraphe que, sous $\mu_{n,\rho,g}$, S_n/n satisfait le PGD de vitesse n , gouverné par la fonction de taux

$$J : x \mapsto I(x) - \beta g(x) - \inf_{y \in \mathbb{R}} (I(y) - \beta g(y))$$

Ceci implique que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \delta_0$$

★ Si $\beta \in]\beta_1, \infty[\setminus \mathcal{P}$, nous posons $m(\beta) = m^-(\beta) = m^+(\beta)$. Le point (c) du lemme IV.9 implique alors que $\mathcal{M}_\beta^\pm = \{m(\beta)\}$. Ainsi par symétrie $\mathcal{M}_\beta = \{-m(\beta), m(\beta)\}$, c'est-à-dire que le minimum de $I - \beta g$ est atteint en deux points $m(\beta) > 0$ et $-m(\beta)$. Comme, sous $\mu_{n,\rho,g}$, S_n/n satisfait le PGD de vitesse n , gouverné par la fonction de taux J , la proposition A.3 de l'annexe implique que

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \lambda \delta_{-m(\beta)} + (1 - \lambda) \delta_{m(\beta)}$$

La symétrie de ρ et la parité de g impliquent que $\lambda = 1/2$.

Il nous reste à vérifier les propriétés analytiques de la fonction de magnétisation spontanée. Tout d'abord pour tout $\beta \in]\beta_1, \infty[\setminus \mathcal{P}$,

$$\frac{I'(m(\beta))}{g'(m(\beta))} = b(m(\beta)) = \beta$$

avec $g'(m(\beta)) > 0$ puisque $m(\beta) > 0$. Ainsi $I'(m(\beta)) = \beta g'(m(\beta))$. D'après le lemme IV.9, $\beta \mapsto m(\beta)$ est positive, strictement croissante et continue sur chaque ouvert connexe de $] \beta_1, \infty[\setminus \mathcal{P}$ (puisque m^- est continue à gauche, m^+ continue à droite et $m = m^+ = m^-$). Enfin par définition de \mathcal{P} , $b'(m(\beta)) \neq 0$ pour $\beta \in] \beta_1, \infty[\setminus \mathcal{P}$. Comme b est analytique réelle sur $]0, L[$, le théorème de prolongement analytiques implique donc que la fonction de magnétisation spontanée est analytique réelle sur chacun des ouverts connexes de $]0, \infty[\setminus \mathcal{P}$ (sur $]0, \beta_1[$ c'est clair puisque m est la fonction nulle). Au voisinage des points critiques, il y a deux possibilités :

-ou bien c'est une valeur critique du premier ordre et il y a discontinuité en ce point. Il est clair alors que m ne peut pas être prolongée analytiquement au voisinage de ce point.

-ou bien c'est une valeur critique du second ordre $\beta_i : m^-(\beta_i) = m^+(\beta_i)$ avec $b'(m^+(\beta_i)) = 0$. Posons $m(\beta_i) = m^-(\beta_i) = m^+(\beta_i)$. La fonction m est alors continue en β_i . De plus pour $\beta \in] \beta_1, \infty[\setminus \mathcal{P}$,

$$m'(\beta) = \frac{1}{b'(m(\beta))} > 0$$

Si $i \geq 2$ alors $m(\beta_i) > 0$ et donc b' est analytique réelle au voisinage de $m(\beta_i)$. D'où

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_i^+} m'(\beta) = \frac{1}{b'(m(\beta_i))} = +\infty$$

Si $i = 1$ alors $m(\beta_i) = 0$ et donc b peut être prolongée de façon analytique sur tout $] -L, L[$ (d'après le point (e) du lemme IV.9) et la conclusion est la même :

$$\lim_{\beta \rightarrow \beta_1^+} m'(\beta) = +\infty$$

Dans les deux cas, aucun prolongement analytique n'est possible. Ce qui termine la preuve.

4) Différents types de points critiques

La fonction $\beta \mapsto m(\beta)$ n'est pas la restriction d'une fonction analytique réelle au voisinage des valeurs critiques. Il existe deux types de comportements, donnés dans la définition suivante :

Définition IV.11. *On dit que le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé admet une transition de phase :*

★ *du premier ordre en la valeur critique β_i si*

$$m^-(\beta_i) = \lim_{\beta \rightarrow \beta_i^-} m(\beta) < m^+(\beta_i) = \lim_{\beta \rightarrow \beta_i^+} m(\beta)$$

★ *du second ordre en la valeur critique β_i si*

$$m^-(\beta_i) = m^+(\beta_i) \text{ et } \lim_{\beta \rightarrow \beta_i^+} m'(\beta) = \infty$$

Nous donnons ici, sans démonstrations, des propriétés sur les valeurs critiques, notamment des critères pour qu'une valeur critique soit du premier ou du second ordre.

Théorème IV.12. *Supposons que g et ρ vérifient les hypothèses IV.2. Posons*

$$\alpha = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{I'(x)}{g'(x)} \quad \text{et} \quad \gamma = \inf_{0 < x < L} \frac{I'(x)}{g'(x)}$$

- (a) *Si $\beta_1 < \alpha$ alors $\gamma < \beta_1 < \alpha$ et β_1 est une valeur critique du premier ordre.*
- (b) *Si $\beta_1 = \gamma$ alors $\gamma = \beta_1 = \alpha$ et β_1 est une valeur critique du second ordre.*
- (c) *β_1 est une valeur critique du second ordre si et seulement si $m^+(\beta_1) = 0$. Dans ce cas $g''(0) > 0$ et $\beta_1 = (\sigma^2 g''(0))^{-1}$.*
- (d) *Si $g''(0) = 0$ alors β_1 est une valeur critique du premier ordre.*
- (e) *Il n'y a pas de valeurs critiques du premier ordre si et seulement si*

$$\forall x \in]0, L[, \quad \frac{I''(x)}{I'(x)} \geq \frac{g''(x)}{g'(x)}$$

- (f) *Il y a exactement une valeur critique du second ordre en $\beta_1 = (\sigma^2 g''(0))^{-1}$ et aucune autre valeur critique si et seulement si*

$$\forall x \in]0, L[, \quad \frac{I''(x)}{I'(x)} > \frac{g''(x)}{g'(x)}$$

Nous nous référons au paragraphe IV de [10] pour une démonstration. Notons que seulement dans le cas où $\gamma < \beta_1 = \alpha$ nous ne pouvons pas conclure directement sur la nature de la valeur critique β_1 .

Dans le cas où $g : x \mapsto x^2/2$, il existe une unique valeur critique en $\beta_1 = 1/\sigma^2$ et elle est du second ordre si et seulement si

$$\forall x \in]0, L[\quad \frac{1}{x} = \frac{g''(x)}{g'(x)} < \frac{I''(x)}{I'(x)}$$

Ce qui équivaut encore à

$$\forall x \in]0, L[\quad \frac{I'(x)}{x} < I''(x)$$

Cette condition est réalisée dès que I' est strictement convexe sur $[0, L[$. Comme $I' = (\Lambda')^{-1}$ sur $[0, L[$, cette condition est réalisée dès que Λ' est strictement concave sur $[0, +\infty[$. C'est notamment le cas si pour tout $t \geq 0$, $\Lambda^{(3)}(t) \leq 0$. Résumons cela dans la proposition suivante :

Proposition IV.13. *Soit ρ une loi de probabilité symétrique et non dégénérée telle que pour tout $t \geq 0$,*

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(tx^2) d\rho(x) < \infty \quad \text{et} \quad \Lambda^{(3)}(t) \leq 0$$

Alors le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé (avec ρ et $g : x \mapsto x^2/2$) présente une unique valeur critique en $\beta_1 = 1/\sigma^2$ et elle est du second ordre.

