

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE 142 : MATHÉMATIQUES DE LA RÉGION PARIS-SUD
LABORATOIRE DE MATHÉMATIQUES D'ORSAY (UMR 8628)

THÈSE DE DOCTORAT

MATHÉMATIQUES

par

Matthias GORNY

Un modèle d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée

Date de soutenance : 08/06/2015

Rapporteurs : M. Paolo DAI PRA Professeur (Universita Di Padova)
M. Giambattista GIACOMIN Professeur (Université Paris Diderot)

Composition du jury :

Président du jury : M. Arnaud LE NY Professeur (Université Paris-Est Créteil)
Directeur de thèse : M. Raphaël CERF Professeur (Université Paris Sud)
Rapporteur : M. Giambattista GIACOMIN Professeur (Université Paris Diderot)
Examineurs : M. Francis COMETS Professeur (Université Paris Diderot)
M. Thomas DUQUESNE Professeur (Université Pierre et Marie Curie)

Thèse préparée au



Département de Mathématiques d'Orsay
Laboratoire de Mathématiques (UMR 8628), Bât. 425
Université Paris-Sud 11
91405 Orsay CEDEX

Résumé

Un modèle d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée. Dans leur célèbre article de 1987, les physiciens Per Bak, Chao Tang et Kurt Wiesenfeld ont montré que certains systèmes complexes, composés d'un nombre important d'éléments en interaction dynamique, évoluent vers un état critique, sans intervention extérieure. Ce phénomène, appelé criticalité auto-organisée, peut être observé empiriquement ou simulé par ordinateur pour de nombreux modèles. Cependant leur analyse mathématique est très ardue. Même des modèles dont la définition est apparemment simple, comme les modèles décrivant la dynamique d'un tas de sable, ne sont pas bien compris mathématiquement. Le but de cette thèse est la construction d'un modèle de criticalité auto-organisée, qui est aussi simple que possible, et qui est accessible à une étude mathématique rigoureuse. Pour cela, nous modifions le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé en introduisant un contrôle automatique du paramètre de température. Pour une classe de distributions symétriques satisfaisant une certaine condition d'intégrabilité, nous montrons que la somme S_n des variables aléatoires du modèle a le comportement typique du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé critique : les fluctuations sont d'ordre $n^{3/4}$ et la loi limite est $C \exp(-\lambda x^4) dx$, où C et λ sont des constantes strictement positives. Notre étude nous a menés à généraliser ce modèle dans plusieurs directions : cas de la dimension supérieure, fonctions d'interactions plus générales, extension à des auto-interactions menant à des fluctuations d'ordre $n^{5/6}$. Nous étudions aussi des modèles dynamiques dont la distribution invariante est la loi de notre modèle d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée.

Mots clés : Ising Curie-Weiss, criticalité auto-organisée, méthode de Laplace, grandes déviations, transformée de Cramér, diffusion de Langevin.

Abstract

A Curie-Weiss model of self-organized criticality. In their famous 1987 article, Per Bak, Chao Tang and Kurt Wiesenfeld showed that certain complex systems, composed of a large number of dynamically interacting elements, are naturally attracted by critical points, without any external intervention. This phenomenon, called self-organized criticality, can be observed empirically or simulated on a computer in various models. However the mathematical analysis of these models turns out to be extremely difficult. Even models whose definition seems simple, such as the models describing the dynamics of a sandpile, are not well understood mathematically. The goal of this thesis is to design a model exhibiting self-organized criticality, which is as simple as possible, and which is amenable to a rigorous mathematical analysis. To this end, we modify the generalized Ising Curie-Weiss model by implementing an automatic control of the inverse temperature. For a class of symmetric distributions whose density satisfies some integrability conditions, we prove that the sum S_n of the random variables behaves as in the typical critical generalized Ising Curie-Weiss model: the fluctuations are of order $n^{3/4}$ and the limiting law is $C \exp(-\lambda x^4) dx$ where C and λ are suitable positive constants. Our study led us to generalize this model in several directions: the multidimensional case, more general interacting functions, extension to self-interactions leading to fluctuations with order $n^{5/6}$. We also study dynamic models whose invariant distribution is the law of our Curie-Weiss model of self-organized criticality.

Keywords: Ising Curie-Weiss, self-organized criticality, Laplace's method, large deviations, Cramér transform, Langevin diffusion.

Remerciements

"I get by with a little help from my friends."

John Lennon & Paul McCartney

Cette citation de mes auteurs-compositeurs préférés résume parfaitement mon état d'esprit à ce moment particulier dans la rédaction d'un manuscrit de thèse où l'on écrit ses remerciements. En effet cette aventure épique qu'est la réalisation d'une thèse n'aurait sans doute pas été possible sans l'aide précieuse de mes amis/collègues/mentors/professeurs et de ma famille. Je souhaite rendre hommage à toutes ces personnes dans les "quelques" lignes à venir.

Pour commencer, je tiens à exprimer ma plus profonde gratitude à *Raphaël Cerf* pour avoir encadré idéalement ma thèse. Jour après jour, il a su faire grandir mon goût pour la recherche grâce à ses encouragements perpétuels, sa grande pédagogie, son enthousiasme à toute épreuve et surtout ses suggestions mathématiques inépuisables. Tout en m'accordant beaucoup d'indépendance, il s'est montré disponible et à l'écoute dès que j'avais besoin de son aide. J'ai adoré nos longues discussions (mathématiques ou non) lors de nos rencontres hebdomadaires ou chez lui avec sa famille très accueillante. Je veux lui dire toute mon admiration et tout le plaisir que j'ai eu de collaborer avec lui pendant ces trois années sur ce sujet qui m'a tant passionné.

Je remercie chaleureusement *Paolo Dai Pra* et *Giambattista Giacomin* de m'avoir fait l'honneur d'être les rapporteurs de ma thèse. Leurs travaux respectifs m'ont permis d'apprendre beaucoup de choses sur les problèmes de martingale et les convergences de processus de diffusion de type champ-moyen. Le douzième chapitre de ma thèse leur doit beaucoup.

Un grand merci à *Arnaud Le Ny* de m'avoir choisi en 2012 pour l'épauler dans ses enseignements à l'IUT de Sceaux. Il m'a accordé une grande confiance en me laissant beaucoup de liberté dans mes cours, et en me demandant de concevoir des sujets d'examen (véritable aubaine pour tout jeune enseignant désireux de s'investir dans ses cours). Il m'a depuis témoigné régulièrement tout son soutien et je suis ravi aujourd'hui de sa présence dans mon jury de thèse.

Je remercie aussi *Francis Comets* (dont les travaux ont eu également un rôle important pour l'étude du modèle dynamique de ma thèse) et *Thomas Duquesne* d'avoir accepté de faire partie du jury.

Merci à *S.R.S. Varadhan* pour son aide précieuse dans la preuve du cas général du théorème principal de cette thèse. Ce fut un très grand honneur de collaborer directement avec lui.

J'en viens maintenant aux rencontres décisives qui ont façonné mon orientation : ces professeurs de mathématiques ayant su me transmettre leur passion pour leur matière. Je pense particulièrement à *Patrick Lobry* et *Raymond Jozwiak*, mes professeurs de Seconde et Terminale dont les qualités mathématiques, pédagogiques et humaines sont clairement à l'origine de mon amour pour les maths et leur enseignement. Tous les deux ont continué de marquer mes études après le lycée : *Raymond Jozwiak* m'a offert tous ses livres de maths (véritable mine d'or) à son départ en retraite et *Patrick Lobry* m'a accueilli trois semaines en 2009 dans ses classes pour un stage d'observation (pendant lequel j'ai eu l'occasion d'encadrer mes premiers TDs). Pour tout cela je tiens à leur exprimer à tous les deux ma profonde gratitude. Je remercie aussi *Frédéric Degaille* qui m'a également accueilli dans ses classes en 2009 et avec qui les discussions sur la carrière en mathématiques ont toujours été très enrichissantes.

Depuis, ma passion pour les maths a été nourrie par de nombreux enseignants. Je tiens donc à remercier mes professeurs de prépa *Catherine Delcourt* et *Dominique Mallet* ainsi que les nombreux enseignants-chercheurs du laboratoire de mathématiques d'Orsay et de l'ENS Cachan dont j'ai eu le plaisir de suivre les cours pendant quatre ans. Parmi eux, je tiens à mettre en avant (encore une fois!!) l'influence de *Raphaël Cerf* puisque c'est suite à son cours de M1 que j'ai décidé de me tourner vers les Probabilités.

J'ai eu ensuite la chance de préparer ma thèse au département de mathématiques de l'Université Paris Sud et au DMA de l'ENS Paris, entouré d'une équipe très accueillante. Je remercie *Catherine Ardin, Bénédicte Auffray, Valérie Blandin-Lavigne, Zaïna Elmir, Sophie Havard, Albane Trémeau* et *Laurence Vincent* qui m'ont considérablement aidé, avec efficacité et gentillesse, dans toutes les démarches administratives que j'ai du entreprendre pendant ces trois années. Je remercie aussi *Yves Misiti* pour m'avoir expliqué comment faire tourner des programmes informatiques sur le cluster d'Orsay.

Pendant deux ans à l'ENS, j'ai eu l'immense plaisir de travailler ma thèse dans une superbe ambiance aux côtés de doctorants et jeunes docteurs : merci à *Joseba*, mon petit frère de thèse, *Ilaria, Bastien*, mon consultant EDS officiel, *Igor, Clément, Shen, Oriane* et *Yichao*. Je remercie aussi *Bénédictte, Vincent* et *Jérémie* du passage vert, ainsi que tous les autres membres du DMA avec qui j'ai eu le plaisir de discuter pendant les pauses café. Je n'oublie pas les doctorants d'Orsay et d'ailleurs avec qui j'ai partagé des discussions passionnantes et enrichissantes ou simplement des bons moments : merci à *Elodie* qui rigole toujours à mes blagues, ainsi que *Céline, Cyril, Pierre, Valérie, Vincent(s), Célia, Emilien, Jean, Loïc, Maud, Christèle, Maxime, Tony* et ceux que j'aurais malencontreusement oubliés¹.

Un grand merci à *Valentine, Sara* et *Arnaud* avec qui j'ai eu le grand plaisir de collaborer dans mes services d'enseignements à Jourdan et à l'IUT de Sceaux.

Je remercie *Marie*, ma grande sœur de thèse, d'avoir pensé à moi pour parler aux journées MAS de Toulouse aux côtés de professionnels de mécanique statistique, et aussi pour tous ses très bons conseils. Merci aussi à *Francesca* pour ses sympathiques visites à l'ENS et pour nos longues conversations sur un certain article qui nous a donné à tous les deux des sueurs froides.

Je remercie ceux qui, parmi mes amis les plus chers, ont été mes compagnons de route pendant mes six années d'étude avant la thèse. Je pense bien sûr à *Bastien* qui m'a supporté pendant cinq ans sur les bancs du lycée et de la prépa, au petit groupe d'Orsay *Antonin, Benoît, Cédric, J-B* et *Romain*, et enfin à *Damien* et *Matthieu*. J'en profite aussi pour dire un grand merci à mes amis du 64, *Lucile, Pierre-Alexandre "PtitDeyrisk"* et *Raphaël "Puigstou"* qui m'ont permis de décompresser (presque) tous les soirs de la semaine après les cours pendant trois ans.

Et puis il y a tous les autres, ceux qui n'ont pas directement influencé ma thèse mais qui sont nécessaires à mon équilibre. Je tiens ainsi à remercier tous mes amis que je n'ai pas encore cités plus haut : *Edouard, Lucile, Nicolas, Clément R., Violette, Michel, Eric, Pato, Magali, Agnès, Carole, Marine, Julien, Clément G., Marianne, Amandine, Fred* et *Antoine*. Pour leur amour, leur présence et leur soutien sans failles, je remercie infiniment mes petites sœurs chéries *Elise, Marina* et *Clémentine*, mes grands-parents *Bluette, Claude, Thérèse* et *Robert*, et aussi *Nils, Elora, Nathalie, Jean-Marie, Emmanuel, Claudine, Daniel, Jean* et *Jazzy*. Je remercie aussi mes frères d'alliance *Ugo* et *Thomas* et mes beaux-parents *Anne* et *Ludovic* qui m'ont démontré à maintes reprises que je faisais partie de leur famille. Pour les mêmes raisons, merci à *Laure, Annick* et *Fabrice*.

Je remercie de tout cœur mes parents, *Bernadette* et *Eric*, pour tout l'amour et le bonheur qu'ils m'apportent depuis toujours et pour m'avoir appris notamment à être curieux et ouvert d'esprit. Même si, étant tous les deux historiens de formation, ils auraient probablement préféré que je fasse une thèse sur les chevaliers paysans de l'an mil au lac de Paladru, je les remercie chaleureusement de m'avoir depuis toujours soutenu dans la voie des mathématiques, de leur enseignement et, plus récemment, de la recherche. Ils ont toujours cru en moi et m'ont encouragé à viser toujours plus haut dans mes études, même dans les moments de découragement.

Je remercie enfin tout particulièrement ma femme *Eve*. A ses côtés, je me sens l'homme le plus chanceux et heureux du monde et je sais que ma thèse doit beaucoup à l'amour qu'elle me donne et à son immense soutien.

1. ... mais qui seront assurément rajoutés dans une prochaine version du manuscrit.