Deuxième partie :

Autour du point critique dans le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé

V Un modèle autour du point critique

Nous allons à présent introduire la notion de criticalité auto-organisée, phénomène que présentent certains systèmes physiques et dont l'analyse mathématique est très ardue. Nous allons nous inspirer du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé au point critique, présenté dans les paragraphes précédents, pour définir et étudier un modèle de type champ moyen qui pourrait présenter un phénomène de criticalité auto-organisée. Notre objectif est de montrer des théorèmes limites du point de vue probabiliste sur ce modèle, notamment nous espérons décrire des mécanismes d'interaction simples qui sont à l'origine de la criticalité auto-organisée. Nous présenterons ici un théorème limite, de type théorème central limite, dans le cas des lois gaussiennes.

1) Transitions de phase et notion de criticalité auto-organisée

Un des objectifs fondamentaux de la mécanique statistique est de comprendre le comportement collectif de particules régies par des règles simples et microscopiques. Généralement, les particules sont gouvernées par deux effets antagonistes : l'entropie et l'énergie. Les modèles intéressants présentent un phénomène de transition de phase : il existe un point critique ou une courbe critique dans l'espace des paramètres qui sépare une région où les effets de l'énergie dominent d'une région où les effets de l'entropie dominent. Le système est le plus intéressant au point critique, où les deux forces sont en concurrence. Un des modèles les plus étudiés est le modèle d'Ising. Le modèle d'Ising standard est construit sur le réseau \mathbb{Z}^d .

Dans les paragraphes précédents, nous avons observé des transitions de phase dans le cadre de la version champ moyen du modèle d'Ising - le modèle d'Ising Curie-Weiss - et ses généralisations. Nous nous sommes référés à [11] et aux articles de R.S. Ellis et C.M. Newman [12] et de R.S. Ellis et T. Eisele [10].

Le fameux article [1] de Bak, Tang et Wiesenfeld montre comment certains systèmes physiques sont naturellement attirés vers des points ou des régimes critiques. Ces systèmes présentent un phénomène appelé criticalité auto-organisée. Ce type de phénomènes peut être observé empiriquement et à l'aide de simulations informatiques, qui montrent le succès des modèles considérés. Cependant leur analyse mathématique est extrêmement ardue, et même des modèles dont la définition est apparemment simple, comme ceux décrivant la dynamique d'un tas de sable, ne sont pas bien comprises [3, 14].

Les probabilistes s'intéressent de plus en plus à ces questions. Notamment des

modèles pour les feux de forêt ont été construits à partir de processus de percolation. Egalement des modèles simples d'évolution conduisent à des situations critiques [7]. Voici une sélection de travaux sur ce sujet : [5, 6, 9, 13, 15].

2) Rappels sur le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé

Commençons par rappeler les résultats centraux sur le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé, que nous avons étudiés dans les paragraphes précédents. Ces résultats sont issus des articles [12] de R.S. Ellis et C.M. Newman et [10] de R.S. Ellis et T. Eisele :

Soit ρ une mesure de probabilité non dégénérée et symétrique vérifiant

$$\forall t \geq 0 \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(tx^2) d\rho(x) < \infty$$

Il en découle que la Log-Laplace de la loi ρ , la fonction

$$\Lambda : t \longmapsto \ln \int_{\mathbb{R}} \exp(tx) d\rho(x)$$

est finie sur \mathbb{R} , strictement positive sur \mathbb{R}^* , paire et que

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\rho(x) < \infty$$

Nous définissons la transformée de Cramér I de la loi ρ par

$$I : u \in \mathbb{R} \longmapsto \Lambda^*(u) = \sup_{t \in \mathbb{R}} (tu - \Lambda(t))$$

Il s'agit d'une fonction analytique réelle et paire sur $] -L, L[$ où

$$L = \sup \{ x \in \mathbb{R} : x \in \text{supp}(\rho) \}$$

Pour tout $\beta > 0$, nous définissons un tableau triangulaire de variables aléatoires réelles $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\mu_{n,\rho,\beta}$, où

$$d\mu_{n,\rho,\beta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n(\beta)} \exp\left(\frac{\beta}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

avec

$$Z_n(\beta) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{\beta}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

Il s'agit du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé (associé à ρ).

Alors, d'après [10], il existe $\beta_c > 0$ et \mathcal{P} un ensemble au plus dénombrable de valeurs critiques strictement supérieures à β_c et tels que :

★ Pour tout $\beta \in]0, \beta_c[$ le minimum de $x \longmapsto I(x) - \beta x^2/2$ est atteint en l'unique point 0.

★ Pour tout $\beta \in]\beta_c, \infty[\setminus \mathcal{P}$ le minimum de $x \longmapsto I(x) - \beta x^2/2$ est atteint en deux points $m(\beta) > 0$ et $-m(\beta)$.

La fonction $\beta \longmapsto m(\beta)$ est appelée fonction de magnétisation spontanée. Elle vérifie

$$\forall \beta \in]\beta_c, \infty[\setminus \mathcal{P}, \quad \beta m(\beta) = I'(m(\beta))$$

Elle est analytique réelle sur chaque intervalle ouvert de $]0, \infty[\setminus \mathcal{P}$ (mais elle n'est pas la restriction d'une fonction analytique au voisinage de β_c et des points de \mathcal{P}). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$. Sous $\mu_{n,\rho,\beta}$,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \begin{cases} \delta_0 & \text{si } \beta \in]0, \beta_c[\\ \frac{1}{2}(\delta_{-m(\beta)} + \delta_{m(\beta)}) & \text{si } \beta \in]\beta_c, \infty[\setminus \mathcal{P} \end{cases}$$

Si de plus que pour tout $x \in]0, L[$, $I'(x) < xI''(x)$, alors $\beta_c = 1/\sigma^2$, $\mathcal{P} = \emptyset$ et la fonction $\beta \mapsto m(\beta)$ se prolonge par continuité en β_c en posant $m(\beta_c) = 0$. Nous disons alors que le modèle de Curie-Weiss généralisé possède un unique point critique (du second ordre) en $\beta_c = 1/\sigma^2$. Et alors, sous μ_{n,ρ,β_c} ,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \delta_0$$

Une condition suffisante pour être dans cette situation est que pour tout $t \geq 0$, $\Lambda^{(3)}(t) \leq 0$. Il en découle le lemme suivant :

Lemme V.1. *Si $\beta \leq \beta_c$ alors pour tout $s \neq 0$*

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(sx) d\rho(x/\sqrt{\beta}) < \exp\left(\frac{s^2}{2}\right)$$

Démonstration. Soit $\beta \leq \beta_c$. La fonction $x \mapsto I(x) - \beta x^2/2$ admet alors un unique minimum en 0, c'est à dire pour tout $x \neq 0$, $I(x) > \beta x^2/2$. Donc pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $x \neq 0$, $sx - I(x) < sx - \beta x^2/2$. D'où

$$I^*(s) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \{sx - I(x)\} \leq \sup_{x \in \mathbb{R}} \{sx - \beta x^2/2\} = s^2/2\beta$$

(le supremum de droite étant atteint en $x_s = s/\beta$). Supposons qu'il existe $s_0 \neq 0$ tel que $I^*(s_0) = s_0^2/2\beta$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$s_0 x - I(x) \leq s_0 x - \frac{\beta x^2}{2} = x \left(s_0 - \frac{\beta x}{2} \right) \xrightarrow{|x| \rightarrow +\infty} -\infty$$

Ainsi la fonction $x \mapsto s_0 x - I(x)$ tend vers $-\infty$ en $+\infty$ et $-\infty$. Elle est de plus concave donc atteint son maximum en un point $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$s_0 \frac{s_0}{\beta} - \frac{\beta}{2} \left(\frac{s_0}{\beta} \right)^2 = \frac{s_0^2}{2\beta} = I^*(s_0) = s_0 x_0 - I(x_0)$$

Il y a alors deux cas :

- * Soit $x_0 = s_0/\beta \neq 0$ et alors $I(x_0) = \beta x_0^2/2$, ce qui est exclu.
- * Soit $x_0 \neq s_0/\beta$ et alors

$$s_0 x_0 - \frac{\beta x_0^2}{2} < \frac{s_0^2}{2\beta} = s_0 x_0 - I(x_0)$$

Ainsi $I(x_0) < \beta x_0^2/2$, ce qui est contradictoire.