**Un modèle d'Ising Curie-Weiss
de criticalité auto-organisée**

Table des matières

Chapitre I	Introduction	13
1	La criticalité auto-organisée	14
a)	Auto-organisation	14
b)	Criticalité	14
c)	Criticalité auto-organisée : exemple du tas de sable	14
d)	Difficultés mathématiques : problématique de thèse	16
2	Le modèle d'Ising Curie-Weiss	16
a)	Un modèle expliquant le ferromagnétisme	16
b)	Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé	19
3	Un modèle d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée	20
a)	Vers un modèle champ moyen de criticalité auto-organisée	20
b)	Définition du modèle	21
c)	Théorèmes limites principaux	22
d)	Un modèle alternatif	25
e)	Extension du modèle à des fonctions d'interaction plus générales	26
f)	Généralisation du modèle en dimension $d > 1$	27
4	Une auto-interaction menant à des fluctuations d'ordre $n^{5/6}$	28
5	Un modèle dynamique de criticalité auto-organisée	29
a)	Un modèle dynamique à temps discret	29
b)	Un modèle dynamique à temps continu	30
Chapitre II	Le cas Gaussien	33
6	Loi de (S_n, T_n) sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	33
7	Calcul de la densité de ν_ρ^{*n} dans le cas gaussien	34
8	Preuve du théorème I.3 dans le cas gaussien	38
Chapitre III	La transformée de Cramér	43
9	Une approche basée sur la théorie des grandes déviations	43
a)	Le théorème de Cramér en dimension finie	43
b)	Grandes déviations pour $(S_n/n, T_n/n)$ et heuristiques	45
10	Résultats généraux sur la transformée de Cramér	46
a)	Définitions et premières propriétés	46
b)	Non-dégénérescence d'une mesure de probabilité	47
c)	Points réalisant le supremum définissant la transformée de Cramér	48
d)	Comportement de la transformée de Cramér J sur ∂D_J	51
e)	Régularité de la transformée de Cramér	54
f)	Relation asymptotique entre densité et transformée de Cramér	56

Chapitre IV	Etude de la fonction $I - F$	65
11	Minimum de $I - F$ sur Δ^*	66
	a) Domaine admissible de I	66
	b) Cas d'une loi de Bernoulli	67
	c) Cas où Λ est steep	67
	d) Cas général	71
	e) Preuve alternative de la proposition IV.1	73
	f) Et si ρ n'est pas symétrique?	74
12	Une inégalité exponentielle pour les lois symétriques	75
13	Développement de $I - F$ au voisinage de $(0, \sigma^2)$	78
Chapitre V	Théorèmes limites pour le modèle de Curie-Weiss de SOC	83
14	La loi des grands nombres sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	83
	a) Autour du lemme de Varadhan	83
	b) Preuve du théorème I.2	89
15	Convergence de $S_n/n^{3/4}$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ dans le cas des mesures à densité	89
	a) Application du théorème III.17 à la loi ν_ρ	89
	b) Preuve du théorème I.3 dans le cas des lois à densité	91
Chapitre VI	Approximation de Laplace et condition de Cramér	97
16	La condition de Cramér	98
17	Un théorème central limite général	104
	a) Enoncé	104
	b) Démonstration	106
	c) Autour des hypothèses VI.5	111
18	Application au modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC	112
	a) Preuve du théorème I.3 dans le cas où ρ satisfait la condition de Cramér	112
	b) Preuve du théorème I.6	114
	c) Condition suffisante pour que ρ vérifie la condition de Cramér	116
Chapitre VII	Convergence en loi de $S_n/(n^{1/4}\sqrt{T_n})$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	117
Chapitre VIII	Etude de la mesure empirique	121
19	Etude des mesures empiriques	121
	a) Mesure empirique associée au modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé	122
	b) Mesure empirique associée au modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC	124
20	Une inégalité pour l'entropie relative	125
21	Preuve de la convergence de M_n sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	126
	a) Prolongement de \mathcal{F} à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et inégalité $H(\cdot \rho) \geq \mathcal{F}$	126
	b) Semi-continuité supérieure de \mathcal{F} sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$	127
	c) Convergence en probabilité de M_n sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	131

Chapitre IX	Généralisation à la dimension supérieure	133
22	Un premier modèle en dimension supérieure	134
	a) Définition d'un modèle	134
	b) Etude de $I - F$	135
	c) Conclusion	136
23	Modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé en dimension supérieure	137
	a) Définition	137
	b) Transformation de Hubbard-Stratonovich	137
	c) Théorèmes limites dans le cas où $\Sigma^{-1} - B$ est symétrique définie positive	140
	d) Théorèmes limites dans le cas où $B = \Sigma^{-1}$	142
24	Modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC en dimension supérieure	145
	a) Définition du modèle	145
	b) Grandes déviations pour $(S_n/n, T_n/n)$	147
	c) Minimum de $I - F$	148
	d) Convergence de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	150
25	Convergence en loi de $T_n^{-1/2} S_n/n^{1/4}$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	152
	a) Enoncé	152
	b) Démonstration du théorème IX.15	153
	c) Fluctuations de S_n sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ en dimension $d \geq 2$	157
Chapitre X	Tuer le terme en x^4	159
26	Construction d'un modèle	160
	a) Un nouveau terme d'interaction	160
	b) Cas d'une loi de Bernoulli	161
	c) Vers un théorème limite	162
27	Développement de I_\bullet au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$	164
	a) Régularité de I_\bullet	164
	b) Aide aux calculs	165
	c) Calcul des termes du développement	168
	d) Développement de $I_\bullet - F - R$: Mise en évidence d'un problème	176
28	A la recherche d'un terme d'interaction	178
	a) Critères de construction	178
	b) Autour du lemme de Varadhan	180
	c) Un candidat	183
29	Une auto-interaction menant à des fluctuations d'ordre $n^{5/6}$	184
	a) Théorème limite général	184
	b) Cas où ρ admet une densité	186
30	Tuer le terme en $x^6, x^8, \dots, x^{2k}, \dots$	190
Chapitre XI	Un modèle dynamique à temps discret	193
31	Une chaîne de Markov dont la loi stationnaire est une mesure de Gibbs	194
	a) Le principe de la dynamique de Metropolis	194
	b) Cas général	195
	c) Convergences de suites de chaînes de Markov	198

32	Dynamique de Glauber pour le modèle d'Ising Curie-Weiss	200
a)	Définition du modèle	200
b)	Loi des grands nombres	201
c)	Fluctuations	203
33	Dynamique de Glauber pour le modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC	207
a)	Définition du modèle	207
b)	Etude du cas où ρ charge quatre points	209
34	Simulations	215
Chapitre XII Un modèle dynamique à temps continu		217
35	Une diffusion de Langevin pour un modèle champ moyen	218
a)	La diffusion de Langevin	218
b)	Dynamiques critiques et fluctuations pour un modèle champ moyen	220
36	Une diffusion de Langevin pour le modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC	222
a)	Définition du modèle d'Ising Curie-Weiss dynamique de SOC	222
b)	Convergence de $M_n(\cdot, \cdot)$	224
c)	Générateur de $U_n(\cdot, \cdot)$	227
d)	L'opérateur \mathcal{L}	229
e)	Convergence de $\langle \Phi_0, U_n(\cdot, \cdot) \rangle$	232
f)	Conjecture pour les fluctuations de $U_n(\cdot, \cdot)$	235
37	Un modèle d'Ising Curie-Weiss dynamique de SOC : le cas Gaussien	236
a)	Préliminaires	236
b)	Générateur de $S_n(\sqrt{n} \cdot)$ et perturbations	237
c)	Théorème de fluctuations	240
d)	Effondrement de processus	241
e)	Preuve du théorème XII.9	241
Annexe		251
A	Résultats sur le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé	251
1)	Preuve du théorème I.1	251
2)	Estimation de la variance	258
B	Quelques résultats de grandes déviations	259
1)	Fonctions semi-continues	259
2)	Principe de grandes déviations	260
3)	Le lemme de Varadhan et ses conséquences	261
4)	Le théorème de Cramér en dimension finie	265
5)	Le théorème de Sanov	265
Index		266
Bibliographie		268

Chapitre I

Introduction

Sommaire

1	La criticalité auto-organisée	14
a)	Auto-organisation	14
b)	Criticalité	14
c)	Criticalité auto-organisée : exemple du tas de sable	14
d)	Difficultés mathématiques : problématique de thèse	16
2	Le modèle d’Ising Curie-Weiss	16
a)	Un modèle expliquant le ferromagnétisme	16
b)	Le modèle d’Ising Curie-Weiss généralisé	19
3	Un modèle d’Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée	20
a)	Vers un modèle champ moyen de criticalité auto-organisée	20
b)	Définition du modèle	21
c)	Théorèmes limites principaux	22
d)	Un modèle alternatif	25
e)	Extension du modèle à des fonctions d’interaction plus générales	26
f)	Généralisation du modèle en dimension $d > 1$	27
4	Une auto-interaction menant à des fluctuations d’ordre $n^{5/6}$	28
5	Un modèle dynamique de criticalité auto-organisée	29
a)	Un modèle dynamique à temps discret	29
b)	Un modèle dynamique à temps continu	30

Certains systèmes, composés d’un nombre important d’éléments en interaction dynamique, évoluent vers un état critique, sans intervention extérieure et sans paramètre de contrôle. L’amplification d’une petite fluctuation interne peut mener à un état critique et provoquer une réaction en chaîne menant à une catastrophe, c’est-à-dire à un changement de comportement du système. Ce phénomène est appelé criticalité auto-organisée – Self-Organized Criticality (SOC) en anglais. Cette notion a été introduite en 1987 dans le célèbre article de Per Bak, Chao Tang et Kurt Wiesenfeld [5].

Malgré le succès de la modélisation informatique de ces systèmes, leur analyse mathématique est très ardue. C’est pourquoi nous allons construire et étudier un modèle « simple » de type champ moyen et présentant un tel comportement. Nous espérons ainsi améliorer la compréhension mathématique de la criticalité auto-organisée.

1 La criticalité auto-organisée

Commençons par expliquer plus précisément la notion de criticalité auto-organisée.

a) Auto-organisation

Le terme d'auto-organisation désigne la capacité des éléments d'un système à produire et maintenir une structure à l'échelle du système sans que cette structure apparaisse au niveau de ses composantes et sans qu'elle résulte de l'intervention d'un agent extérieur, et ce même si le système est ouvert sur son environnement. C'est un processus d'organisation dans lequel l'organisation émergente ne provient que de l'interaction de ses éléments.

Ce type de phénomènes s'observe aussi bien dans les sociétés animales (organisation de fourmilière, de vols d'oiseaux) que dans les systèmes géographiques (les réseaux urbains) ou dans les sociétés humaines (applaudissement, panique collective, intention de vote). Par exemple, dans le cas d'un mouvement de panique dans un groupe de personnes, l'auto-organisation n'est pas le fruit d'une intention prédéterminée, il n'y a pas de leader. Chaque personne, prise à part, semble agir de façon désorganisée, mais en fonction des autres. Sans le savoir, et par imitation, ces personnes (en interaction) vont créer une forme particulière d'organisation.

Une caractéristique essentielle des systèmes auto-organisés est l'émergence et le maintien d'un ordre global sans qu'il y ait un chef d'orchestre. Cette auto-organisation signifie que l'on ne peut pas observer les mêmes propriétés aux niveaux microscopiques et macroscopiques : d'un désordre local naît un ordre global.

b) Criticalité

La criticalité caractérise les systèmes qui changent de phase, par exemple le passage de l'eau liquide à la glace ou à la vapeur, de la panique individuelle à la panique collective, de la mémoire du champ magnétique à l'absence de mémoire pour un aimant. Un tel système devient critique quand tous ses éléments s'influencent mutuellement.

Des transitions de phases et des états critiques interviennent notamment en mécanique statistique, dont l'un des objectifs fondamentaux est de comprendre le comportement collectif de particules régies par des règles simples et microscopiques. Généralement, les particules sont gouvernées par deux effets antagonistes : l'entropie et l'énergie. Les modèles intéressants présentent un phénomène de transition de phase : il existe un point critique (ou plusieurs) ou une courbe critique dans l'espace des paramètres qui sépare une région où les effets de l'énergie dominent d'une région où les effets de l'entropie dominent. Le système devient critique quand ces deux effets se compensent, sont en concurrence.

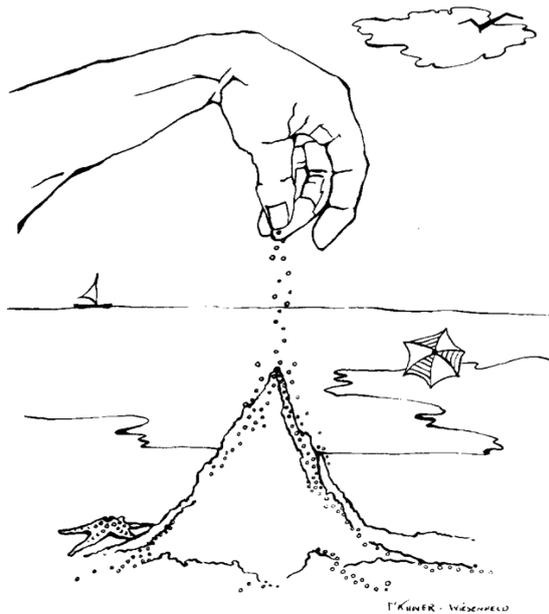
c) Criticalité auto-organisée : exemple du tas de sable

Jusqu'au début des années 80, le monde scientifique considérait que les phénomènes dits critiques étaient des phénomènes qui apparaissaient dans des circonstances exceptionnelles contrôlées par un paramètre extérieur. Par exemple, les phénomènes critiques autour des transitions de phase de l'eau ne sont observables que si la température est proche de la température critique : pour faire bouillir de l'eau, il faut la porter exactement à 100 degrés. En 1987, les physiciens Per Bak, Chao Tang et Kurt Wiesenfeld ont mis en évidence dans [5] des phénomènes qui possèdent spontanément certaines caractéristiques des phénomènes critiques sans qu'apparemment il y ait besoin d'ajuster les conditions extérieures. C'est pour cette raison qu'ils ont été appelés phénomènes de criticalité auto-organisée.

Typiquement un système présentant le phénomène de criticalité auto-organisée est un système admettant un ou plusieurs états critiques qui sont atteints suite aux interactions dynamiques

entre ses composantes et non à une perturbation extérieure. Lorsque cet état critique est atteint, le système peut bifurquer, c'est-à-dire qu'il change brutalement de comportement pour passer d'un attracteur à un autre.

L'archétype de la criticalité auto-organisée est le modèle du tas de sable, qui est l'exemple traité dans l'article [5]. Il sert de modèle évolutif pour toute une classe de phénomènes dits auto-organisés comme, par exemple, les mécanismes qui organisent l'apparition des tremblements de terre pris dans leur globalité ou l'évolution phylogénique des espèces vivantes, les embouteillages ou encore le rythme et la taille des avalanches de pierres (ou de neige) sur une montagne. Le tas de sable s'auto-organise sans aucune intervention extérieure. Per Bak démontra que tout système auto-organisé a une dynamique qui l'amène inévitablement vers un état de crise appelé état critique. Cet état critique est annonciateur d'une catastrophe majeure. Le milieu s'auto-organise suite à un grand nombre d'évènements d'importance mineure, et tout se passe comme s'il préparait le terrain pour l'arrivée d'une catastrophe qui se déclenchera lorsque l'état critique est atteint. Par exemple, pour l'évolution phylogénique des espèces vivantes, les catastrophes produites à l'état critique correspondent aux extinctions massives des espèces vivantes qui, à plusieurs reprises dans l'histoire de l'évolution biologique, ont remodelé fondamentalement l'arbre phylogénique de l'évolution des espèces vivantes. La criticalité auto-organisée est une méthode utilisée par la nature pour effectuer des transformations énormes sur des échelles de temps très courtes.



L'exemple de base considéré dans l'article [5], est celui d'un flux de sable qui s'écoule ainsi que le tas de sable qu'il engendre. Grain par grain, le sable s'écoule et le tas commence à se former, il devient de plus en plus pentu et apparaissent de petits glissements de sable, des avalanches, qui atteignent le bas du tas et qui élargissent son rayon de base. Le tas durant cette phase est appelé le générateur. Dès que les avalanches n'atteignent plus le sol, une nouvelle phase commence : la régénération du tas. Observée de près, la pente n'est pas lisse du tout, elle comporte des creux et des bosses. Les grains qui roulent (aléatoirement) depuis le sommet du tas, viennent combler ces irrégularités. Il arrive un moment où la pente devient lisse, plus aucun creux n'est disponible : l'état critique est atteint. Ajoutons un grain : il ne peut se placer puisque toutes les places sont prises.

Il va alors dévaler la pente en emportant d'autres grains : c'est l'affaissement du tas qui abaisse la hauteur du tas. La pente redevient irrégulière, un nouveau cycle commence pour régénérer la pente et revenir à un état critique. L'auto-organisation du tas de sable se caractérise ainsi par le processus complexe des avalanches et régénération dans lequel le monde "structuré" et le monde "aléatoire" se côtoient de manière complexe. Le tas évolue de manière autonome et organisée, en passant par des états critiques suivis par des catastrophes (les avalanches) qui lui permettront de repartir sur une nouvelle base affaissée, afin de faire progresser la hauteur du sommet et revenir à un état critique où la pente du tas est régulière.