Nous avons montré que si $\beta \leq \beta_c$ alors, pour tout $s \neq 0$, $I^*(s) < s^2/2\beta$. Or Λ est une fonction convexe semi-continue inférieurement donc $I^* = \Lambda^{**} = \Lambda$ (nous

nous référons au paragraphe VI.5 de [11] pour ce résultat). Ainsi

$$\begin{aligned}\beta \leq \beta_c &\implies \forall s \neq 0, \quad \Lambda(s) < \frac{s^2}{2\beta} \\ &\implies \forall s \neq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(sy) d\rho(y) < \exp\left(\frac{s^2}{2\beta}\right) \\ &\implies \forall s \neq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(s\sqrt{by}) d\rho(y) < \exp\left(\frac{s^2}{2}\right)\end{aligned}$$

Ce qui montre le lemme par changement de variable $x = \sqrt{\beta}y$. \square

Il découle ainsi de [12] que si $\beta < \beta_c = 1/\sigma^2$ alors, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{1 - \beta\sigma^2}\right)$$

De plus il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\lambda > 0$ tels que, sous μ_{n,ρ,β_c} ,

$$\frac{S_n}{n^{1-1/2k}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} C_{k,\lambda} \exp\left(-\lambda \frac{s^{2k}}{(2k)!}\right) ds$$

en notant $C_{k,\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda x^{2k}/(2k)!) dx\right)^{-1}$.

Ce lemme fait ainsi le lien entre l'hypothèse du théorème central de [10] ($\beta \leq \beta_c$) qui permet d'assurer que, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \delta_0$$

et l'hypothèse du théorème central de [12] ($\rho(\cdot/\sqrt{\beta})$ est une loi de probabilité strictement sous-gaussienne) qui permet d'assurer l'existence d'un théorème central limite, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$.

3) Vers un modèle champ-moyen de criticalité auto-organisée

Soit ρ une loi de probabilité non dégénérée et symétrique telle que

$$\int_{\mathbb{R}} \exp(tx^2) d\rho(x) < \infty \quad \text{et} \quad \Lambda^{(3)}(t) \leq 0$$

Notons

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\rho(x) < \infty$$

Soit $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{2n\sigma^2}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

avec

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{2n\sigma^2}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

Alors d'après le rappel précédent, il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\lambda > 0$ tels que,

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n^{1-1/2k}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} C_{k,\lambda} \exp\left(-\lambda \frac{s^{2k}}{(2k)!}\right) ds$$

en notant $C_{k,\lambda} = \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\lambda x^{2k}/(2k)!) dx\right)^{-1}$.

Nous allons modifier la loi de probabilité précédente afin d'obtenir un modèle qui présenterait un phénomène de criticalité auto-organisée : un modèle qui aurait tendance à évoluer vers un état critique, celui vers lequel évolue le modèle du paragraphe précédent quand $\beta = \beta_c = 1/\sigma^2$. Nous cherchons pour cela un contrôle automatique de β pour que β soit fonction des variables aléatoires et que, quand n tend vers $+\infty$, β converge vers la valeur critique du modèle. Partons du constat suivant : donnons-nous $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de loi ρ . La loi forte des grands nombres implique que :

$$\frac{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sigma^2 \quad \text{p.s}$$

Nous sommes donc naturellement tentés par « remplacer $n\sigma^2$ par $Y_1^2 + \dots + Y_n^2$ » dans la loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{2n\sigma^2}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

Ainsi nous allons nous intéresser au modèle défini dans la section suivante.

4) Définition du modèle

Définition V.2. Soit $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_n = \tilde{\mu}_{n,\rho}$ où

$$d\tilde{\mu}_{n,\rho}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \mathbf{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

avec

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \mathbf{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

Posons $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ et $T_n = (X_n^1)^2 + \dots + (X_n^n)^2$.

L'indicatrice dans la mesure $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ est nécessaire afin d'écartier tout problème de définition quand la loi ρ charge le point 0 : l'évènement $\{x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0\}$ peut sinon arriver avec probabilité non nulle.

Remarquons que contrairement au modèle généralisé, ce modèle est défini pour toute loi de probabilité. En effet par convexité de $x \mapsto x^2$, pour tous réels x_1, \dots, x_n ,

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = n^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 \leq Z_n \leq e^{n/2} < +\infty$. Dans notre étude, nous supposons ainsi que ρ est une loi de probabilité non dégénérée quelconque.

Notons que si $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$, nous retombons sur le modèle d'Ising Curie-Weiss classique au point critique, puisque $\sigma_n^2 = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Loi de (S_n, T_n) sous $\tilde{\mu}_n$

Commençons par expliciter de manière plus simple la loi de (S_n, T_n) sous $\tilde{\mu}_n$, qui est la quantité (correctement renormalisée) qui nous intéresse.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n}(f(S_n, T_n)) &= \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 + \cdots + x_n, x_1^2 + \cdots + x_n^2) \\ &\quad \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right) \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) \end{aligned}$$

Et puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $S_n^2(x) \leq nT_n(x)$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n}(f(S_n, T_n)) &= \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}^n} f(S_n(x), T_n(x)) \exp\left(\frac{1}{2} \frac{S_n^2(x)}{T_n(x)}\right) \\ &\quad \mathbb{1}_{\{T_n(x) > 0\}} \mathbb{1}_{\{S_n^2(x) \leq nT_n(x)\}} d\rho^{\otimes n}(x) \end{aligned}$$

Définissons alors

$$h_n : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) \exp\left(\frac{x^2}{2y}\right) \mathbb{1}_{\{y > 0, x^2 \leq ny\}}$$

Il s'agit d'une fonction mesurable bornée.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n}(f(S_n, T_n)) &= \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}^n} h_n(S_n(x), T_n(x)) d\rho^{\otimes n}(x) \\ &= \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}^n} h_n((x_1, x_1^2) + \cdots + (x_n, x_n^2)) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) \\ &= \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} h_n(z_1 + \cdots + z_n) \prod_{i=1}^n d\nu_\rho(z_i) \end{aligned}$$

où ν_ρ désigne la loi du couple (Z, Z^2) quand Z suit la loi ρ . Il s'agit d'une mesure de probabilité dans \mathbb{R}^2 . Finalement

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n}(f(S_n, T_n)) = \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}^2} h_n(z) d\nu_\rho^{*n}(z)$$

où ν_ρ^{*n} désigne le produit de convolution n fois de ν_ρ . Cela nous permet d'énoncer :

Proposition V.3. *Notons ν_ρ la loi du couple (Z, Z^2) où Z est une variable aléatoire de loi ρ . Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, le couple (S_n, T_n) a pour loi dans \mathbb{R}^2*

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{x^2}{2y}\right) \mathbb{1}_{\{y > 0, x^2 \leq ny\}} d\nu_\rho^{*n}(x, y)$$

Introduisons la fonction

$$F_n : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \begin{cases} x^2/2y & \text{si } x^2 \leq ny \text{ et } y > 0 \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, le couple (S_n, T_n) a pour loi dans \mathbb{R}^2 , $Z_n^{-1} \exp(F_n(z)) d\nu_\rho^{*n}(z)$.

VI Théorème limite pour les lois gaussiennes

Nous commençons par traiter le cas où $\rho = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ puisqu'avec cette loi il est souvent possible de faire des calculs (notamment par la méthode de résidus). Pour simplifier nous supposons que $\sigma^2 = 1$. Il s'agit dans un premier temps d'explicitier la loi ν_ρ^{*n} , que nous notons simplement ν^{*n} dans cette section. Déterminons sa fonction caractéristique Φ_n . Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Phi_n(u, v) = (\Phi_\nu(u, v))^n = \left(\mathbb{E}(e^{iuZ+ivZ^2}) \right)^n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{iux+ivx^2} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right)^n$$

Pour calculer cette quantité, énonçons quelques résultats.

Définition VI.1. La loi Gamma de paramètres $k > 0$ et $\theta > 0$, notée $\Gamma(k, \theta)$ est la loi de probabilité de densité

$$x \mapsto \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(k) \theta^k} \mathbf{1}_{x>0}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , où Γ désigne la fonction gamma définie par

$$\forall z > 0 \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$$

Définition VI.2. La fonction logarithme complexe (ou détermination principale du logarithme complexe), notée Log , est définie sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ par

$$\forall z = x + iy \in \Omega \quad \text{Log}(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2i \arctan \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right)$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $z \in \Omega$, la puissance α généralisée de z est définie par

$$z^\alpha = \exp(\alpha \text{Log}(z))$$

Proposition VI.3. Pour $k > 0$ et $\theta > 0$, la fonction caractéristique de la loi $\Gamma(k, \theta)$ est

$$u \in \mathbb{R} \mapsto (1 - \theta i u)^{-k}$$

Nous pouvons maintenant démontrer le lemme clé suivant :

Lemme VI.4. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\zeta) > 0$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx - \zeta x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\Re(\zeta)}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\zeta}\right) \left(1 + i \frac{\Im(\zeta)}{\Re(\zeta)}\right)^{-1/2}$$

Démonstration. Soient $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ et $\zeta = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\zeta) > 0$. Posons

$$\Lambda(t, \zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx - \zeta x^2/2} dx$$

Par factorisation,

$$ixt - \frac{1}{2}\zeta x^2 = -\frac{1}{2}\zeta \left(x - \frac{it}{\zeta}\right)^2 - \frac{t^2}{2\zeta} = -\frac{1}{2}\zeta \left(x - \frac{tb}{|\zeta|} - i \frac{ta}{|\zeta|}\right)^2 - \frac{t^2}{2\zeta}$$

Ainsi

$$e^{t^2/2\zeta} K(t, \zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\zeta(x-tb/|\zeta|-ita/|\zeta|)^2/2} dx$$

Le changement de variable $y = x - tb/|\zeta|$ donne

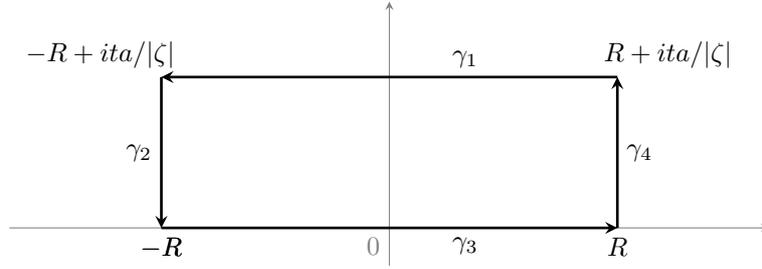
$$e^{t^2/2\zeta} K(t, \zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\zeta(y-ita/|\zeta|)^2/2} dy = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_1} e^{-\zeta z^2/2} dz$$

où la dernière intégrale désigne l'intégrale de la fonction entière $z \mapsto e^{-\zeta z^2/2}$ le long du segment γ_1 (orienté) dans le plan complexe d'extrémités $R + ita/|\zeta|$ et $-R + ita/|\zeta|$ (données dans le sens du parcours).

Nous allons donc utiliser le théorème des résidus sur le lacet γ , rectangle dans le plan complexe joignant successivement les points $R + ita/|\zeta|$, $-R + ita/|\zeta|$, $-R$ et R :

$$\int_{\gamma} e^{-\zeta z^2/2} dz = 0$$

puisque $z \mapsto \exp(-\zeta z^2/2)$ n'admet aucun pôle. Notons $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 (= \tilde{\gamma})$ et γ_4 les arêtes successives du rectangle γ .



$$\int_{\gamma_3} e^{-\zeta z^2/2} dz = \int_{-R}^R e^{-\zeta x^2/2} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\zeta x^2/2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\zeta x^2/2} dx$$

Effectuons le changement de variable $y = x^2$ sur $]0, +\infty[$:

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{+\infty} e^{-\zeta x^2/2} dx &= \int_0^{+\infty} e^{-\zeta y/2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_0^{+\infty} e^{-iby/2} e^{-ay/2} \frac{dy}{\sqrt{y}} \\ &= \sqrt{\frac{2}{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + i\frac{b}{a}\right)^{-1/2} \end{aligned}$$

puisque l'on reconnaît, au facteur normalisateur près, la fonction caractéristique de la loi Gamma de paramètres $1/2$ et $2/a$. Ensuite

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_4} e^{-\zeta z^2/2} dz \right| &= \left| \int_0^1 \exp\left(-\frac{\zeta}{2} \left(R + \frac{iat}{|\zeta|} x\right)^2\right) \frac{iat}{|\zeta|} dx \right| \\ &\leq \frac{a|t|}{|\zeta|} \int_0^1 \exp\left(-\frac{aR^2}{2} + \frac{Ratbx}{|\zeta|} + \frac{a}{2} \left(\frac{atx}{|\zeta|}\right)^2\right) dx \\ &\leq \frac{a|t|}{|\zeta|} \exp\left(-\frac{aR^2}{2} + \frac{Ra|tb|}{|\zeta|} + \frac{a}{2} \left(\frac{at}{|\zeta|}\right)^2\right) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0 \end{aligned}$$

De même

$$\int_{\gamma_2} e^{-\zeta z^2/2} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0$$

Finalement, en passant à la limite,

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + i\frac{b}{a}\right)^{-1/2} + 0 - e^{t^2/2\zeta} \Lambda(t, \zeta) + 0 = 0$$

d'où le lemme puisque $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. \square

Proposition VI.5. Si $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$ alors la fonction caractéristique Φ_n de la loi ν_ρ^{*n} est

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \exp\left(-\frac{n}{2} \left(\frac{u^2}{1-2iv} + \text{Log}(1-2iv)\right)\right)$$

Démonstration. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Posons $\zeta = 1 - 2iv \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. Alors

$$\begin{aligned} \Phi_n(u, v) &= (\Phi_\nu(u, v))^n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{iux+ivx^2} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{iux-\zeta x^2/2} dx\right)^n \end{aligned}$$

Le lemme VI.4 implique que

$$\Phi_n(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{2(1-2iv)}\right) (1-2iv)^{-1/2}\right)^n$$

Ceci est exactement la proposition. \square

Connaissant la fonction caractéristique Φ_n de la loi ν^{*n} , nous pouvons en déduire sa densité grâce à la formule d'inversion de la transformée de Fourier. Pour cela il faut d'abord vérifier que Φ_n est intégrable sous la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $(1-2iv)^{-1} = (1+2iv)/(1+4v^2)$ donc

$$\Re\left(\frac{u^2}{1-2iv} + \text{Log}(1-2iv)\right) = \frac{u^2}{1+4v^2} + \ln(\sqrt{1+4v^2})$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\Phi_n(u, v)| du dv &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{nu^2}{2(1+4v^2)}\right) (1+4v^2)^{-n/4} du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+4v^2)^{-n/4} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{nu^2}{2(1+4v^2)}\right) du\right) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+4v^2)^{-n/4} \sqrt{\frac{2\pi(1+4v^2)}{n}} dv \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{\mathbb{R}} (1+4v^2)^{-(n-2)/4} dv \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème de Fubini à la troisième intégrale. La fonction

$$v \mapsto (1 + 4v^2)^{-(n-2)/4}$$

est continue sur \mathbb{R} et intégrable au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ si et seulement si $n > 4$.