Cet exemple met en évidence un autre aspect des phénomènes de criticalité auto-organisée : une petite perturbation interne n'implique pas forcément de petits effets. Dans un système non linéaire, une petite cause peut en effet avoir une grande portée : c'est l'effet papillon (ou effet domino). Ici les catastrophes (= avalanches) présentent différentes amplitudes qui sont toutes générées par une même petite perturbation initiale (= un grain de sable supplémentaire). La durée entre deux avalanches successives varie également énormément. C'est pourquoi, selon

Per Bak, ces phénomènes possèdent une double signature fractale, temporelle et spatiale.

d) Difficultés mathématiques : problématique de thèse

Ce type de phénomènes peut être observé empiriquement et à l'aide de simulations informatiques, qui montrent le succès des modèles considérés. Cependant leur analyse mathématique est extrêmement ardue. Même l'exemple du tas de sable, dont la définition (et la modélisation informatique) est simple, n'est pas bien compris mathématiquement. De nombreuses questions sont sans réponse : quelle est la durée moyenne entre deux avalanches ? Quelle est l'amplitude moyenne d'une avalanche ?

Les probabilistes s'intéressent de plus en plus à ces questions. Notamment des modèles pour les feux de forêt ont été construits à partir de processus de percolation [50]. Egalement des modèles simples d'évolution conduisent à des situations critiques [20]. Voici une sélection de travaux récents sur la criticalité auto-organisée : [2, 4, 16, 19, 23, 29, 49, 62].

Les modèles présentant de la criticalité auto-organisée et qui sont les plus simples, sont obtenus en transformant des transitions critiques standards en des états auto-organisés (comme il est suggéré dans la section 15.4.2 de [60]). L'idée est de partir d'un modèle présentant une transition de phase (comme le modèle d'Ising Curie-Weiss) et de transformer le paramètre de contrôle en une fonction des variables du modèle convergeant vers le point critique.

2 Le modèle d'Ising Curie-Weiss

Dans ce paragraphe, nous présentons quelques résultats sur le modèle d'Ising Curie-Weiss, la version champ moyen du modèle d'Ising. Il ne s'agit pas d'un modèle d'auto-organisation mais il est bien connu pour présenter un état critique.

a) Un modèle expliquant le ferromagnétisme

Certains matériaux, quand ils sont plongés dans un champ magnétique extérieur, s'aimantent très fortement. Les aimants gardent la mémoire du champ magnétique après qu'il a disparu. On appelle ce phénomène le ferromagnétisme. Plus précisément, il existe une température critique T_c , appelée température de Curie, telle que quand $T > T_c$ il n'y a pas d'aimantation spontanée, pas de mémoire, et quand $T < T_c$ il y a aimantation spontanée, mémoire du champ.

A l'échelle microscopique un aimant est constitué d'atomes et chaque atome est modélisé par un petit dipôle magnétique. Les petits dipôles s'orientent dans le sens du champ magnétique extérieur. De plus chaque petit dipôle crée un petit champ magnétique qui influe sur les dipôles voisins. Mais l'excitation thermique crée du désordre et tend à aligner les dipôles dans des directions aléatoires.

Le modèle d'Ising est un modèle qui fut suggéré à Ernest Ising en 1920 par son directeur de thèse, Wilhelm Lenz. Il a été conçu pour expliquer des phénomènes dans lesquels des effets collectifs sont produits par des interactions locales entre particules à deux états, comme le ferromagnétisme. Cela conduit à introduire une loi de probabilité sur le réseau discret \mathbb{Z}^d , $d \geq 1$, dont chaque site est occupé par un atome ou un petit dipôle magnétique qui peut être orienté vers le haut (+1) ou vers le bas (-1).

Plus précisément, donnons-nous une partie finie \mathcal{A} de \mathbb{Z}^d (par exemple un cube). Une configuration générique dans \mathcal{A} est une application $\sigma : \mathcal{A} \rightarrow \{-1, 1\}$ qui à un site $x \in \mathcal{A}$ associe le sens du spin de l'atome en x . Ensuite, pour un champ magnétique extérieur $h \in \mathbb{R}$, nous construisons

une énergie (ou Hamiltonien) $H = H_{\mathcal{A},h}$ défini par

$$\forall \sigma \in \{-1, 1\}^{\mathcal{A}} \quad H(\sigma) = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y \in \mathcal{A} \\ |x-y|=1}} \sigma(x)\sigma(y) - h \sum_{x \in \mathcal{A}} \sigma(x).$$

Le modèle d'Ising consiste à se donner une température $T > 0$ et la mesure de probabilité $\mu_{\mathcal{A},T,h}$, définie sur $\{-1, 1\}^{\mathcal{A}}$ par

$$\forall \sigma \in \{-1, 1\}^{\mathcal{A}} \quad \mu_{\mathcal{A},T,h}(\sigma) = e^{-H(\sigma)/T} \left(\sum_{s \in \{-1,1\}^{\mathcal{A}}} e^{-H(s)/T} \right)^{-1}.$$

La mesure de probabilité $\mu_{\mathcal{A},T,h}$ est appelée mesure de Gibbs associée à $H_{\mathcal{A},h}$ dans le volume \mathcal{A} , à la température $T > 0$. Elle favorise les états d'énergie minimale, à savoir $+1$ partout et -1 partout si $h = 0$, et $+1$ partout si $h > 0$.

Ising a étudié ce modèle en dimension 1 dans sa thèse de 1924 mais, quand la dimension augmente, le problème devient plus complexe puisque la loi de probabilité possède notamment une corrélation spatiale. Une façon d'obtenir un modèle plus simple est de considérer la version champ moyen du modèle d'Ising, appelé modèle d'Ising Curie-Weiss en hommage aux travaux sur le ferromagnétisme des physiciens français Pierre Curie et Pierre Weiss. Cela consiste à faire l'hypothèse que tous les spins interagissent entre eux de la même façon ou plus précisément que chaque spin reçoit une interaction qui est la moyenne des interactions de tous les spins. Ainsi la géométrie du réseau n'intervient plus et nous pouvons numérotter les spins de 1 à $n = \text{card}(\mathcal{A})$. L'Hamiltonien considéré $H_n = H_{n,h}$ est alors défini par

$$\forall \omega \in \{-1, 1\}^n \quad H_n(\omega) = -\frac{1}{2n} \sum_{1 \leq i,j \leq n} \omega_i \omega_j - h \sum_{i=1}^n \omega_i.$$

Pour tout $\omega \in \{-1, 1\}^n$, posons $S_n(\omega) = \omega_1 + \dots + \omega_n$. Nous avons alors

$$\forall \omega \in \{-1, 1\}^n \quad H_n(\omega) = -\frac{S_n^2(\omega)}{2n} - hS_n(\omega).$$

Le modèle d'Ising Curie-Weiss associé à la température inverse $\beta = 1/T$ est la donnée de $\mu_n = \mu_{n,\beta,h}$, la mesure de Gibbs associée à H_n , définie par

$$\forall \omega \in \{-1, 1\}^n \quad \mu_n(\omega) = \frac{1}{Z_n(\beta)} e^{-\beta H_n(\omega)},$$

avec

$$Z_n(\beta) = \sum_{x \in \{-1,1\}^n} e^{-\beta H_n(x)}.$$

Dans le cas où S_n est une somme de n variables aléatoires indépendantes prenant les valeurs $+1$ et -1 avec même probabilité, la théorie des probabilités montre que $(S_n/n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0 (loi des grands nombres) et $(S_n/\sqrt{n})_{n \geq 1}$ converge en loi vers la loi normale centrée réduite (théorème central limite). Et dans le cadre du modèle d'Ising Curie-Weiss ? Ce problème a intéressé de nombreux physiciens (notamment Kôdi Husimi et Harold N.V. Temperley) et mathématiciens (notamment Mark Kac, Colin J. Thomson et Richard S. Ellis).

Notons $\xrightarrow{\mathcal{L}}$ la convergence en loi. Donnons maintenant des résultats issus du livre de Richard S. Ellis [25] :

(i) Dans le cas où $\beta > 1$ (c'est-à-dire $T < 1$) :

★ Soit $h = 0$ et alors il existe $m(\beta) \in]0, 1[$ tel que, sous μ_n ,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{1}{2}(\delta_{-m(\beta)} + \delta_{m(\beta)}).$$

Il s'agit d'une loi des grands nombres d'un nouveau type où la limite est aléatoire. Physiquement, cela se traduit par le fait qu'en l'absence de champ magnétique extérieur et en basse température $T < 1$, il y a asymptotiquement, avec une probabilité $1/2$, une majorité de spins orientés $+1$ avec une proportion $(1 + m(\beta))/2$, ou bien avec probabilité $1/2$, une majorité de spins orientés -1 avec une proportion $(1 - m(\beta))/2$.

★ Soit $h > 0$ et alors il existe $m(\beta, h) \in]0, 1[$ tel que, sous μ_n ,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \delta_{m(\beta, h)}.$$

De plus $m(\beta, h)$ tend vers $m(\beta) > 0$ quand h tend vers 0^+ . Donc, s'il y a un champ magnétique extérieur positif, alors asymptotiquement il y a une majorité de spins orientés $+1$ avec une proportion $(1 + m(\beta, h))/2$ qui reste strictement plus grande que $1/2$ quand le champ magnétique extérieur disparaît (h tend vers 0^+). Ainsi, quand la température est plus petite que la température critique $T_c = 1$, il y a magnétisation spontanée, mémoire du champ magnétique.

(ii) Dans le cas où $\beta \in]0, 1]$ (c'est-à-dire $T \geq 1$) :

★ Soit $h = 0$ et alors, sous μ_n ,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \delta_0.$$

Nous retrouvons une loi des grands nombres identique à celle du cas des variables indépendantes et de même loi $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$ (qui correspond d'ailleurs au cas limite $\beta = 0$ du modèle d'Ising Curie-Weiss). Physiquement, cela se traduit par le fait qu'en l'absence de champ magnétique extérieur et quand la température est plus élevée que $T_c = 1$, il y a asymptotiquement autant de spins orientés $+1$ que de spins orientés -1 .

★ Soit $h > 0$ et alors il existe $m(\beta, h) \in]0, 1[$ tel que, sous μ_n ,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \delta_{m(\beta, h)}.$$

De plus $m(\beta, h)$ tend vers 0 quand h tend vers 0^+ . Donc, s'il y a un champ magnétique extérieur positif, alors asymptotiquement il y a une majorité de spins orientés $+1$ avec une proportion $(1 + m(\beta, h))/2$ qui tend vers $1/2$ quand le champ magnétique extérieur disparaît (h tend vers 0^+). Ainsi, quand la température est plus grande que la température critique $T_c = 1$, il n'y a pas de magnétisation spontanée, pas de mémoire du champ magnétique.

Dans le cas où $\beta \in]0, 1]$ et $h = 0$, une question naturelle est alors celle de la vitesse de convergence de S_n/n vers 0 . Nous avons le résultat de fluctuations suivant :

★ Si $\beta \in]0, 1[$ et $h = 0$ alors, sous μ_n ,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{1 - \beta}\right).$$

★ Si $\beta = 1$ et $h = 0$ alors, sous μ_n ,

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right) dx,$$

où Γ désigne la fonction Gamma, définie par

$$\forall x > 0 \quad \Gamma(x) = \int_0^{+\infty} y^{x-1} e^{-y} dy.$$

Ainsi, quand $\beta < \beta_c = 1$, nous obtenons un théorème de fluctuations analogue au théorème central limite, bien que la variance de la gaussienne limite soit différente de 1 (mais elle est égale à $(1 - \beta)^{-1}$ et tend vers 1 quand β tend vers 0). Par contre, quand $\beta = \beta_c = 1$, les fluctuations sont d'ordre $n^{3/4}$ et la loi limite est atypique. C'est un argument supplémentaire pour qualifier l'état $\beta = 1$ de critique.

Dans le paragraphe suivant, nous allons voir une extension de ces résultats pour des mesures de probabilité plus générales.

b) Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé

Nous nous référons à l'article [26] de Richard S. Ellis et Charles M. Newman (1978) et à l'article [24] de Richard S. Ellis et T. Eisele (1988) pour les résultats suivants :

Soit ρ une mesure de probabilité non-dégénérée sur \mathbb{R} (c'est-à-dire qui n'est pas une masse de Dirac) vérifiant

$$\forall t \geq 0 \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(tx^2) d\rho(x) < \infty.$$

Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé associé à ρ et à la température inverse $\beta > 0$ est défini par un tableau triangulaire de variables aléatoires réelles $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ tel que pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi

$$d\mu_{n,\rho,\beta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n(\beta)} \exp\left(\frac{\beta}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i),$$

où $Z_n(\beta)$ est la constante de normalisation. Pour tout $n \geq 1$, nous posons $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$.

Physiquement, cela signifie que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, X_n^k est égale à l'intensité algébrique du champ magnétique de l'atome situé au site k (qui appartient au support de ρ). Notons que, quand $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$, il s'agit du modèle d'Ising Curie-Weiss classique que nous avons vu dans le paragraphe précédent.

Théorème I.1. *Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que*

$$\forall t \geq 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{tx^2} d\rho(x) < \infty \quad \text{et} \quad \frac{\partial^3}{\partial t^3} \left(\ln \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\rho(x) \right) \leq 0.$$

(a) *Il existe une fonction m qui est nulle sur $]0, 1/\sigma^2]$, analytique réelle, strictement positive sur $]1/\sigma^2, +\infty[$ et telle que*

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \begin{cases} \delta_0 & \text{si } \beta \leq 1/\sigma^2, \\ \frac{1}{2}(\delta_{-m(\beta)} + \delta_{m(\beta)}) & \text{si } \beta > 1/\sigma^2. \end{cases}$$

La fonction m n'est pas la restriction d'une fonction analytique réelle au voisinage de $1/\sigma^2$ et le point $1/\sigma^2$ est appelée la valeur critique du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé.

(b) *De plus, si $\beta < 1/\sigma^2$, alors, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$,*

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{1 - \beta\sigma^2}\right).$$

Et, si $\beta = 1/\sigma^2$, alors il existe $k \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $\lambda > 0$ tels que, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$,

$$\frac{S_n}{n^{1-1/2k}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} C_{k,\lambda} \exp\left(-\frac{\lambda}{\sigma^{2k}} \frac{s^{2k}}{(2k)!}\right) ds,$$

en notant $C_{k,\lambda}$ la constante de normalisation.