Proposition VI.6. *Si $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$ et $n \geq 5$ alors ν_ρ^{*n} admet pour densité*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\sqrt{2^n \pi n} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right)^{-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \left(y - \frac{x^2}{n}\right)^{(n-3)/2} \mathbf{1}_{x^2 < ny}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Nous venons de voir que si $n \geq 5$ alors Φ_n est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R}^2 . La formule d'inversion de Fourier implique donc que ν_ρ^{*n} admet pour densité

$$f_n : (x, y) \mapsto \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ixu - iyv} \Phi_n(u, v) du dv$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le théorème de Fubini entraîne que

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iyv}}{(1-2iv)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-ixu - \frac{nu^2}{2(1-2iv)}\right) du \right) dv \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iyv}}{(1-2iv)^{n/2}} \Lambda\left(-x, \frac{n}{1-2iv}\right) dv \end{aligned}$$

Le lemme VI.4 implique que pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Lambda\left(-x, \frac{n}{1-2iv}\right) &= \sqrt{\frac{2\pi(1+4v^2)}{n}} \exp\left(-\frac{x^2(1-2iv)}{2n}\right) (1+2iv)^{-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \exp\left(-\frac{x^2(1-2iv)}{2n}\right) \left(\frac{1+4v^2}{1+2iv}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \exp\left(-\frac{x^2(1-2iv)}{2n}\right) (1-2iv)^{1/2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-iyv - \frac{x^2(1-2iv)}{2n}\right) (1-2iv)^{-(n-1)/2} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-iv\left(y - \frac{x^2}{n}\right)\right) (1-2iv)^{-(n-1)/2} dv \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{2\pi n} \exp(x^2/2n) f_n(x, y)$ est la transformée de Fourier inverse de la loi $\Gamma((n-1)/2, 2)$ appliquée en $y - x^2/n$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{x^2}{2n}\right) f_n(x, y) &= \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{(n-1)/2} \right)^{-1} \left(y - \frac{x^2}{n}\right)^{(n-3)/2} \\ &\quad \exp\left(-\frac{y}{2} + \frac{x^2}{2n}\right) \mathbf{1}_{y > x^2/n} \end{aligned}$$

Finalement

$$f_n(x, y) = \left(\sqrt{2\pi n} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{(n-1)/2} \right)^{-1} \left(y - \frac{x^2}{n} \right)^{(n-3)/2} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \mathbf{1}_{x^2 < ny}$$

d'où la proposition. \square

Corollaire VI.7. *Si $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$ et $n \geq 5$ alors, sous $\tilde{\mu}_{n, \rho}$, le couple (S_n, T_n) a pour loi dans \mathbb{R}^2*

$$\left(Z_n \sqrt{2^n \pi n} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right)^{-1} \exp\left(\frac{x^2}{2y} - \frac{y}{2}\right) \left(y - \frac{x^2}{n} \right)^{(n-3)/2} \mathbf{1}_{x^2 < ny} dx dy$$

Démonstration. Immédiat d'après les propositions V.3 et VI.6. \square

Dans la suite nous noterons $C_n = Z_n \sqrt{2^n \pi n} \Gamma((n-1)/2)$.

Nous avons tout en main pour chercher des résultats de convergence en loi de S_n et T_n correctement renormalisées. Nous allons nous inspirer de la méthode utilisée pour le modèle d'Ising Curie-Weiss général, c'est-à-dire nous ramener au cadre d'application de la méthode de Laplace (ou du moins une variante).

Proposition VI.8. *Soit $\alpha, \beta \in]0, 1]$. Si $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$ et $n \geq 5$ alors, sous $\tilde{\mu}_{n, \rho}$, le couple $(S_n/n^\alpha, T_n/n^\beta)$ a pour loi dans \mathbb{R}^2*

$$\frac{n^{\alpha+\beta} n^{(n-3)/2}}{C_n} \exp\left(-n\psi\left(\frac{x^2}{n^{2-2\alpha}}, \frac{y}{n^{1-\beta}}\right)\right) \varphi\left(\frac{x^2}{n^{2-2\alpha}}, \frac{y}{n^{1-\beta}}\right) \mathcal{X}\left(\frac{x^2}{n^{2-2\alpha}}, \frac{y}{n^{1-\beta}}\right) dx dy$$

où \mathcal{X} est la fonction indicatrice sur l'ensemble

$$D^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x \geq 0\}$$

et ψ et φ sont les fonctions définies sur D^+ par

$$\psi : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{y} + y - \ln(y-x) \right)$$

$$\varphi : (x, y) \mapsto (y-x)^{-3/2}$$

Démonstration. Soit f une fonction mesurable bornée. Le corollaire VI.7 et le changement de variable $(x, y) \mapsto (n^\alpha x, n^\beta y)$ (de jacobien $n^{\alpha+\beta}$) impliquent que

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n} \left(f\left(\frac{S_n}{n^\alpha}, \frac{T_n}{n^\beta}\right) \right) = \frac{n^{\alpha+\beta}}{C_n} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \exp\left(\frac{n^{2\alpha-\beta} x^2}{2y} - \frac{n^\beta y}{2}\right) (n^\beta y - n^{2\alpha-1} x^2)^{(n-3)/2} \mathbf{1}_{n^{2\alpha} x^2 < n^{\beta+1} y} dx dy$$

En mettant alors $n^{(n-3)/2}$ en facteur, nous remarquons que tout ce qui est dans l'intégrale s'exprime en fonction de $x^2/n^{2-2\alpha}$ et $y/n^{1-\beta}$, faisant apparaître ainsi les fonctions ψ , φ et \mathcal{X} . \square

Nous allons maintenant étudier la fonction ψ afin de déterminer quelles valeurs de α et β choisir.

Lemme VI.9. La fonction ψ admet un unique minimum global en $(0, 1)$, avec $\psi(0, 1) = 1/2$. Elle est de classe \mathcal{C}^2 sur D^+ et vérifie :

★ Au voisinage de $(0, 1)$,

$$\psi(x, y) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x^2 + (y - 1)^2) + o(\|x, y - 1\|^2)$$

★ Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in D^+$,

$$|x| < \delta, |y - 1| < \delta \implies \psi(x, y) - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{8}(x^2 + (y - 1)^2)$$

★ $\inf \{ \psi(x, y) : |x| \geq \delta \text{ ou } |y - 1| \geq \delta \} > 1/2$

La fonction φ est bornée par 1, converge vers 1 quand (x, y) tend vers $(0, 1)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\psi(x^2, y)} \varphi(x^2, y) \mathbb{1}_{x^2 < y} dx dy < +\infty$$

Démonstration. La fonction ψ est clairement de classe \mathcal{C}^2 sur D^+ et, à $y > 0$ fixé,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y - x} \right) \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$. Donc $x \mapsto \psi(x, y)$ est strictement croissante sur $]0, y[$ et $\psi(0, y) = (y - \ln(y))/2$. Ainsi pour tout $(x, y) \in D^+$,

$$\psi(x, y) > \frac{1}{2}(y - \ln(y)) > \frac{1}{2} = \psi(0, 1)$$

avec égalité si et seulement si $(x, y) = (0, 1)$. Donc $(0, 1)$ est l'unique minimum de G . Au voisinage de $(0, 1)$,

$$\begin{aligned} \psi(x, 1 + h) &= \frac{1}{2}(-x(1 - h + o(h^2)) + 1 + h - (h - x - \frac{1}{2}(h - x)^2 + o((h - x)^2)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{h^2}{4} + \frac{x^2}{4} + o(\|x, h\|^2) \end{aligned}$$

Donc au voisinage de $(0, 1)$,

$$\psi(x, y) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x^2 + (y - 1)^2) + o(\|x, y - 1\|^2)$$

et par conséquent il existe $\delta > 0$ tel que pour $|x| < \delta$ et $|y - 1| < \delta$ dans D^+ ,

$$\psi(x, y) - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{8}(x^2 + (y - 1)^2)$$

De plus, si $|y - 1| \geq \delta$ et $x \in [0, y[$, alors

$$\psi(x, y) \geq \frac{1}{2} \min \{ 1 - \delta - \ln(1 - \delta), 1 + \delta - \ln(1 + \delta) \} > \frac{1}{2}$$