Nous donnons une démonstration de ce théorème dans le paragraphe A de l'annexe. Notons que, pour avoir le point (b) pour un β donné, il suffit en fait que ρ soit symétrique, non-dégénérée et vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x^2/2} d\rho(x) < +\infty \quad \text{et} \quad \forall t \neq 0 \quad \Lambda(t) = \ln \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\rho(x) < \frac{t^2}{2\beta}.$$

Notons aussi que la constante λ dans la dernière convergence en loi est égale à $-\Lambda^{(2k)}(0)$. Dans [26], l'entier k est appelé le type de ρ et λ sa force. Si, pour tout $j \in \mathbb{N}$, μ_j et \bar{m}_j désignent les moments respectifs de ρ et de la Gaussienne centrée réduite, alors (k, λ) est caractérisé par

$$k = \inf \{ j \geq 2 : \bar{m}_{2j} > \mu_{2j}/\sigma^{2j} \} \quad \text{et} \quad \lambda = \bar{m}_{2k} - \mu_{2k}/\sigma^{2k}.$$

Dans [24], Richard S. Ellis et Theodor Eisele étudient aussi le cas plus général de la loi

$$d\mu_{n,\rho,\beta,g}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n(\beta)} \exp\left(n\beta g\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i),$$

où g est une fonction paire, analytique réelle, strictement croissante sur $[0, +\infty[$, nulle en 0 et dominée par une fonction convexe h vérifiant

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha h(x)} d\rho(x) < \infty.$$

Dans ce cas, il existe $\beta_1 > 0$, \mathcal{P} un ensemble au plus dénombrable de valeurs critiques strictement supérieures à β_1 et une fonction $\beta \mapsto m(\beta)$ qui est nulle sur $]0, \beta_1[$ et analytique réelle sur chaque intervalle ouvert de $]0, \infty \setminus \mathcal{P}$ (mais elle n'est pas la restriction d'une fonction analytique au voisinage de β_1 et des points de \mathcal{P}) de sorte que, sous $\mu_{n,\rho,\beta,g}$,

$$\frac{S_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \begin{cases} \delta_0 & \text{si } \beta \in]0, \beta_1[, \\ \frac{1}{2}(\delta_{-m(\beta)} + \delta_{m(\beta)}) & \text{si } \beta \in]\beta_1, \infty \setminus \mathcal{P}. \end{cases}$$

3 Un modèle d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée

a) Vers un modèle champ moyen de criticalité auto-organisée

Nous allons maintenant nous inspirer du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé pour construire et étudier un modèle « simple » de variables aléatoires en interaction qui présente un phénomène de criticalité auto-organisée.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 2, le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé critique est le modèle où (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{2n\sigma^2}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Nous allons modifier cette mesure de probabilité afin d'obtenir un modèle qui présenterait un phénomène de criticalité auto-organisée. Nous cherchons pour cela un contrôle automatique de β qui deviendrait une fonction des variables aléatoires du modèle, de sorte que, quand n tend vers $+\infty$, β converge vers la valeur critique du modèle. Partons du constat suivant : donnons-nous

$(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi ρ . La loi forte des grands nombres implique que :

$$\frac{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sigma^2 \quad \text{p.s.}$$

Cela nous fournit un estimateur de $1/\sigma^2$ et nous pouvons montrer qu'une convergence similaire¹ a lieu dans le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé. Nous sommes donc naturellement tentés de « remplacer β par $n(x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1}$ » dans la loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{2n\sigma^2}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Ainsi le modèle que nous considérons par la suite est donné par la loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Ces considérations suggèrent que ce modèle devrait évoluer spontanément vers un état critique (au sens que les fluctuations de S_n sont d'ordre $n^{3/4}$). Nous allons prouver rigoureusement que notre modèle présente en effet un phénomène de criticalité auto-organisée.

b) Définition du modèle

Le modèle.

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0. Nous considérons $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ où

$$d\tilde{\mu}_{n,\rho}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \mathbf{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i),$$

avec

$$Z_n = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \mathbf{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Posons $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ et $T_n = (X_n^1)^2 + \dots + (X_n^n)^2$.

L'indicatrice dans la densité de la mesure $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ est nécessaire afin d'écartier tout problème de définition quand la loi ρ charge le point 0 car sinon l'événement $\{x \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 0\}$ peut arriver avec probabilité strictement positive.

Remarquons que, contrairement au modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé, ce modèle est défini pour toute mesure de probabilité. En effet, par convexité de $x \mapsto x^2$, nous avons

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^2 = n^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n}\right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Ainsi $1 \leq Z_n \leq e^{n/2} < +\infty$ pour tout $n \geq 1$.

1. Dans le paragraphe A.2) de l'annexe, nous montrons que (sous les hypothèses du théorème I.1 avec $\beta = 1/\sigma^2$), sous $\mu_{n,\rho,\beta}$, $((X_n^1)^2 + \dots + (X_n^n)^2)/n$ converge en probabilité vers σ^2 .

Notons que le cas de la loi de Bernoulli est spécial puisque, si X est une variable aléatoire de loi $\rho = (\delta_{-c} + \delta_c)/2$ pour un certain $c > 0$, alors $X^2 = c^2 = \sigma^2$ et donc

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{2n\sigma^2}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Nous retombons alors sur le modèle d'Ising Curie-Weiss classique.

c) Théorèmes limites principaux

La loi des grands nombres assure que, sous $\rho^{\otimes n}$, S_n/n converge en probabilité vers 0. Nous avons vu dans le paragraphe 2 que, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$ (la loi du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé), S_n/n converge aussi en probabilité vers 0 dès que $\beta \leq 1/\sigma^2$. Nous présentons ici un théorème qui assure que, sous certaines hypothèses, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, S_n/n converge en probabilité vers 0 également :

Théorème I.2 (Loi des grands nombres).

Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} , de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que

$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{v_0 z^2} d\rho(z) < +\infty.$$

Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \sigma^2)$.

La convergence en probabilité du théorème signifie que

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mu}_{n,\rho} \left(\left| \frac{S_n}{n} \right|^2 + \left| \frac{T_n}{n} - \sigma^2 \right|^2 \geq \varepsilon \right) = 0.$$

La preuve de ce théorème est donnée au paragraphe 14.b). La convergence en probabilité de S_n/n vers 0, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, nous amène à nous interroger sur la vitesse de convergence. Les heuristiques du paragraphe 3.a) et les résultats sur le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé critique nous suggèrent que les fluctuations de S_n , sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, sont d'ordre $n^{3/4}$ et que la loi limite est $C \exp(-x^4/12) dx$, où C désigne la constante de normalisation.

Le théorème de fluctuations suivant est notre résultat central. Il établit que, sous certaines conditions sur la loi ρ , la somme S_n des variables aléatoires de notre modèle se comporte asymptotiquement comme dans le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé critique. Comme notre modèle n'a pas de paramètre extérieur, cela indique un phénomène de criticalité auto-organisée.

Théorème I.3 (Fluctuations).

Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0 et telle que

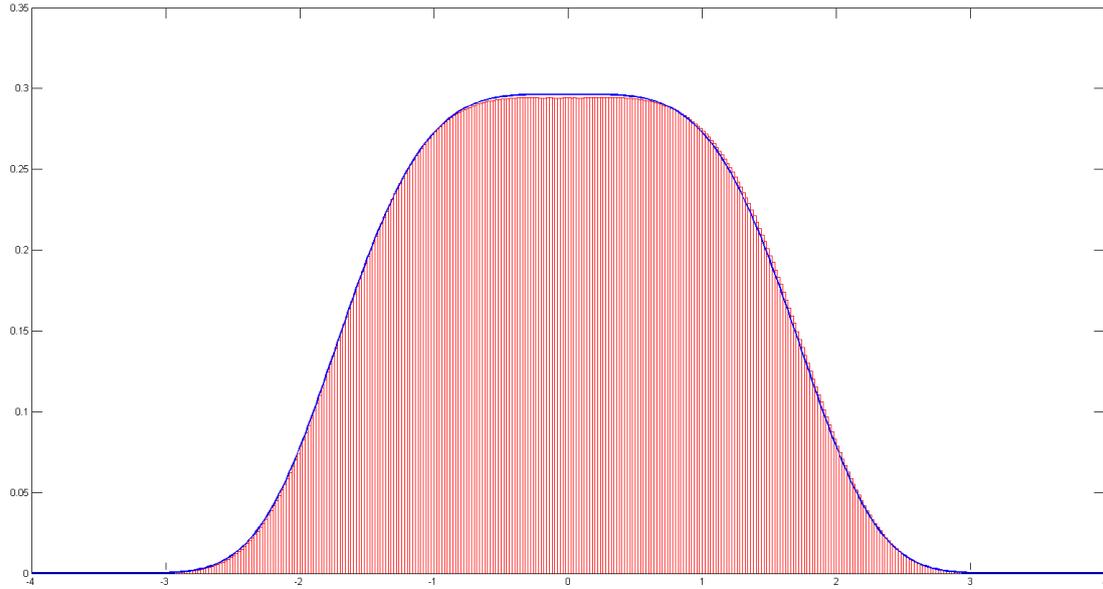
$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{v_0 z^2} d\rho(z) < +\infty.$$

Notons σ^2 la variance de ρ et μ_4 son moment d'ordre 4. Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$,

$$\frac{\mu_4^{1/4} S_n}{\sigma^2 n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{s^4}{12}\right) ds.$$

Le résultat du théorème I.3 présente un comportement universel inattendu : pour toute mesure de probabilité symétrique ρ sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0, les fluctuations de S_n sont d'ordre $n^{3/4}$. Cela contraste avec la situation du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé critique pour lequel les fluctuations sont d'ordre $n^{1-1/2k}$, où k dépend de la mesure ρ . De plus, soulignons que nos hypothèses sur ρ sont plus faibles que celles de [26]. Par exemple, notre résultat s'applique à toutes les mesures gaussiennes centrées sur \mathbb{R} .

Nous avons utilisé l'algorithme de Metropolis-within-Gibbs (cf. paragraphe 34) pour simuler ce modèle et illustrer le théorème de fluctuations. Nous avons obtenu :



EN ROUGE, L'HISTOGRAMME RENORMALISÉ DE 4.91×10^{12} SIMULATIONS DE $S_n/n^{3/4}$, POUR $n = 10000$ ET $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$. EN BLEUE, LA COURBE DE LA FONCTION

$$x \mapsto \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{x^4}{12}\right).$$

La démonstration des théorèmes I.2 et I.3 est donnée en plusieurs étapes :

(i) Le cas où ρ est Gaussienne fait l'objet du chapitre II : nous obtenons la loi des grands nombres et les fluctuations associées à notre modèle à l'aide de calculs explicites.

(ii) Dans le chapitre IV, nous étudions I la transformée de Cramér de (Z, Z^2) , quand Z est une variable aléatoire de loi ρ , définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad I(x, y) = \sup_{(u, v) \in \mathbb{R}^2} \left\{ xu + yv - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{uz + vz^2} d\rho(z) \right\}.$$

L'un des ingrédients essentiels pour montrer nos théorèmes est l'inégalité suivante (établie au paragraphe 11) : si ρ est symétrique et s'il existe $v_0 > 0$ telle que $E(\exp(v_0 Z^2)) < +\infty$, alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad I(x, y) \geq \frac{x^2}{2y} \quad (\mathcal{I})$$

et l'égalité a lieu si et seulement si $(x, y) = (0, \sigma^2)$. Nous donnons la démonstration du théorème I.2 au paragraphe 14.b) et la démonstration du théorème I.3, dans le cas où ρ admet une densité paire vérifiant certaines conditions d'intégrabilité, au paragraphe 15.

(iii) Dans le chapitre VI nous établissons des résultats généraux, du type théorème central limite, à partir d'approximations de Laplace. Ils nous permettent de montrer (au paragraphe 18.a)) le théorème I.3 dans le cas où ρ vérifie la condition de Cramér

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|(s,t)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz+itz^2} d\rho(z) \right| < 1.$$

Nous montrons au paragraphe 18.c) que, si ρ possède une composante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , alors elle vérifie la condition de Cramér.

(iv) Dans le chapitre VII, nous montrons, à l'aide de la transformation de Hubbard-Stratonovich et d'une décomposition des variables aléatoires symétriques, que

$$\frac{S_n}{n^{1/4}\sqrt{T_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4\mu_4}{3\sigma^4}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{\mu_4}{12\sigma^4}s^4\right) ds.$$

Nous avons reçu l'aide précieuse de S. R. Srinivasa Varadhan pour prouver cette convergence en loi. Notons que le cas général du théorème I.3 est une conséquence directe de cette convergence, du théorème I.2 et du lemme de Slutsky. Contrairement aux approches des étapes (b) et (c), cette dernière méthode utilise des astuces qui sont spécifiques à notre modèle et à la symétrie de la loi considérée. Elle n'a donc pas vocation à se généraliser à d'autres modèles, comme celui que nous étudions au chapitre X.

Enfin nous avons également étudié la convergence de la suite des mesures empiriques

$$M_n = \frac{1}{n} (\delta_{X_n^1} + \cdots + \delta_{X_n^n}), \quad n \geq 1,$$

quand $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ est tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}$. Notons $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, l'ensemble des mesures de probabilité sur \mathbb{R} . Nous avons obtenu le théorème de convergence suivant :

Théorème I.4.

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} symétrique telle que $\rho(\{0\}) < 1/\sqrt{e}$. Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, la suite des mesures empiriques $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ vers ρ , c'est-à-dire, pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{n,\rho} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_n^k) - \int_{\mathbb{R}} f(z) d\rho(z) \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

La preuve de ce théorème est donnée au chapitre VIII. Elle repose sur l'inégalité entropique suivante :

$$H(\mu|\rho) > \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) \right)^2}{2 \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z)},$$

valable dès que ρ et μ sont deux mesures de probabilité distinctes sur \mathbb{R} , qui ne sont pas la masse de Dirac en 0 et telles que ρ est symétrique et μ admet un moment d'ordre 1. Il s'agit d'une conséquence de l'inégalité (I) ci-dessus et sa démonstration fait l'objet du paragraphe 20.

Une autre conséquence de l'inégalité (\mathcal{I}) est l'inégalité de concentration suivante : si $n \geq 1$ et si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires réelles symétriques, indépendantes et identiquement distribuées, alors

$$\forall x > 0 \quad \forall y > 0 \quad \mathbb{P} \left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \geq x, \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} \leq y \right) < \exp \left(-\frac{nx^2}{2y} \right).$$

Dans le paragraphe 12, nous montrons cette inégalité et nous discutons de ses liens avec l'inégalité de Hoeffding.

d) Un modèle alternatif

Nous proposons aussi le modèle alternatif suivant :

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . Nous considérons $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$ où

$$d\tilde{\mu}_{n,\rho}^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n^*} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i),$$

avec

$$Z_n^* = \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1} \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Posons $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ et $T_n = (X_n^1)^2 + \dots + (X_n^n)^2$.

Théorème I.5.

Si ρ est symétrique, de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que

$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{v_0 z^2} d\rho(z) < +\infty$$

alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$, $(S_n/n, T_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \sigma^2)$. Supposons de plus que ρ vérifie la condition de Cramér

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|(s,t)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz + itz^2} d\rho(z) \right| < 1.$$

Alors, en notant μ_4 le moment d'ordre 4 de ρ , nous avons que, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$,

$$\frac{\mu_4^{1/4} S_n}{\sigma^2 n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/4} \Gamma \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{s^4}{12} \right) ds.$$

La démonstration de la convergence en probabilité est une variante simple de la preuve du théorème I.2 donnée au paragraphe 14.b). Nous montrons le résultat de fluctuations au paragraphe 18.a). Notons qu'avec ce modèle alternatif, il n'est pas possible d'appliquer la méthode astucieuse du chapitre VII qui avait permis de s'affranchir d'hypothèses techniques supplémentaires sur ρ , comme dans le théorème I.3.

e) Extension du modèle à des fonctions d'interaction plus générales

Une analyse plus poussée de la démonstration du théorème I.3, nous suggère que les fluctuations de S_n sont toujours d'ordre $n^{3/4}$ si nous généralisons le modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC à des fonctions d'interaction plus générales :

$$ng \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}} \right) \quad \text{ou} \quad n^2 \frac{g((x_1 + \cdots + x_n)/n)}{x_1^2 + \cdots + x_n^2},$$

avec g une fonction mesurable telle que $g(u) \sim u^2/2$ au voisinage de 0 et

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad g(u) \leq \frac{u^2}{2}.$$

Donnons-nous toujours une mesure de probabilité ρ sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0 et considérons

$$S_n = X_n^1 + \cdots + X_n^n \quad \text{et} \quad T_n = (X_n^1)^2 + \cdots + (X_n^n)^2,$$

où $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ est un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) suit la loi

$$d\tilde{\mu}_{n,\rho,g}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_{n,g}} \exp \left(ng \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{\sqrt{n(x_1^2 + \cdots + x_n^2)}} \right) \right) \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i),$$

ou bien la loi

$$d\tilde{\mu}_{n,\rho,g}^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_{n,g}^*} \exp \left(n^2 \frac{g((x_1 + \cdots + x_n)/n)}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \right) \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i),$$

où $Z_{n,g}$ et $Z_{n,g}^*$ sont des constantes de normalisation.

Ces extensions sont dans un esprit analogue au travail de Richard S. Ellis et Theodor Eisele [24] dans le contexte du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé.

Théorème I.6.

Supposons que ρ est symétrique, de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que

$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{v_0 z^2} d\rho(z) < +\infty.$$

Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho,g}$ et sous $\tilde{\mu}_{n,\rho,g}^*$, $(S_n/n, T_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \sigma^2)$.

Nous supposons de plus que g admet une dérivée d'ordre 4 en 0 et que ρ vérifie la condition de Cramér

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|(s,t)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz+itz^2} d\rho(z) \right| < 1.$$

Nous notons μ_4 le moment d'ordre 4 de ρ et $m_4 = -g^{(4)}(0)/2 \geq 0$. Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho,g}$,

$$(\mu_4 + m_4 \sigma^4)^{1/4} \frac{S_n}{\sigma^2 n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/4} \Gamma \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{s^4}{12} \right) ds,$$

et sous $\tilde{\mu}_{n,\rho,g}^*$,

$$(\mu_4 + m_4 \sigma^6)^{1/4} \frac{S_n}{\sigma^2 n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4}{3} \right)^{1/4} \Gamma \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{s^4}{12} \right) ds.$$

La démonstration de ce théorème est donnée au paragraphe 18.b). Remarquons que, si $g(u) = u^2/2$ pour tout $u \in \mathbb{R}$, alors il s'agit du théorème I.3 (sous l'hypothèse que ρ satisfait la condition de Cramér). Notons qu'il n'est pas non plus possible ici d'appliquer la méthode astucieuse du chapitre VII qui avait permis de s'affranchir d'hypothèses techniques supplémentaires sur ρ , comme dans le théorème I.3.

f) Généralisation du modèle en dimension $d > 1$

Dans le chapitre IX, nous généralisons notre modèle à la dimension $d > 1$. Nous étudions d'abord un premier modèle dans le paragraphe 22 mais il ne s'avère pas avoir le comportement attendu. Pour remédier à cela, nous regardons au paragraphe 23 un modèle d'Ising Curie-Weiss en dimension supérieure et obtenons des résultats analogues au point (b) du théorème I.1. Cela nous permet de définir un modèle d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée en dimension supérieure :

Le modèle. Soient $d \geq 2$ et ρ une mesure de probabilité non-dégénérée sur \mathbb{R}^d . Pour tout $n \geq d$, nous notons $\tilde{\mu}_{n,\rho,d}$ la mesure de probabilité de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \left\langle \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot {}^t x_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right), \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \right\rangle \right)$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$ sur l'ensemble

$$D_n^+ = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n : \det \left(\sum_{i=1}^n x_i \cdot {}^t x_i \right) > 0 \right\},$$

où Z_n est la constante de normalisation. Nous considérons $(X_n^k)_{n \geq d, 1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire de vecteurs aléatoires tel que, pour tout $n \geq d$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{n,\rho,d}$. Pour tout $n \geq d$, nous définissons le vecteur S_n et la matrice T_n par

$$S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n \quad \text{et} \quad T_n = X_n^1 \cdot {}^t(X_n^1) + \dots + X_n^n \cdot {}^t(X_n^n).$$

Théorème I.7.

Soit ρ une mesure de probabilité admettant une densité paire par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, et telle que

$$\forall t \geq 0 \quad \int_{\mathbb{R}^d} \exp(t\|x\|^2) d\rho(x) < \infty.$$

Notons Σ la matrice de covariance de ρ et M_4 l'application définie sur \mathbb{R}^d par

$$\forall z \in \mathbb{R}^d \quad M_4(z) = \sum_{1 \leq i,j,k,l \leq d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_i y_j y_k y_l d\rho(y) \right) z_i z_j z_k z_l.$$

Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \Sigma)$ et

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \frac{\exp \left(-\frac{1}{12} M_4(\Sigma^{-1}z) \right) dz}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp \left(-\frac{1}{12} M_4(\Sigma^{-1}u) \right) du}.$$

Nous montrons une version plus générale de ce théorème dans le paragraphe 25.c).

4 Une auto-interaction menant à des fluctuations d'ordre $n^{5/6}$

Dans le chapitre X, nous essayons de « tuer » le terme en x^4 dans la loi limite du théorème I.3. Nous modifions la loi du paragraphe 3 pour obtenir une auto-interaction menant à des fluctuations d'ordre $n^{5/6}$ et une loi limite du type $C \exp(-\lambda x^6) dx$ où C, λ sont des constantes positives. Pour cela nous allons étudier, dans le chapitre X, les arguments mathématiques à l'origine des fluctuations d'ordre $n^{3/4}$ de S_n dans le modèle défini au paragraphe 3. Nous allons voir que, pour avoir des fluctuations d'ordre $n^{5/6}$, il faudrait alors considérer le modèle dont la fonction d'interaction est

$$\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} + \frac{1}{12} \frac{(x_1^4 + \cdots + x_n^4)(x_1 + \cdots + x_n)^4}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^4}.$$

Malgré des simulations concluantes, nous avons hélas rencontré plusieurs problèmes dans la démonstration : les techniques que nous utilisons dans les chapitres II à VI n'ont pas abouti et nous avons dû modifier H afin de pouvoir mener une analyse mathématique. Nos investigations nous ont poussés à considérer le modèle suivant :

Le modèle. Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0 et soit H une fonction mesurable à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ telle que

$$Z_{H,n} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(H(x_1 + \cdots + x_n, x_1^2 + \cdots + x_n^2, x_1^4 + \cdots + x_n^4)) \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) < +\infty.$$

Nous considérons $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_1^n, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$ dont la densité est

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_{H,n}} \exp(H(x_1 + \cdots + x_n, x_1^2 + \cdots + x_n^2, x_1^4 + \cdots + x_n^4)) \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0\}}$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$. Posons

$$S_n = X_n^1 + \cdots + X_n^n, \quad T_n = (X_n^1)^2 + \cdots + (X_n^n)^2 \quad \text{et} \quad U_n = (X_n^1)^4 + \cdots + (X_n^n)^4$$

Si H est la fonction définie par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \quad H(x, y, z) = \frac{x^2}{2y} + \frac{1}{12} \frac{z x^4 y^5}{y^9 + x^{10} + z x^4 y^4}$$

alors nous avons le théorème suivant :

Théorème I.8.

Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} dont le support contient au moins cinq points et telle que

$$\exists w_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{w_0 x^4} d\rho(x) < +\infty.$$

Notons σ^2 , μ_4 et μ_6 les moments d'ordre respectifs 2, 4 et 6 de ρ et supposons que

$$5\mu_4^2 > 2\sigma^2\mu_6.$$

Alors, sous $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n, U_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \sigma^2, \mu_4)$.

Si ρ vérifie de plus la condition de Cramér alors

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|(s,t,u)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz+itz^2+iu z^4} d\rho(z) \right| < 1$$

alors, sous $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$

$$\left(\frac{\mu_4^2}{\sigma^2} - \frac{2\mu_6}{5} \right)^{1/6} \frac{S_n}{\sigma^2 n^{5/6}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{81}{2} \right)^{1/6} \Gamma \left(\frac{1}{6} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{s^6}{18} \right) ds.$$

Dans le paragraphe 29, nous montrons en fait ce théorème pour des fonctions d'interaction H plus générales. Nous verrons aussi que la condition de Cramér est satisfaite si ρ admet une composante absolument continue. Les paragraphes précédents (formant le chapitre X) sont consacrés à l'étude de la transformée de Cramér \mathbf{L} de (Z, Z^2, Z^4) , où Z est une variable aléatoire de loi ρ , et notamment à son développement au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$. Cette étude nous permet d'obtenir des critères sur H pour qu'elle satisfasse la conclusion du théorème I.8. Enfin, dans le paragraphe 30, nous dirons quelques mots sur la construction d'une auto-interaction menant à des fluctuations d'ordre $n^{1-1/(2k)}$ pour $k \geq 4$.

5 Un modèle dynamique de criticalité auto-organisée

Dans le paragraphe 3, nous avons introduit un modèle de particules en interaction, et nous avons énoncé des théorèmes limites indiquant un phénomène de criticalité auto-organisée : quand le nombre de particules tend vers $+\infty$, alors elles tendent à se comporter de façon critique. Cependant ce modèle décrit des particules à l'équilibre, qui n'évoluent pas avec le temps. Or, comme le souligne parfaitement l'exemple du tas de sable, la criticalité auto-organisée semble être davantage un phénomène de nature dynamique.

Les chapitres XI et XII sont ainsi consacrés à l'étude de modèles dynamiques dont la loi stationnaire est $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ ou $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$.

a) Un modèle dynamique à temps discret

Le modèle. Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0. Donnons-nous $n \geq 1$ et $X_n(0)$ un vecteur aléatoire de \mathbb{R}^n qui n'est pas le vecteur nul. Nous considérons la chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ d'espace d'état inclus dans \mathbb{R}^n et telle que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $X_n(j+1)$ est définie par l'algorithme suivant :

a) Une coordonnée i est choisie selon la loi uniforme dans $\{1, \dots, n\}$.

b) Une variable aléatoire Z_j est choisie selon la loi ρ .

c) Nous posons

$$S_n(j) = X_n^1(j) + \dots + X_n^n(j) \quad \text{et} \quad T_n(j) = (X_n^1(j))^2 + \dots + (X_n^n(j))^2.$$

Si $T_n(j) + Z_j^2 - (X_n^i(j))^2 = 0$ alors nous posons $X_n(j+1) = X_n(j)$. Sinon nous introduisons

$$\Pi_n = \left[1 + \exp \left(\frac{S_n(j)^2}{2T_n(j)} - \frac{(S_n(j) + Z_j - X_n^i(j))^2}{2(T_n(j) + Z_j^2 - (X_n^i(j))^2)} \right) \right]^{-1}.$$

Avec probabilité Π_n , nous posons $X_n^i(j+1) = Z_j$ et $X_n^k(j+1) = X_n^k(j)$ pour $k \neq i$. Avec probabilité $1 - \Pi_n$, nous posons $X_n(j+1) = X_n(j)$.

Il s'agit de la dynamique de Glauber associée à la mesure $\tilde{\mu}_{n,\rho}$. Elle est construite de telle sorte que la chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ admette $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ pour unique distribution invariante et $X_n(j)$ converge en loi vers $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ quand j tend vers $+\infty$. Par conséquent cette dynamique nous fournit une méthode pour simuler une variable aléatoire dont la loi se rapproche de celle de $S_n/n^{3/4}$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$. C'est cette méthode – ou du moins une variante (cf. paragraphe 34) – que nous avons utilisée pour obtenir l'histogramme présenté à la page 23.

Dans le paragraphe 31, nous exposons d'abord quelques résultats généraux sur les méthodes, dites de Metropolis, permettant de construire une chaîne de Markov de loi stationnaire donnée. Ensuite, dans le paragraphe 32, nous étudions la dynamique de Glauber associée au modèle d'Ising Curie-Weiss. Nous montrons que, dans le cas non-critique où $\beta < 1$, les fluctuations de $(S_n(\lfloor nt \rfloor), t \geq 0)$, sont d'ordre \sqrt{n} et que le processus limite est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Dans le cas critique où $\beta = 1$, il nous faut encore accélérer le temps d'un facteur \sqrt{n} . Les fluctuations de $(S_n(\lfloor n^{3/2}t \rfloor), t \geq 0)$ sont d'ordre $n^{3/4}$ et le processus limite est solution d'une équation différentielle stochastique du type

$$dz(t) = -\alpha_* z^3(t) dt + \sigma_* dB(t), \quad (\mathcal{E}_c)$$

avec $(B(t), t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard et α_*, σ_* des constantes strictement positives. C'est précisément ce comportement asymptotique que nous attendons désormais d'un modèle dynamique construit pour que sa loi d'équilibre soit celle de notre modèle d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée.

Dans le paragraphe 33, nous avons commencé l'étude asymptotique de la suite de chaînes de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})_{n \geq 1}$ définie ci-dessus. Nous avons montré que, si ρ est une mesure de probabilité symétrique chargeant 4 points et si $X_n^1(0), \dots, X_n^n(0)$ sont indépendantes et de même loi ρ , alors il existe une fonction Y nulle en 0 telle que

$$\forall \delta > 0 \quad \forall t > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{S_n(\lfloor ns \rfloor)}{n} - Y(s) \right| > \delta \right) = 0.$$

Nos tentatives de preuve d'un théorème de fluctuations associé à cette convergence en probabilité n'ont hélas pas abouti et nous avons plutôt exploré la piste développée au chapitre XII.

b) Un modèle dynamique à temps continu

Dans [19], Donald A. Dawson étudie un modèle champ moyen de particules en interaction dynamique. Il est construit comme un processus de Markov solution d'un système d'équations différentielles stochastiques. De plus son unique distribution invariante est un cas particulier du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé. Ce processus dépend de plusieurs paramètres et Dawson montre qu'il existe une courbe critique dans l'espace des paramètres pour laquelle les fluctuations de $(S_n(\sqrt{nt}), t \geq 0)$ sont d'ordre $n^{3/4}$ et le processus limite est solution d'une équation différentielle du type de (\mathcal{E}_c) . Ceci étant, dans le chapitre XII, nous nous inspirons de la démarche de Dawson pour construire et étudier un processus de Markov solution d'un système d'équations différentielles stochastiques et dont la loi stationnaire est $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$, pour des mesures de probabilité ρ du type suivant :

Soit φ une fonction paire de classe C^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que la fonction $\exp(2\varphi)$ est intégrable sur \mathbb{R} . Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x\varphi'(x) \leq C(1+x^2).$$

Notons ρ la mesure de probabilité dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} est

$$x \longmapsto \exp(2\varphi(x)) \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(2\varphi(t)) dt \right)^{-1}.$$

Le modèle. Nous considérons $(X_n^k(t), t \geq 0)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de processus stochastiques tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$((X_n^1(t), \dots, X_n^n(t)), t \geq 0)$$

est l'unique solution du système d'équations différentielles stochastiques

$$dX_n^j(t) = \varphi'(X_n^j(t)) dt + dB_j(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{S_n(t)}{T_n(t) + 1} - X_n^j(t) \left(\frac{S_n(t)}{T_n(t) + 1} \right)^2 \right) dt, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

avec

$$\forall t \geq 0 \quad S_n(t) = X_n^1(t) + \dots + X_n^n(t), \quad T_n(t) = (X_n^1(t))^2 + \dots + (X_n^n(t))^2$$

et (B_1, \dots, B_n) un mouvement Brownien standard n -dimensionnel.

Dans le paragraphe 36, l'étude de ce modèle aboutit à une conjecture pour les fluctuations de $S_n(\sqrt{nt})$, $t \geq 0$, $n \geq 1$. Nous montrons cette conjecture au paragraphe 37 dans le cas particulier donné par le théorème suivant.

Théorème I.9.

Supposons qu'il existe $\sigma^2 > 0$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi(x) = -\frac{x^2}{4\sigma^2},$$

et que, pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires $X_n^1(0), \dots, X_n^n(0)$ sont indépendantes et de même loi $\rho = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$. Notons $(U(t), t \geq 0)$ l'unique solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$dz(t) = -\frac{z^3(t)}{2\sigma^4} dt + dB(t), \quad z(0) = 0,$$

avec $(B(t), t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard sur \mathbb{R} . Alors, pour tout $T > 0$,

$$\left(\frac{S_n(\sqrt{nt})}{n^{3/4}}, 0 \leq t \leq T \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (U(t), 0 \leq t \leq T),$$

pour la convergence en loi dans $C([0, T], \mathbb{R})$.