(quitte à diminuer δ , nous supposons que $\delta < 1$). Et, si $x \geq \delta$ et $y > x$, alors

$$2\psi(x, y) \geq -\frac{\delta}{y} + y - \ln(y - \delta) > \inf_{y > \delta} \left(-\frac{\delta}{y} + y - \ln(y - \delta) \right) > 1$$

puisque $\delta \neq 0$. Par conséquent

$$\inf \{ \psi(x, y) : |x| \geq \delta \text{ ou } |y - 1| \geq \delta \} > 1/2$$

Enfin la fonction φ est clairement bornée par 1, converge vers 1 quand (x, y) tend vers $(0, 1)$ et

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\psi(x^2, y)} \varphi(x^2, y) \mathbb{1}_{x^2 < y} dx dy \leq e \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy \right) < +\infty$$

où nous avons effectué le changement de variable $(x, y) \mapsto (x, y - x^2)$. \square

Ainsi, à (x, y) fixés, quand n tend vers $+\infty$,

$$\psi \left(\frac{x^2}{n^{2-2\alpha}}, \frac{y}{n^{1-\beta}} \right) - \frac{1}{2} \sim \frac{x^4}{4} n^{3-4\alpha} + \frac{n}{4} \left(\frac{y}{n^{1-\beta}} - 1 \right)^2$$

Nous sommes donc amenés à prendre $\alpha = 3/4$ et $\beta = 1$. Énonçons alors le théorème limite suivant :

Théorème VI.10. *Si $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$ alors, sous $\tilde{\mu}_{n, \rho}$,*

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{e^{-x^4/4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-y^4/4} dy} \quad \text{et} \quad \frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} 1$$

Démonstration. Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. D'après la proposition VI.8,

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n} \left(f \left(\frac{S_n}{n^{3/4}}, \frac{T_n}{n} \right) \right) = \frac{n^{7/4} n^{(n-3)/2}}{C_n} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \exp \left(-n\psi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y \right) \right) \varphi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y \right) \mathbb{1}_{\sqrt{ny} > x^2} dx dy$$

Soit δ comme dans le lemme VI.9. Posons

$$A_n = \int_{x^2 < \delta \sqrt{n}} \int_{|y-1| < \delta} f(x, y) \exp \left(-n\psi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y \right) \right) \varphi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y \right) \mathbb{1}_{\sqrt{ny} > x^2} dx dy$$

En effectuant le changement de variable $(x, y) \mapsto (x, y/\sqrt{n} + 1)$,

$$\begin{aligned} \sqrt{n} e^{n/2} A_n &= \int_{x^2 < \delta \sqrt{n}} \int_{|y| < \delta \sqrt{n}} f \left(x, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1 \right) \exp \left(-n\psi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1 \right) \right) \\ &\quad \exp \left(\frac{n}{2} \right) \varphi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1 \right) \mathbb{1}_{y + \sqrt{n} > x^2} dx dy \end{aligned}$$

D'après le lemme VI.9 et par continuité de f ,

$$\begin{aligned} n\psi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1 \right) - \frac{n}{2} &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{4} \\ f \left(x, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1 \right) \varphi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1 \right) \mathbb{1}_{y + \sqrt{n} > x^2} \mathbb{1}_{x^2 < \delta \sqrt{n}} \mathbb{1}_{|y| < \delta \sqrt{n}} &\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f(x, 1) \end{aligned}$$

De plus la fonction à l'intérieur de l'intégrale est dominée par la fonction indépendante de n et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 ,

$$(x, y) \mapsto \|f\|_\infty \exp\left(-\frac{1}{8}(x^4 + y^2)\right)$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\sqrt{n}e^{n/2}A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, 1)e^{-x^4/4}e^{-y^2/4} dx dy = \sqrt{4\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x, 1)e^{-x^4/4} dx$$

Posons ensuite $B_\delta = \{(x, y) \in D^+ : |x| < \delta, |y - 1| < \delta\}$ et

$$B_n = \int_{(x^2/\sqrt{n}, y) \in B_\delta^c} f(x, y) \exp\left(-n\psi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right)\right) \varphi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right) \mathbf{1}_{\sqrt{ny} > x^2} dx dy$$

Soit $\varepsilon = \inf\{\psi(x, y) : (x, y) \in B_\delta^c\}$,

$$|B_n| \leq e^{-(n-2)\varepsilon} \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-2\psi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right)\right) \varphi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right) \mathbf{1}_{\sqrt{ny} > x^2} dx dy$$

Le changement de variable $(x, y) \mapsto (xn^{1/4}, y)$ entraîne que

$$\sqrt{n}e^{n/2}|B_n| \leq e^{2\varepsilon} \|f\|_\infty e^{-n(\varepsilon-1/2)} n^{3/4} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\psi(x^2, y)} \varphi(x^2, y) \mathbf{1}_{x^2 < y} dx dy$$

Le lemme VI.9 assure que $\varepsilon > 1/2$ et que l'intégrale ci-dessus est finie. Ainsi $\sqrt{n}e^{n/2}B_n \underset{+\infty}{=} o(1)$. Finalement

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \exp\left(-n\psi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right)\right) \varphi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right) \mathbf{1}_{\sqrt{ny} > x^2} dx dy &= A_n + B_n \\ &\underset{+\infty}{=} \frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{4\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x, 1)e^{-x^4/4} dx + o(1) + o(1) \right) \\ &\underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4\pi}{n}} e^{-n/2} \int_{\mathbb{R}} f(x, 1)e^{-x^4/4} dx \end{aligned}$$

En prenant $f = 1$, nous avons

$$\frac{C_n}{n^{7/4}n^{(n-3)/2}} \underset{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4\pi}{n}} e^{-n/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^4/4} dx$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n} \left(f\left(\frac{S_n}{n^{3/4}}, \frac{T_n}{n}\right) \right) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x, 1) \frac{e^{-x^4/4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^4/4} du} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \left(\frac{e^{-x^4/4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^4/4} du} \otimes \delta_1(y) \right) \end{aligned}$$

Ceci est précisément le théorème. \square

Nous déduisons de ce théorème le résultat pour une gaussienne centrée de variance $\sigma^2 > 0$:

Théorème VI.11. Si $\rho = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors, sous $\tilde{\mu}_{n, \rho}$,

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{e^{-x^4/4\sigma^4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-y^4/4\sigma^4} dy} \quad \text{et} \quad \frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \sigma^2$$

Démonstration. Si X est de loi $\rho = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors les couples (X, X^2) et $(\sigma Z, \sigma^2 Z^2)$ ont même loi. Ainsi un changement de variable simple donne la densité de ν_{ρ}^{*n} (pour $n \geq 5$) par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 :

$$(x, y) \mapsto \left(\sqrt{2^n \pi n} \sigma^{n-3} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \right)^{-1} \exp\left(-\frac{y}{2\sigma^2}\right) \left(y - \frac{x^2}{n}\right)^{(n-3)/2} \mathbb{1}_{ny > x^2}$$

c'est-à-dire $(x, y) \mapsto f_n(x/\sigma, y/\sigma^2)$ où f_n est la densité pour $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$. Donc pour f continue bornée,

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n} \left(f\left(\frac{S_n}{n^{3/4}}, \frac{T_n}{n}\right) \right) = \frac{n^{7/4}}{C_n} \int_{\mathbb{R}^2} f(\sigma x, \sigma^2 y) \exp\left(\frac{\sqrt{n}x^2}{2y} - \frac{ny}{2}\right) \left(y - \frac{x^2}{n}\right)^{(n-3)/2} \mathbb{1}_{x^2 < ny} dx dy$$

D'après le théorème VI.10, cette quantité tend, quand n tend vers $+\infty$, vers

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\sigma x, \sigma^2 y) \left(\frac{e^{-x^4/4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^4/4} du} \otimes \delta_1(y) \right)$$

qui est égale, après un changement de variable, à

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \left(\frac{e^{-x^4/4\sigma^4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^4/4\sigma^4} du} \otimes \delta_{\sigma^2}(y) \right)$$

□

Annexe

A Grandes déviations

Voici quelques résultats de grandes déviations que nous avons utilisés dans les preuves. Nous nous référons à [8], [11] et [4].