Dans le paragraphe 37, nous montrons aussi (sous les hypothèses du théorème I.9) que nous avons le diagramme commutatif de convergences en loi suivant : si $(X_n^1(\infty), \dots, X_n^n(\infty))$ a pour loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$ pour tout $n \geq 1$, alors

$$\begin{array}{ccc} \frac{S_n(\sqrt{nt})}{n^{3/4}} & \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} & \frac{X_n^1(\infty) + \dots + X_n^n(\infty)}{n^{3/4}} \\ \downarrow \mathcal{L} & & \downarrow \mathcal{L} \\ U(t) & \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} & \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{s^4}{4\sigma^4}\right) ds \end{array}$$

Le modèle d'Ising Curie-Weiss dynamique que nous présentons dans ce paragraphe ne dépend d'aucun paramètre. De plus les fluctuations dans le cas Gaussien ¹ sont d'ordre $n^{3/4}$ et le processus limite est solution d'une équation différentielle du type de (\mathcal{E}_c) : le modèle se comporte donc de façon critique. Il s'agit bien d'un modèle dynamique de criticalité auto-organisée.

1. Si $\varphi(x) = -x^2/(4\sigma^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $\sigma^2 > 0$, alors la loi ρ qui lui est associée est la Gaussienne centrée de variance σ^2 . C'est pourquoi nous disons qu'il s'agit du cas Gaussien de ce modèle d'Ising Curie-Weiss dynamique.

Chapitre II

Le cas Gaussien

Sommaire

6	Loi de (S_n, T_n) sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	33
7	Calcul de la densité de ν_ρ^{*n} dans le cas gaussien	34
8	Preuve du théorème I.3 dans le cas gaussien	38

Dans ce chapitre, nous utilisons le théorème d'inversion de Fourier pour calculer explicitement la densité de (S_n, T_n) sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, dans le cas où ρ est une loi Normale centrée. Via la méthode de Lapace, nous montrons alors le cas Gaussien du théorème I.3, dans le paragraphe 8.

6 Loi de (S_n, T_n) sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$

Soit ρ une mesure de probabilité qui n'est pas la masse de Dirac en 0. Commençons par expliciter de manière plus simple la loi de (S_n, T_n) sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, qui est la quantité (correctement renormalisée) qui nous intéresse. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mu}_{n,\rho}}(f(S_n, T_n)) &= \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1 + \cdots + x_n, x_1^2 + \cdots + x_n^2) \\ &\quad \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2}\right) \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i). \end{aligned}$$

Définissons ensuite

$$h : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x, y) \exp\left(\frac{x^2}{2y}\right) \mathbb{1}_{\{y > 0\}}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mu}_{n,\rho}}(f(S_n, T_n)) &= \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}^n} h(x_1 + \cdots + x_n, x_1^2 + \cdots + x_n^2) d\rho^{\otimes n}(x) \\ &= \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}^n} h((x_1, x_1^2) + \cdots + (x_n, x_n^2)) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) \\ &= \frac{1}{Z_n} \int_{\mathbb{R}^{2n}} h(z_1 + \cdots + z_n) \prod_{i=1}^n d\nu_\rho(z_i), \end{aligned}$$

où ν_ρ désigne la loi de (Z, Z^2) quand Z est une variable aléatoire de loi ρ . Nous en déduisons la proposition suivante :

Proposition II.1. Notons ν_ρ la loi du couple (Z, Z^2) où Z est une variable aléatoire de loi ρ . Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, le couple (S_n, T_n) a pour loi sur \mathbb{R}^2

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{x^2}{2y}\right) \mathbb{1}_{\{y>0\}} d\nu_\rho^{*n}(x, y).$$

7 Calcul de la densité de ν_ρ^{*n} dans le cas gaussien

Une première approche pour obtenir une loi limite de (S_n, T_n) (correctement renormalisée), sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, est de déterminer précisément la loi ν_ρ^{*n} pour n assez grand, notamment quand ρ admet une densité. C'est ce que nous allons faire dans le cas où $\rho = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ puisqu'avec cette loi il est souvent possible de faire des calculs (notamment par la méthode des résidus). Pour simplifier nous supposons que $\sigma^2 = 1$ et nous notons ν^{*n} au lieu de ν_ρ^{*n} dans ce paragraphe. Déterminons sa fonction caractéristique Φ_n :

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \Phi_n(u, v) = (\Phi_\nu(u, v))^n = \left(\mathbb{E} \left(e^{iuZ + ivZ^2} \right) \right)^n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{iux + ivx^2} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} \right)^n.$$

Pour calculer cette quantité, énonçons quelques résultats.

Définition II.2. La loi Gamma de paramètres $k > 0$ et $\theta > 0$, notée $\Gamma(k, \theta)$, est la loi de probabilité de densité

$$x \mapsto \frac{x^{k-1} e^{-x/\theta}}{\Gamma(k) \theta^k} \mathbb{1}_{x>0}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} , où Γ désigne la fonction Gamma définie par

$$\forall z > 0 \quad \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$$

Définition II.3. La fonction logarithme complexe (ou détermination principale du logarithme complexe), notée Log , est définie sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus]-\infty, 0]$ par

$$\forall z = x + iy \in \Omega \quad \text{Log}(z) = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) + 2i \arctan\left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}}\right).$$

Si $\alpha \in \mathbb{C}$ et $z \in \Omega$, la puissance α -généralisée de z est définie par

$$z^\alpha = \exp(\alpha \text{Log}(z)).$$

Proposition II.4. Pour $k > 0$ et $\theta > 0$, la fonction caractéristique de la loi Gamma $\Gamma(k, \theta)$ est

$$u \in \mathbb{R} \mapsto (1 - \theta iu)^{-k}.$$

Nous renvoyons au chapitre XV de [28] pour une preuve. Nous pouvons maintenant démontrer le lemme clé suivant :

Lemme II.5. Soient $t \in \mathbb{R}$ et $\zeta \in \mathbb{C}$ tel que $\Re(\zeta) > 0$. Alors

$$\int_{\mathbb{R}} e^{itx - \zeta x^2/2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{\Re(\zeta)}} \exp\left(-\frac{t^2}{2\zeta}\right) \left(1 + i \frac{\Im(\zeta)}{\Re(\zeta)}\right)^{-1/2}.$$

Démonstration. Soient $(x, t) \in \mathbb{R}^2$ et $\zeta = a + ib \in \mathbb{C}$ tel que $a = \Re(\zeta) > 0$. Posons

$$K(t, \zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx - \zeta x^2/2} dx.$$

Par factorisation,

$$ixt - \frac{1}{2}\zeta x^2 = -\frac{1}{2}\zeta \left(x - \frac{it}{\zeta}\right)^2 - \frac{t^2}{2\zeta} = -\frac{1}{2}\zeta \left(x - \frac{tb}{|\zeta|} - i\frac{ta}{|\zeta|}\right)^2 - \frac{t^2}{2\zeta}.$$

Ainsi

$$e^{t^2/2\zeta} K(t, \zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\zeta(x - tb/|\zeta| - ita/|\zeta|)^2/2} dx.$$

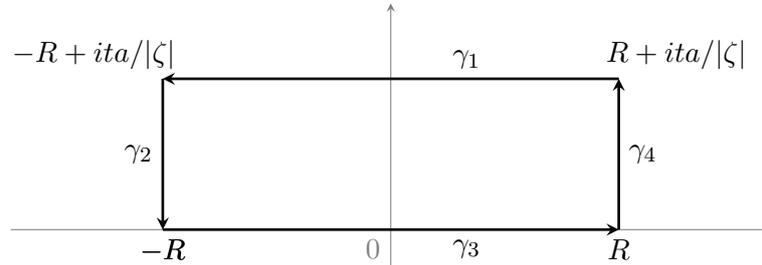
Le changement de variable $y = x - tb/|\zeta|$ donne

$$e^{t^2/2\zeta} K(t, \zeta) = \int_{\mathbb{R}} e^{-\zeta(y - ita/|\zeta|)^2/2} dy = - \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\gamma_1} e^{-\zeta z^2/2} dz,$$

où la dernière intégrale désigne l'intégrale de la fonction entière $z \mapsto e^{-\zeta z^2/2}$ le long du segment γ_1 (orienté) dans le plan complexe d'extrémités $R + ita/|\zeta|$ et $-R + ita/|\zeta|$ (données dans le sens du parcours). Nous allons donc utiliser le théorème des résidus sur le lacet γ , rectangle dans le plan complexe joignant successivement les points $R + ita/|\zeta|$, $-R + ita/|\zeta|$, $-R$ et R :

$$\int_{\gamma} e^{-\zeta z^2/2} dz = 0$$

puisque $z \mapsto \exp(-\zeta z^2/2)$ n'admet aucun pôle. Notons $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ et γ_4 les arêtes successives du rectangle γ .



$$\int_{\gamma_3} e^{-\zeta z^2/2} dz = \int_{-R}^R e^{-\zeta x^2/2} dx \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} e^{-\zeta x^2/2} dx = 2 \int_0^{+\infty} e^{-\zeta x^2/2} dx.$$

Effectuons le changement de variable $y = x^2$ sur $]0, +\infty[$:

$$2 \int_0^{+\infty} e^{-\zeta x^2/2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-\zeta y/2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \int_0^{+\infty} e^{-iby/2} e^{-ay/2} \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{2}{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + i\frac{b}{a}\right)^{-1/2}$$

puisque l'on reconnaît, au facteur normalisateur près, la fonction caractéristique de la loi Gamma de paramètres $1/2$ et $2/a$. Ensuite

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_4} e^{-\zeta z^2/2} dz \right| &= \left| \int_0^1 \exp\left(-\frac{\zeta}{2} \left(R + \frac{iat}{|\zeta|}x\right)^2\right) \frac{iat}{|\zeta|} dx \right| \\ &\leq \frac{a|t|}{|\zeta|} \int_0^1 \exp\left(-\frac{aR^2}{2} + \frac{Ratbx}{|\zeta|} + \frac{a}{2} \left(\frac{atx}{|\zeta|}\right)^2\right) dx \\ &\leq \frac{a|t|}{|\zeta|} \exp\left(-\frac{aR^2}{2} + \frac{Ra|tb|}{|\zeta|} + \frac{a}{2} \left(\frac{at}{|\zeta|}\right)^2\right) \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned}$$

De même

$$\int_{\gamma_2} e^{-\zeta z^2/2} dz \xrightarrow{R \rightarrow +\infty} 0.$$

Finalement, en passant à la limite,

$$\sqrt{\frac{2}{a}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \left(1 + i\frac{b}{a}\right)^{-1/2} + 0 - e^{t^2/2\zeta} K(t, \zeta) + 0 = 0.$$

Nous en déduisons le lemme puisque $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$. □

Proposition II.6. *Si $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$ alors la fonction caractéristique Φ_n de la loi ν_ρ^{*n} est*

$$(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \exp\left(-\frac{n}{2} \left(\frac{u^2}{1-2iv} + \text{Log}(1-2iv)\right)\right).$$

Démonstration. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Posons $\zeta = 1 - 2iv \in \{z \in \mathbb{C} : \Re(z) > 0\}$. Alors

$$\Phi_n(u, v) = (\Phi_\nu(u, v))^n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{iux+ivx^2} e^{-x^2/2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\right)^n = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{iux-\zeta x^2/2} dx\right)^n.$$

Le lemme II.5 implique que

$$\Phi_n(u, v) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\sqrt{2\pi} \exp\left(-\frac{u^2}{2(1-2iv)}\right) (1-2iv)^{-1/2}\right)^n.$$

Ceci est exactement la proposition. □

Connaissant la fonction caractéristique Φ_n de la loi ν^{*n} , nous pouvons en déduire sa densité grâce à la formule d'inversion de la transformée de Fourier. Pour cela il faut d'abord vérifier que Φ_n est intégrable sous la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 (cf. [56]). Pour $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, nous avons $(1-2iv)^{-1} = (1+2iv)/(1+4v^2)$ donc

$$\Re\left(\frac{u^2}{1-2iv} + \text{Log}(1-2iv)\right) = \frac{u^2}{1+4v^2} + \ln(\sqrt{1+4v^2}).$$

Ceci implique que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} |\Phi_n(u, v)| du dv &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{nu^2}{2(1+4v^2)}\right) (1+4v^2)^{-n/4} du dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+4v^2)^{-n/4} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{nu^2}{2(1+4v^2)}\right) du\right) dv \\ &= \int_{\mathbb{R}} (1+4v^2)^{-n/4} \sqrt{\frac{2\pi(1+4v^2)}{n}} dv \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{\mathbb{R}} (1+4v^2)^{-(n-2)/4} dv, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème de Fubini à la troisième intégrale. La fonction

$$v \mapsto (1+4v^2)^{-(n-2)/4}$$

est continue sur \mathbb{R} et intégrable au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$ si et seulement si $n > 4$.

Proposition II.7. *Si $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$ et $n \geq 5$ alors ν_ρ^{*n} admet pour densité*

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \left(\sqrt{2^n \pi n} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^{-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \left(y - \frac{x^2}{n}\right)^{(n-3)/2} \mathbb{1}_{x^2 < ny}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Nous venons de voir que si $n \geq 5$ alors Φ_n est Lebesgue-intégrable sur \mathbb{R}^2 . La formule d'inversion de Fourier (cf. [56]) implique donc que ν_ρ^{*n} admet pour densité

$$f_n : (x, y) \mapsto \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-ixu-iyv} \Phi_n(u, v) du dv$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le théorème de Fubini entraîne que

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iyv}}{(1-2iv)^{n/2}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-ixu - \frac{nu^2}{2(1-2iv)}\right) du \right) dv \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iyv}}{(1-2iv)^{n/2}} K\left(-x, \frac{n}{1-2iv}\right) dv. \end{aligned}$$

Le lemme II.5 implique que, pour tout $v \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} K\left(-x, \frac{n}{1-2iv}\right) &= \sqrt{\frac{2\pi(1+4v^2)}{n}} \exp\left(-\frac{x^2(1-2iv)}{2n}\right) (1+2iv)^{-1/2} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \exp\left(-\frac{x^2(1-2iv)}{2n}\right) \left(\frac{1+4v^2}{1+2iv}\right)^{1/2} \\ &= \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \exp\left(-\frac{x^2(1-2iv)}{2n}\right) (1-2iv)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f_n(x, y) &= \frac{1}{(2\pi)^2} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-iyv - \frac{x^2(1-2iv)}{2n}\right) (1-2iv)^{-(n-1)/2} dv \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left(-\frac{x^2}{2n}\right) \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-iv\left(y - \frac{x^2}{n}\right)\right) (1-2iv)^{-(n-1)/2} dv. \end{aligned}$$

Donc $\sqrt{2\pi n} \exp(x^2/2n) f_n(x, y)$ est la transformée de Fourier inverse de la loi $\Gamma((n-1)/2, 2)$ appliquée en $y - x^2/n$. Par conséquent

$$\sqrt{2\pi n} \exp\left(\frac{x^2}{2n}\right) f_n(x, y) = \left(\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{(n-1)/2}\right)^{-1} \left(y - \frac{x^2}{n}\right)^{(n-3)/2} \exp\left(-\frac{y}{2} + \frac{x^2}{2n}\right) \mathbb{1}_{y > x^2/n}.$$

Finalement

$$f_n(x, y) = \left(\sqrt{2\pi n} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) 2^{(n-1)/2}\right)^{-1} \left(y - \frac{x^2}{n}\right)^{(n-3)/2} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \mathbb{1}_{x^2 < ny}$$

d'où la proposition. □

Le corollaire suivante est une conséquence immédiate des propositions II.1 et II.7 :

Corollaire II.8. Si $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$ et $n \geq 5$ alors, sous $\tilde{\mu}_{n, \rho}$, le couple (S_n, T_n) a pour loi sur \mathbb{R}^2

$$\left(Z_n \sqrt{2^n \pi n} \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)\right)^{-1} \exp\left(\frac{x^2}{2y} - \frac{y}{2}\right) \left(y - \frac{x^2}{n}\right)^{(n-3)/2} \mathbb{1}_{x^2 < ny} dx dy.$$

Dans la suite nous noterons $C_n = Z_n \sqrt{2^n \pi n} \Gamma((n-1)/2)$.

8 Preuve du théorème I.3 dans le cas gaussien

Nous avons tout en main pour chercher des résultats de convergence en loi de S_n correctement renormalisée. Nous allons nous inspirer de la méthode utilisée pour le modèle d'Ising Curie-Weiss général, c'est-à-dire nous ramener au cadre d'application de la méthode de Laplace (ou du moins une variante).

Proposition II.9. *Soient $\alpha, \beta \in]0, 1]$. Si $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$ et $n \geq 5$ alors, sous $\tilde{\mu}_{n, \rho}$, le couple $(S_n/n^\alpha, T_n/n^\beta)$ a pour loi sur \mathbb{R}^2*

$$\frac{n^{\alpha+\beta} n^{(n-3)/2}}{C_n} \exp\left(-n\psi\left(\frac{x^2}{n^{2-2\alpha}}, \frac{y}{n^{1-\beta}}\right)\right) \varphi\left(\frac{x^2}{n^{2-2\alpha}}, \frac{y}{n^{1-\beta}}\right) dx dy,$$

où ψ et φ sont les fonctions définies sur $D^+ = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x \geq 0\}$ par

$$\psi : (x, y) \mapsto \frac{1}{2} \left(-\frac{x}{y} + y - \ln(y - x) \right),$$

$$\varphi : (x, y) \mapsto (y - x)^{-3/2} \mathbf{1}_{D^+}(x, y).$$

Démonstration. Soit f une fonction mesurable bornée. Le corollaire II.8 et le changement de variable $(x, y) \mapsto (n^\alpha x, n^\beta y)$ (de jacobien $n^{\alpha+\beta}$) impliquent que

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n} \left(f \left(\frac{S_n}{n^\alpha}, \frac{T_n}{n^\beta} \right) \right) = \frac{n^{\alpha+\beta}}{C_n} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \exp\left(\frac{n^{2\alpha-\beta} x^2}{2y} - \frac{n^\beta y}{2}\right) \left(n^\beta y - n^{2\alpha-1} x^2\right)^{(n-3)/2} \mathbf{1}_{n^{2\alpha} x^2 < n^{\beta+1} y} dx dy.$$

En mettant alors $n^{(n-3)/2}$ en facteur, nous remarquons que tout ce qui est dans l'intégrale s'exprime en fonction de $x^2/n^{2-2\alpha}$ et $y/n^{1-\beta}$, faisant apparaître ainsi les fonctions ψ et φ . \square

Nous allons maintenant étudier la fonction ψ afin de déterminer quelles valeurs de α et β choisir.

Lemme II.10. *La fonction ψ admet un unique minimum global en $(0, 1)$ et, au voisinage de $(0, 1)$,*

$$\psi(x, y) - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(x^2 + (y - 1)^2) + o(\|x, y - 1\|^2).$$

De plus, nous avons

$$\forall \delta > 0 \quad \inf \{ \psi(x, y) : |x| \geq \delta \text{ ou } |y - 1| \geq \delta \} > 1/2.$$

Démonstration. La fonction ψ est de classe C^2 sur D^+ et, à $y > 0$ fixé,

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{y} + \frac{1}{y - x} \right) \geq 0$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$. Donc la fonction $x \mapsto \psi(x, y)$ est strictement croissante sur $]0, y[$ et $\psi(0, y) = (y - \ln(y))/2$. Ainsi, pour tout $(x, y) \in D^+ \setminus \{(0, 1)\}$,

$$\psi(x, y) > \frac{1}{2}(y - \ln(y)) > \frac{1}{2} = \psi(0, 1).$$

Par conséquent ψ admet un unique minimum en $(0, 1)$. Au voisinage de $(0, 0)$,

$$\begin{aligned}\psi(x, 1+h) &= \frac{1}{2}(-x(1-h+o(h^2)) + 1+h - (h-x - \frac{1}{2}(h-x)^2 + o((h-x)^2)) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{h^2}{4} + \frac{x^2}{4} + o(\|x, h\|^2).\end{aligned}$$

D'où le développement annoncé de ψ au voisinage de $(0, 1)$. De plus, si $|y-1| \geq \delta$ et $x \in [0, y[$, alors

$$\psi(x, y) \geq \frac{1}{2}(1 + \delta - \ln(1 + \delta)) > \frac{1}{2}.$$

Si $x \geq \delta$ et $y > x$, alors

$$2\psi(x, y) \geq -\frac{\delta}{y} + y - \ln(y - \delta) > \inf_{y > \delta} \left(-\frac{\delta}{y} + y - \ln(y - \delta) \right) > 1$$

puisque $\delta \neq 0$. Ainsi $\inf \{ \psi(x, y) : |x| \geq \delta \text{ ou } |y-1| \geq \delta \} > 1/2$. \square

Ce lemme assure que, à (x, y) fixés, quand n tend vers $+\infty$,

$$\psi\left(\frac{x^2}{n^{2-2\alpha}}, \frac{y}{n^{1-\beta}}\right) - \frac{1}{2} \sim \frac{x^4}{4}n^{3-4\alpha} + \frac{n}{4}\left(\frac{y}{n^{1-\beta}} - 1\right)^2.$$

Nous sommes donc amenés à prendre $\alpha = 3/4$ et $\beta = 1$. Enonçons alors le théorème limite suivant :

Théorème II.11. Si $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$ alors, sous $\tilde{\mu}_{n, \rho}$,

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{e^{-x^4/4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-y^4/4} dy} \quad \text{et} \quad \frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} 1.$$

Démonstration. Soient $n \geq 1$ et f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. D'après la proposition II.9,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n} \left(f \left(\frac{S_n}{n^{3/4}}, \frac{T_n}{n} \right) \right) &= \frac{n^{7/4} n^{(n-3)/2}}{C_n} \\ &\quad \times \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \exp \left(-n\psi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y \right) \right) \varphi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y \right) \mathbb{1}_{\sqrt{ny} > x^2} dx dy.\end{aligned}$$

Le développement de ψ donné au lemme II.10 assure qu'il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in D^+$ vérifiant $|x| < \delta$ et $|y-1| < \delta$,

$$\psi(x, y) - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{8}(x^2 + (y-1)^2).$$

Posons

$$A_n = \int_{x^2 < \delta\sqrt{n}} \int_{|y-1| < \delta} f(x, y) \exp \left(-n\psi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y \right) \right) \varphi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y \right) \mathbb{1}_{\sqrt{ny} > x^2} dx dy.$$

En effectuant le changement de variable $(x, y) \mapsto (x, y/\sqrt{n} + 1)$,

$$\begin{aligned}\sqrt{n}e^{n/2}A_n &= \int_{x^2 < \delta\sqrt{n}} \int_{|y| < \delta\sqrt{n}} f \left(x, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1 \right) \exp \left(-n\psi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1 \right) \right) \\ &\quad \exp \left(\frac{n}{2} \right) \varphi \left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1 \right) \mathbb{1}_{y + \sqrt{n} > x^2} dx dy.\end{aligned}$$

Le lemme II.10 implique que

$$n\psi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1\right) - \frac{n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{4} + \frac{y^2}{4}.$$

De plus la continuité de f et φ sur D^+ assure que

$$f\left(x, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1\right) \varphi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + 1\right) \mathbb{1}_{y+\sqrt{n}>x^2} \mathbb{1}_{x^2<\delta\sqrt{n}} \mathbb{1}_{|y|<\delta\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x, 1).$$

Enfin la fonction à l'intérieur de l'intégrale est dominée par la fonction indépendante de n et intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 ,

$$(x, y) \mapsto \|f\|_\infty \exp\left(-\frac{1}{8}(x^4 + y^2)\right).$$

Donc d'après le théorème de convergence dominée,

$$\sqrt{n}e^{n/2}A_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, 1)e^{-x^4/4}e^{-y^2/4} dx dy = \sqrt{4\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x, 1)e^{-x^4/4} dx.$$

Posons ensuite

$$B_\delta = \{(x, y) \in D^+ : |x| < \delta, |y - 1| < \delta\}$$

et

$$B_n = \int_{(x^2/\sqrt{n}, y) \in B_\delta^c} f(x, y) \exp\left(-n\psi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right)\right) \varphi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right) \mathbb{1}_{\sqrt{ny}>x^2} dx dy.$$

Soit $\varepsilon = \inf\{\psi(x, y) : (x, y) \in B_\delta^c\}$. Nous avons

$$|B_n| \leq e^{-(n-2)\varepsilon} \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-2\psi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right)\right) \varphi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right) \mathbb{1}_{\sqrt{ny}>x^2} dx dy.$$

Le changement de variable $(x, y) \mapsto (xn^{1/4}, y)$ donne

$$\sqrt{n}e^{n/2}|B_n| \leq e^{2\varepsilon} \|f\|_\infty e^{-n(\varepsilon-1/2)} n^{3/4} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\psi(x^2, y)} \varphi(x^2, y) \mathbb{1}_{x^2 < y} dx dy.$$

Le lemme II.10 assure que $\varepsilon > 1/2$ et, d'après le changement de variable donné par la fonction $(x, y) \mapsto (x, y + x^2)$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\psi(x^2, y)} \varphi(x^2, y) \mathbb{1}_{x^2 < y} dx dy \leq e \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \left(\int_0^{+\infty} \frac{e^{-y}}{\sqrt{y}} dy \right) < +\infty.$$

Ainsi $\sqrt{n}e^{n/2}B_n$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Finalement

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \exp\left(-n\psi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right)\right) \varphi\left(\frac{x^2}{\sqrt{n}}, y\right) \mathbb{1}_{\sqrt{ny}>x^2} dx dy &= A_n + B_n \\ &\stackrel{+\infty}{=} \frac{e^{-n/2}}{\sqrt{n}} \left(\sqrt{4\pi} \int_{\mathbb{R}} f(x, 1)e^{-x^4/4} dx + o(1) + o(1) \right) \\ &\stackrel{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4\pi}{n}} e^{-n/2} \int_{\mathbb{R}} f(x, 1)e^{-x^4/4} dx. \end{aligned}$$

En prenant $f = 1$, nous obtenons

$$\frac{C_n}{n^{7/4}n^{(n-3)/2}} \stackrel{+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{4\pi}{n}} e^{-n/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-x^4/4} dx.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n} \left(f \left(\frac{S_n}{n^{3/4}}, \frac{T_n}{n} \right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(x, 1) \frac{e^{-x^4/4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^4/4} du} = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \left(\frac{e^{-x^4/4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^4/4} du} \otimes \delta_1(y) \right).$$

Ceci est précisément le théorème. \square

Nous déduisons de ce théorème le résultat pour une gaussienne centrée de variance $\sigma^2 > 0$:

Théorème II.12. Si $\rho = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors, sous $\tilde{\mu}_{n, \rho}$,

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{e^{-x^4/4\sigma^4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-y^4/4\sigma^4} dy} \quad \text{et} \quad \frac{T_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \sigma^2.$$

Démonstration. Si X est de loi $\rho = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ et Z de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ alors les couples (X, X^2) et $(\sigma Z, \sigma^2 Z^2)$ ont même loi. Ainsi un changement de variable simple donne la densité de ν_{ρ}^{*n} (pour $n \geq 5$) par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 :

$$(x, y) \mapsto \left(\sqrt{2^n \pi n} \sigma^n \Gamma \left(\frac{n-1}{2} \right) \right)^{-1} \exp \left(-\frac{y}{2\sigma^2} \right) \left(y - \frac{x^2}{n} \right)^{(n-3)/2} \mathbb{1}_{ny > x^2},$$

c'est-à-dire $(x, y) \mapsto f_n(x/\sigma, y/\sigma^2)$ où f_n est la densité pour $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$. Donc, pour toute fonction f continue bornée,

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mu}_n} \left(f \left(\frac{S_n}{n^{3/4}}, \frac{T_n}{n} \right) \right) = \frac{n^{7/4}}{C_n} \int_{\mathbb{R}^2} f(\sigma x, \sigma^2 y) \exp \left(\frac{\sqrt{n} x^2}{2y} - \frac{ny}{2} \right) \left(y - \frac{x^2}{n} \right)^{(n-3)/2} \mathbb{1}_{x^2 < ny} dx dy.$$

D'après le théorème II.11, quand n tend vers $+\infty$, cette quantité tend vers

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(\sigma x, \sigma^2 y) \left(\frac{e^{-x^4/4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^4/4} du} \otimes \delta_1(y) \right)$$

qui est égale, après un ultime changement de variable, à

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \left(\frac{e^{-x^4/4\sigma^4} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-u^4/4\sigma^4} du} \otimes \delta_{\sigma^2}(y) \right).$$

Ceci termine la preuve du théorème. \square

Chapitre III

La transformée de Cramér

Sommaire

9	Une approche basée sur la théorie des grandes déviations	43
a)	Le théorème de Cramér en dimension finie	43
b)	Grandes déviations pour $(S_n/n, T_n/n)$ et heuristiques	45
10	Résultats généraux sur la transformée de Cramér	46
a)	Définitions et premières propriétés	46
b)	Non-dégénérescence d'une mesure de probabilité	47
c)	Points réalisant le supremum définissant la transformée de Cramér	48
d)	Comportement de la transformée de Cramér J sur ∂D_J	51
e)	Régularité de la transformée de Cramér	54
f)	Relation asymptotique entre densité et transformée de Cramér	56

Dans le chapitre précédent, nous avons calculé explicitement la densité de ν_ρ^{*n} quand ρ est une Gaussienne. Cependant ce calcul n'est pas envisageable en général. Dans la suite, nous développons une approche basée sur la théorie de Cramér et des grandes déviations afin d'étudier le comportement asymptotique de la mesure ν_ρ^{*n} .

Ce chapitre est découpé en deux parties : d'abord nous voyons comment la théorie des grandes déviations nous permet heuristiquement de traiter notre problème, en le reliant à l'étude de la transformée de Cramér I de ν_ρ^{*n} . Ensuite, dans le paragraphe 10, nous étudions des généralités sur la transformée de Cramér d'une loi de probabilité pour pouvoir légitimer nos heuristiques dans les chapitres suivants.

9 Une approche basée sur la théorie des grandes déviations

a) Le théorème de Cramér en dimension finie

Soit ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Donnons-nous $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi ν . Pour tout $n \geq 1$, nous posons

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

Nous définissons la Log-Laplace de ν sur \mathbb{R}^d par

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^d \quad L(\lambda) = \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp\langle \lambda, z \rangle d\nu(z).$$

La transformée de Cramér J de ν est la fonction définie sur \mathbb{R}^d par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad J(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} (\langle x, \lambda \rangle - L(\lambda)).$$

Nous étudierons en détail cette fonction dans le paragraphe 10. Elle apparaît dans le théorème de Cramér :

Théorème III.1 (Cramér). *Si la fonction L est finie au voisinage de 0 alors $(S_n/n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la bonne fonction de taux J . C'est-à-dire, pour tout borélien A de \mathbb{R}^d ,*

$$\begin{aligned} -\inf \{ J(x) : x \in \overset{\circ}{A} \} &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{n} \in A \right) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{n} \in A \right) \leq -\inf \{ J(x) : x \in \bar{A} \}. \end{aligned}$$

Des résultats généraux sur les fonctions de taux et les grandes déviations sont exposées dans le paragraphe B de l'annexe. Notamment le théorème B.10 présente une version plus générale du théorème de Cramér en dimension finie.