Soit $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un espace topologique. On note \mathcal{B} sa tribu borélienne.

Définition A.1 (Fonction de taux).

Une fonction de taux I sur \mathcal{X} est une application $I : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ qui est semi-continue inférieurement, c'est-à-dire que, pour tout $\lambda \geq 0$, l'ensemble de niveau $\{x \in \mathcal{X} : I(x) \leq \lambda\}$ est fermé. Elle est dite bonne si de plus ces ensembles sont compacts.

Définition A.2 (Principe de grandes déviations).

* Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un suite de mesures de probabilités sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. La suite $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la fonction de taux I , avec la topologie \mathcal{T} si pour tout $A \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} -\inf \{ I(x) : x \in \overset{\circ}{A} \} &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(A) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(A) \leq -\inf \{ I(x) : x \in \bar{A} \} \end{aligned}$$

* Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un suite de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$. La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la fonction de taux I , avec la topologie \mathcal{T} si pour tout $A \in \mathcal{B}$,

$$\begin{aligned} -\inf \{ I(x) : x \in \overset{\circ}{A} \} &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}(X_n \in A) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}(X_n \in A) \leq -\inf \{ I(x) : x \in \bar{A} \} \end{aligned}$$

Remarque. Si $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations sur \mathcal{X} , de vitesse n , gouverné par la fonction de taux I alors $\inf \{ I(x) : x \in \mathcal{X} \} = 0$ (prendre $A = \mathcal{X}$ dans la définition).

Proposition A.3. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un suite de mesures de probabilités sur (E, d) , un espace métrique. On suppose que :

* $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la fonction de taux I .

* $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge étroitement vers une mesure de probabilité μ sur E .

On note F l'ensemble des minima (globaux) de I sur E . Alors F est un fermé et s'il est non vide on a $\text{supp}(\mu) \subset F$.

Remarque. Cela signifie qu'asymptotiquement la loi μ_n se concentre sur les minima de I .

Démonstration. L'ensemble des minima $F = I^{-1}(]-\infty, 0])$ est fermé car I est semi continue inférieurement. Supposons que F est non vide. Pour tout $p \geq 1$, nous posons

$$O_p = \{ x \in E : d(x, F) > 1/p \}$$

qui est un ouvert de E . L'ensemble \overline{O}_p est un fermé qui ne contient aucun minimum de I , donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(\overline{O}_p) \leq -\inf\{I(x) : x \in \overline{O}_p\} < 0$$

Ce qui entraîne que

$$\forall p \geq 1 \quad \mu_n(\overline{O}_p) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

Le théorème de Portemanteau (démontré dans [2]) implique alors que

$$0 = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(\overline{O}_p) \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mu_n(O_p) \geq \mu(O_p)$$

De plus, pour tout $p \geq 1$, $O_p \subset O_{p+1}$ et $F^c = \bigcup_{p \geq 1} O_p$ si bien que $(\mu(O_p))_{p \geq 1}$ croît vers $\mu(F^c)$. Ainsi $\mu(F^c) = 0$, ce qui signifie que $\text{supp}(\mu) \subset F$. \square

Théorème A.4 (Cramér).

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et à valeurs dans \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Définissons la Log-Laplace de X_1 par

$$\Lambda : \lambda \in \mathbb{R}^d \mapsto \ln \mathbb{E}(e^{\langle \lambda, X_1 \rangle}) \in]-\infty, +\infty]$$

puis sa transformée de Fenchel-Legendre par

$$\Lambda^* : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} (\langle \lambda, x \rangle - \Lambda(\lambda))$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\overline{X}_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ la moyenne empirique. Alors

(a) $(\overline{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations faible de vitesse n , gouverné par la fonction de taux convexe Λ^* .

(b) Si $d = 1$, $(\overline{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par Λ^* .

(c) Si Λ est finie dans un voisinage de 0, $(\overline{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la bonne fonction de taux Λ^* .

Application A.5. Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de loi $\frac{1}{2}(\delta_{-1} + \delta_1)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\overline{X}_n = (X_1 + \dots + X_n)/n$ la moyenne empirique. Alors $(\overline{X}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné

$$I : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1+x}{2} \ln(1+x) + \frac{1-x}{2} \ln(1-x)$$

Un espace topologique \mathcal{X} est dit séparé si pour tout $(x, y) \in \mathcal{X}^2$, il existe deux voisinages distincts de x et y . Il est dit régulier s'il est séparé et si pour tout fermé F de \mathcal{X} et $x \notin F$, il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $F \subset O_1$ et $x \in O_2$.

Théorème A.6 (Varadhan).

Soit \mathcal{X} un espace régulier. Soit $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un suite de mesures de probabilités sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ satisfaisant le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la bonne fonction de taux I . Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Supposons l'une des conditions suivantes réalisée :

(a) f est bornée

(b) f satisfait

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\{f(x) \geq M\}} e^{nf(x)} d\mu_n(x) = -\infty$$

Alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\mathcal{X}} e^{nf(x)} d\mu_n(x) = \sup_{x \in \mathcal{X}} (f(x) - I(x))$$

Corollaire A.7. Soit (\mathcal{X}, d) un espace métrique. Soit $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de probabilités sur (\mathcal{X}, d) satisfaisant le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la bonne fonction de taux I . Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant l'une des conditions du théorème de Varadhan. Supposons de plus que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathcal{X}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) < +\infty$$

Nous définissons la suite de probabilités $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall A \in \mathcal{B}, \mu_n(A) = \int_A e^{nf(x)} d\nu_n(x) \left(\int_{\mathcal{X}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) \right)^{-1}$$

Alors $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait le principe de grandes déviations sur \mathcal{X} de vitesse n , gouverné par la fonction de taux

$$J : x \mapsto I(x) - f(x) - \inf_{y \in \mathcal{X}} (I(y) - f(y))$$

Démonstration. (dans le cas où f est bornée) Le théorème de Varadhan implique que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\mathcal{X}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) = \sup_{\mathcal{X}} (f - I)$$

Soient A un borélien, $x \in \overset{\circ}{A}$ et $\delta > 0$. Il existe un voisinage V_x de x inclus dans A et tel que pour tout $y \in V_x$, $f(y) \geq f(x) - \delta$. Si bien que

$$\begin{aligned} \mu_n(A) &\geq \int_{V_x} e^{nf(y)} d\nu_n(y) \left(\int_{\mathcal{X}} e^{nf(y)} d\nu_n(y) \right)^{-1} \\ &\geq e^{n(f(x) - \delta)} \nu_n(V_x) \left(\int_{\mathcal{X}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) \right)^{-1} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(A) &\geq f(x) - \delta - \inf_{V_x} I - \sup_{\mathcal{X}} (f - I) \\ &\geq f(x) - I(x) - \sup_{\mathcal{X}} (f - I) - \delta = -J(x) - \delta \end{aligned}$$

En faisant tendre δ vers 0 et en optimisant en $x \in \overset{\circ}{A}$, nous obtenons la borne inférieure du principe de grandes déviations. Ensuite

$$\int_A e^{nf(y)} d\nu_n(y) \leq \int_{\mathcal{X}} \mathbf{1}_{\overset{\circ}{A}} e^{nf(y)} d\nu_n(y)$$

Soit $\alpha < \inf \{ I(x) - f(x) : x \in \bar{A} \}$ et $\Delta = \{ y \in \mathcal{X} : I(y) - f(y) \leq \alpha \}$. Comme I est une bonne fonction de taux et que f est continue bornée nous en déduisons que Δ est compact. Par conséquent $\Delta \cap \bar{A} = \emptyset$. Ainsi il existe une fonction $\varphi : \mathcal{X} \rightarrow [0, 1]$ continue valant 1 sur Δ et 0 sur \bar{A} . Soit $t \geq 0$,

$$\mathbf{1}_{\bar{A}}(x) \leq \exp(-nt\varphi(x))$$

donc

$$\int_A e^{nf(y)} d\nu_n(y) \leq \int_{\mathcal{X}} e^{n(f(y)-t\varphi(y))} d\nu_n(y)$$

Le théorème de Varadhan implique alors que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf(x)} d\nu_n(x) &\leq \sup_{x \in A} (f(x) - t\varphi(x) - I(x)) \\ &\leq \max\{-\alpha, \|f\|_\infty - t\} \end{aligned}$$

(le premier terme du max quand $x \notin \Delta$, le second quand $\xi \in \Delta$). En faisant tendre t vers $+\infty$ puis α vers $\inf \{ I(x) - f(x) : x \in \bar{A} \}$ nous obtenons :

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf(x)} d\nu_n(x) \leq \inf \{ I(x) - f(x) : x \in \bar{A} \}$$

Cette inégalité ainsi que le théorème de Varadhan appliqué au dénominateur entraînent la borne supérieur du principe de grandes déviations. \square

B Transformée de Cramér

Voici quelques résultats sur la fonction entropie d'une mesure de probabilité que nous avons utilisés dans les preuves. Nous nous référons à [11], [8] et [10].

Soit ρ une mesure de probabilité dans \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, posons

$$\Lambda(t) = \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp\langle t, x \rangle d\rho(x)$$

La fonction Λ est bien définie sur \mathbb{R}^d à valeurs dans $] -\infty, +\infty]$, appelée Log-Laplace de ρ (ou fonction d'énergie libre de ρ). Il s'agit d'une fonction convexe sur \mathbb{R}^d (d'après l'inégalité d'Hölder). Notons

$$D_\Lambda = \{ t \in \mathbb{R}^d : \Lambda(t) < +\infty \}$$

L'ensemble D_Λ est convexe et contient 0 puisque $\Lambda(0) = 0$. Si son intérieur est non vide alors Λ est différentiable (et même analytique réelle) sur $\overset{\circ}{D}_\Lambda$. Nous définissons ensuite la transformée de Cramér de ρ par

$$I : u \in \mathbb{R}^d \mapsto \Lambda^*(u) = \sup_{t \in \mathbb{R}^d} (\langle t, u \rangle - \Lambda(t))$$

Il s'agit de la transformée de Fenchel-Legendre de Λ .

Commençons par quelques propriétés générales de I :

Proposition B.1. (a) $I = \Lambda^*$ est une fonction de taux convexe.

(b) Si Λ est finie dans un voisinage de 0 (c'est-à-dire $0 \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$) alors I est une bonne fonction de taux.

(c) Si $t \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$ et $u = \nabla \Lambda(t)$ alors $I(u) = \langle t, u \rangle - \Lambda(t)$.

(d) Si ρ admet un moment d'ordre 1, alors $I(m) = 0$ où

$$m = \int_{\mathbb{R}^d} x d\rho(x)$$

Notons que dans la partie A de l'annexe (théorème de Cramér) nous avons fait le lien entre $I = \Lambda^*$ et les grandes déviations de $(X_1 + \dots + X_n)/n$ où $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées à valeurs dans \mathbb{R}^d .

Donnons à présente des propriétés de I dans le cas où $d = 1$ et $D_\Lambda = \mathbb{R}$. La proposition précédente implique alors que I est une bonne fonction de taux et que Λ est analytique réelle sur \mathbb{R} . Un calcul simple donne que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\Lambda''(t) = \mathbb{E}(W_t^2) - \mathbb{E}(W_t)^2 = \mathbb{E}((W_t - \mathbb{E}(W_t))^2) > 0$$

où W_t est une variable aléatoire de loi de densité $y \mapsto \exp(ty - \Lambda(t))$ par rapport à ρ . Ceci implique la stricte croissante de Λ' . Il s'agit du point de départ de la démonstration des propriétés suivantes (cf. [11] pour la preuve) :

Proposition B.2. *Supposons que $d = 1$ et que $D_\Lambda = \mathbb{R}$. Notons*

$$K = \inf \{ x \in \mathbb{R} : x \in \text{supp}(\rho) \} \quad \text{et} \quad L = \sup \{ x \in \mathbb{R} : x \in \text{supp}(\rho) \}$$

La non-dégénérescence de ρ implique que $L \neq K$ et que

$$m = \int_{\mathbb{R}} x d\rho(x) \in]K, L[$$

Nous avons les propriétés suivantes :

(a) I est une bonne fonction de taux convexe.

(b) Λ' est une bijection de \mathbb{R} sur $]K, L[$.

(c) Notons $r = (\Lambda')^{-1}$. Il s'agit d'une fonction analytique réelle sur \mathbb{R} , strictement croissante et pour tout $u \in]K, L[$,

$$I(u) = ur(u) - \Lambda(r(u))$$

Si bien que I est une fonction analytique réelle sur $]K, L[$.

(d) Si $u \notin [K, L]$ alors $I(u) = +\infty$. De plus pour $\alpha \in \{K, L\}$, $I(\alpha) < +\infty$ si et seulement si $\rho(\{\alpha\}) > 0$ et dans ce cas $I(\alpha) = -\ln \rho(\{\alpha\})$.

(e) Pour $\alpha \in \{K, L\}$,

$$\lim_{u \rightarrow \alpha} |I'(u)| = +\infty$$

(f) I' est une bijection de $]K, L[$ dans Λ et $(I')^{-1} = \Lambda'$.

(g) $I(m) = 0$ et I est strictement croissante (resp. décroissante) sur $[m, L[$ (resp. $]K, m]$).

(h) $I'(m) = 0$ et $I''(m) = 1/\Lambda''(0) = 1/(\sigma^2 - m^2)$ où

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}} x^2 d\rho(x)$$

(i) Si ρ est symétrique alors I est paire, $K = -L$ et $m = 0$.

Références

- [1] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality : An explanation of $1/f$ noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59 :381–384, 1987.
- [2] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics : Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.
- [3] Xavier Bressaud and Nicolas Fournier. On the invariant distribution of a one-dimensional avalanche process. *Ann. Probab.*, 37(1) :48–77, 2009.
- [4] Raphaël Cerf. *On Cramér’s theory in infinite dimensions*, volume 23 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, 2007.
- [5] Kim Christensen and Nicholas R. Moloney. *Complexity and criticality*, volume 1 of *Imperial College Press Advanced Physics Texts*. Imperial College Press, 2005.
- [6] Donald A. Dawson. Critical dynamics and fluctuations for a mean-field model of cooperative behavior. *J. Statist. Phys.*, 31(1) :29–85, 1983.
- [7] Jan De Boer, Bernard Derrida, Henrik Flyvbjerg, Andrew D. Jackson, and Tilo Wettig. A simple model of self-organized biological evolution. *Phys. Rev. Lett.*, (73) :906–909, 1994.
- [8] Amir Dembo and Ofer Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, 2010.
- [9] Deepak Dhar. Theoretical studies of self-organized criticality. *Phys. A*, 369(1) :29–70, 2006.
- [10] Theodor Eisele and Richard S. Ellis. Multiple phase transitions in the generalized Curie-Weiss model. *J. Statist. Phys.*, 52(1-2) :161–202, 1988.
- [11] Richard S. Ellis. *Entropy, large deviations, and statistical mechanics*. Classics in Maths. Springer-Verlag, 2006.
- [12] Richard S. Ellis and Charles M. Newman. Limit theorems for sums of dependent random variables occurring in statistical mechanics. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 44(2) :117–139, 1978.
- [13] Bernard Gaveau and Lawrence S. Schulman. Fluctuations in mean-field self-organized criticality. *J. Statist. Phys.*, 74(3-4) :607–630, 1994.
- [14] Antal A. Járai and Frank Redig. Infinite volume limit of the abelian sand-pile model in dimensions $d \geq 3$. *Probab. Theory Related Fields*, 141(1-2) :181–212, 2008.
- [15] Balázs Ráth and Bálint Tóth. Erdős-Rényi random graphs + forest fires = self-organized criticality. *Electron. J. Probab.*, 14 :no. 45, 1290–1327, 2009.
- [16] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., third edition, 1987.