Donnons-nous maintenant $n \geq 1$ et une fonction ψ mesurable de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} telle que

$$Z_{n,\psi} = \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left(n\psi \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) \right) \prod_{i=1}^n d\nu(x_i) < +\infty.$$

Supposons que (Y_1, \dots, Y_n) est un n -uplet de variables aléatoires de loi

$$\frac{1}{Z_{n,\psi}} \exp \left(n\psi \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) \right) \prod_{i=1}^n d\nu(x_i).$$

Notons ν_n la loi de S_n/n sous $\nu^{\otimes n}$. La formule de transfert nous assure alors que

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \quad \mathbb{P} \left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \in A \right) = \frac{1}{Z_{n,\psi}} \int_A \exp(n\psi(x)) d\nu_n(x),$$

où $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ désigne la tribu borélienne sur \mathbb{R}^d . Le théorème de Cramér nous suggère que

$$d\nu_n(x) \underset{n \rightarrow +\infty}{\approx} \exp(-nJ(x)) dx, \tag{A}$$

à une normalisation près. Ainsi

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \quad \mathbb{P} \left(\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n} \in A \right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\approx} \frac{\int_A \exp(-n(J - \psi)(x)) dx}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-n(J - \psi)(x)) dx}.$$

L'étude de la fonction $J - \psi$ et la méthode de Laplace devrait nous donner des informations sur la convergence, et la vitesse de convergence, de $(Y_1 + \cdots + Y_n)/n$. La grosse difficulté de cette approche est de trouver les hypothèses les plus faibles possibles sur ν pour légitimer l'utilisation de l'approximation (A), et lui donner un sens. Dans la dernière partie du paragraphe 10, nous verrons qu'une variante de (A) est vraie pour des mesures de probabilité ν dont la densité vérifie quelques conditions d'intégrabilité justifiant une certaine inversion de Fourier. Enfin, dans le chapitre VI, nous développerons un cadre général (mais dont la démonstration est bien plus technique) pour obtenir les fluctuations de $(Y_1 + \cdots + Y_n)/n$.

b) Grandes déviations pour $(S_n/n, T_n/n)$ et heuristiques

Appliquons les résultats du paragraphe précédent à notre modèle. Donnons-nous $n \geq 1$ et considérons (X_n^1, \dots, X_n^n) de loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ avec

$$\begin{aligned} d\tilde{\mu}_{n,\rho}(x_1, \dots, x_n) &= \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \mathbb{1}_{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) \\ &= \frac{1}{Z_n} \exp\left(nF\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}\right)\right) \mathbb{1}_{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) \\ &= \frac{1}{Z_n} \exp\left(nF\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i, x_i^2)\right)\right) \mathbb{1}_{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i), \end{aligned}$$

où F est la fonction définie sur $\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\quad F(x, y) = \frac{x^2}{2y}.$$

Notons $\tilde{\nu}_{n,\rho}$ la loi de

$$\left(\frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n}, \frac{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}{n}\right)$$

quand (Y_1, \dots, Y_n) sont indépendantes et de même loi ρ . La formule de transfert nous assure que

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \quad \tilde{\mu}_{n,\rho}\left(\left(\frac{S_n}{n}, \frac{T_n}{n}\right) \in A\right) = \frac{1}{Z_n} \int_A \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) \mathbb{1}_{\{y>0\}} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y).$$

Afin de simplifier l'étude et de nous ramener à une fonction bornée dans l'exponentielle (ce qui sera très utile pour la suite), nous allons restreindre l'intégrale ci-dessus. Pour cela, remarquons que la convexité de $t \mapsto t^2$ sur \mathbb{R} entraîne que

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^2 \leq \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}.$$

Introduisons les ensembles

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y\} \quad \text{et} \quad \Delta^* = \Delta \setminus \{(0, 0)\}.$$

Nous avons alors $\tilde{\nu}_{n,\rho}(\Delta^c) = 0$ et nous en déduisons le résultat suivant :

Proposition III.2. *Notons $\theta_{n,\rho}$ la loi de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$. Nous avons*

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \quad \theta_{n,\rho}(A) = \frac{\int_{A \cap \Delta^*} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y)}{\int_{\Delta^*} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y)}.$$

Nous définissons la Log-Laplace Λ de ν_ρ par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \Lambda(u, v) = \ln \int_{\mathbb{R}^2} e^{us+vt} d\nu_\rho(s, t) = \ln \int_{\mathbb{R}} e^{uz+ vz^2} d\rho(z).$$

Remarquons que $\Lambda(u, v) < +\infty$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 0[$. Supposons que Λ est finie sur un voisinage de 0. Le théorème de Cramér implique alors que $(\tilde{\nu}_{n,\rho})_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la transformée de Cramér I de ν_ρ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad I(x, y) = \sup_{(u,v) \in \mathbb{R}^2} (xu + yv - \Lambda(u, v)).$$

Une heuristique classique issue du théorème de Cramér et du lemme de Varadhan (cf. lemme B.7 de l'annexe) est la suivante : $\theta_{n,\rho}$ se concentre asymptotiquement vers les minima de la fonction

$$G = I - F - \inf_{\Delta^*} (I - F).$$

Si G admet un unique minimum en $(x_0, y_0) \in \Delta^*$ alors cette heuristique suggère que, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n)$ converge en probabilité vers (x_0, y_0) . De plus, comme nous l'avons vu dans le paragraphe précédent, la mesure $\tilde{\nu}_{n,\rho}$ suit approximativement la loi $\exp(-nI(x, y)) dx dy$, à une normalisation près. Ainsi, pour toute fonction h continue bornée et pour tous $\alpha, \beta > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\tilde{\mu}_{n,\rho}} \left(h \left(\frac{S_n - nx_0}{n^{1-1/\alpha}} \right) \right) &\underset{n \rightarrow +\infty}{\approx} \frac{\int_{\Delta^*} h((x - x_0)n^{1/\alpha}) \exp(-nG(x, y)) dx dy}{\int_{\Delta^*} \exp(-nG(x, y)) dx dy} \\ &\underset{n \rightarrow +\infty}{\approx} \frac{\int h(x) \exp(-nG(xn^{-1/\alpha} + x_0, yn^{-1/\beta} + y_0)) dx dy}{\int \exp(-nG(xn^{-1/\alpha} + x_0, yn^{-1/\beta} + y_0)) dx dy}. \end{aligned}$$

Nous sommes alors amenés à utiliser la méthode de Laplace dont le point de départ est l'étude de la fonction G au voisinage de (x_0, y_0) . Il s'agit de trouver un couple (α, β) tel que, quand (h, k) tend vers $(0, 0)$,

$$G(x_0 + h, y_0 + k) \sim Ah^\alpha + Bk^\beta,$$

où $A, B > 0$ sont à déterminer. Nous avons alors

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad -nG(xn^{-1/\alpha} + x_0, yn^{-1/\beta} + y_0) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} -Ax^\alpha - By^\beta.$$

Dans le second paragraphe de ce chapitre, nous allons légitimer les heuristiques précédentes en étudiant des généralités sur la transformée de Cramér d'une loi de probabilité. Ensuite, dans le chapitre IV, nous montrerons que (sous certaines hypothèses sur ρ) la fonction $I - F$ admet bien un unique minimum sur Δ^* en $(0, \sigma^2)$ et que $(\alpha, \beta) = (4, 2)$.

10 Résultats généraux sur la transformée de Cramér

Ce paragraphe rassemble un certain nombre de résultats généraux sur la transformée de Cramér d'une loi de probabilité qui seront essentielles pour la démonstration du théorème I.3.

a) Définitions et premières propriétés

Soit ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^d$, posons

$$L(\lambda) = \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp\langle \lambda, z \rangle d\nu(z).$$

La fonction L est appelée la Log-Laplace de ν . Elle est bien définie sur \mathbb{R}^d à valeurs dans $] -\infty, +\infty]$.

Proposition III.3. *La fonction L est une fonction semi-continue inférieurement et convexe sur \mathbb{R}^d . Notons*

$$D_L = \{t \in \mathbb{R}^d : L(t) < +\infty\}.$$

L'ensemble D_L est convexe et contient 0. Si $\overset{\circ}{D}_L \neq \emptyset$ alors L est de classe C^∞ sur $\overset{\circ}{D}_L$ et

$$\forall \lambda \in \overset{\circ}{D}_L, \alpha \in \mathbb{N}^d \quad \frac{\partial^\alpha \exp(L)}{\partial \lambda_1^{\alpha_1} \dots \partial \lambda_d^{\alpha_d}}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} z_1^{\alpha_1} \dots z_d^{\alpha_d} \exp\langle \lambda, z \rangle d\nu(z).$$

La convexité de L découle de l'inégalité de Hölder et la semi-continuité inférieure de L découle du lemme de Fatou. Nous nous référons à [22] et [25] pour la preuve de ces résultats. Notons aussi que si ν est à support borné alors $D_L = \mathbb{R}^d$.

Nous définissons ensuite la transformée de Cramér de ν par

$$J : x \in \mathbb{R}^d \mapsto \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} (\langle \lambda, x \rangle - L(\lambda)).$$

Il s'agit de la transformée de Fenchel-Legendre de L . Notons

$$D_J = \{x \in \mathbb{R}^d : J(x) < +\infty\}.$$

La proposition suivante rassemble des premières propriétés de J :

Proposition III.4. (a) J est une fonction positive convexe et semi-continue inférieurement.

(b) Si L est finie dans un voisinage de 0 (c'est-à-dire $0 \in \overset{\circ}{D}_L$) alors les ensembles de niveaux de J , $\{x \in \mathbb{R}^d : J(x) \leq a\}$, $a \in \mathbb{R}$, sont compacts.

(c) Si $t \in \overset{\circ}{D}_L$ et $u = \nabla L(t)$ alors $J(u) = \langle t, u \rangle - L(t)$.

(d) Si ν admet un moment d'ordre 1, alors $J(m) = 0$ où

$$m = \int_{\mathbb{R}^d} x d\nu(x).$$

Si de plus $0 \in \overset{\circ}{D}_L$ alors J admet un unique minimum en m .

Démonstration. Nous renvoyons à [22] pour la démonstration des points (a), (b) et (c). Démontrons le point (d) (cf. chapitre V. de [53]). Soit $\lambda \in \mathbb{R}^d$. L'inégalité de Jensen entraîne que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp \langle \lambda, x \rangle d\nu(x) \geq \exp \int_{\mathbb{R}^d} \langle \lambda, x \rangle d\nu(x) = \exp \langle \lambda, m \rangle.$$

Par conséquent $L(\lambda) \geq \langle \lambda, m \rangle$ et donc $J(m) \leq 0$. Comme J est une fonction positive, nous en déduisons que $J(m) = 0$ et donc que m est un minimum de J . Montrons qu'il est le seul : supposons que x_0 est un minimum de J . Alors $J(x_0) = 0$ et donc

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^d \quad \langle \lambda, x_0 \rangle - L(\lambda) \leq 0.$$

Ainsi pour tout $t > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{L(t\lambda) - L(0)}{t} = \frac{L(t\lambda)}{t} \geq \frac{\langle t\lambda, x_0 \rangle}{t} = \langle \lambda, x_0 \rangle.$$

Or L est différentiable en $0 \in \overset{\circ}{D}_L$ donc en faisant tendre t vers 0 nous obtenons que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^d \quad \langle \nabla L(0), \lambda \rangle \geq \langle x_0, \lambda \rangle.$$

Ceci entraîne que $x_0 = \nabla L(0) = m$. D'où l'unicité. \square

b) Non-dégénérescence d'une mesure de probabilité

Une mesure de probabilité sur \mathbb{R} est dite dégénérée s'il s'agit d'une masse de Dirac. Nous allons généraliser cette définition pour des mesures sur \mathbb{R}^d . Nous nous référons pour cela à [9] et [28].

Définition III.5. Une mesure de probabilité ν sur \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, est dite dégénérée si son support est inclus dans un hyperplan de \mathbb{R}^d , c'est-à-dire, s'il existe un hyperplan \mathcal{H} de \mathbb{R}^d tel que $\nu(\mathcal{H}) = 1$.

Les lemmes suivants illustrent bien l'intérêt de cette notion :

Lemme III.6. *Si ν est dégénérée sur \mathbb{R}^d alors sa transformée de Cramér J est infinie en dehors de l'hyperplan \mathcal{H} de \mathbb{R}^d pour lequel $\nu(\mathcal{H}) = 1$.*

Démonstration. Supposons que \mathcal{H} est l'hyperplan d'équation $\langle a_0, z \rangle = t$, avec $a_0 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $t \in \mathbb{R}$. Notons $t_0 = a_0 t / \|a_0\|$. Remarquons que $z \in \mathcal{H}$ si et seulement si $z - t_0$ appartient à l'orthogonal de a_0 . Ainsi pour tout $x \notin \mathcal{H}$,

$$\begin{aligned} J(x) &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} \left(\langle \lambda, x - t_0 \rangle - \ln \int_{\mathcal{H}} e^{\langle \lambda, z - t_0 \rangle} d\nu(z) \right) \\ &\geq \sup_{\lambda \in \text{Vect}(a_0)} \left(\langle \lambda, x - t_0 \rangle - \ln \int_{\mathcal{H}} e^0 d\nu(z) \right) \\ &= \sup_{k \in \mathbb{R}} (k \langle a_0, x - t_0 \rangle) = +\infty. \end{aligned}$$

D'où le lemme. □

Lemme III.7. *Soient ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d dont la matrice de covariance Σ est bien définie. Nous avons que ν est non-dégénérée sur \mathbb{R}^d si et seulement si Σ est inversible.*

Démonstration. Soit Z une variable aléatoire de loi ν . Posons $Y = Z - \mathbb{E}(Z)$. Supposons que Σ n'est pas inversible. Comme elle est symétrique réelle, elle est diagonalisable et donc 0 est une valeur propre de Σ . Il existe alors un vecteur colonne x différent du vecteur nul tel que $\Sigma x = 0$ dans \mathbb{R}^d . Alors

$$\mathbb{E}(\langle Y, x \rangle^2) = \mathbb{E}(\langle Y, x \rangle \langle x, Y \rangle) = \mathbb{E}({}^t x Y {}^t Y x) = {}^t x \mathbb{E}(Y {}^t Y) x = {}^t x \Sigma x = 0.$$

Par conséquent $\langle Y, x \rangle = 0$ presque sûrement. C'est-à-dire, avec probabilité 1,

$$Z \in \{z \in \mathbb{R}^d : \langle x, z \rangle = \mathbb{E}(\langle x, Z \rangle)\}.$$

Cela signifie que ν est dégénérée.

Réciproquement, supposons que ν est dégénérée. Alors il existe un vecteur non nul $a \in \mathbb{R}^d$ et une constante $t \in \mathbb{R}$ telles que $\langle Z, a \rangle = t$ avec probabilité 1. En passant à l'espérance, nous calculons alors que $t = \langle \mathbb{E}(Z), a \rangle$ et par conséquent, avec probabilité 1, $\langle Y, a \rangle = 0$. D'où

$$\Sigma a = \mathbb{E}(Y {}^t Y a) = \mathbb{E}(Y \langle Y, a \rangle) = 0 \in \mathbb{R}^d.$$

Ainsi a est un vecteur propre pour la valeur propre 0 de la matrice Σ . Cette dernière n'est donc pas inversible. □

c) Points réalisant le supremum définissant la transformée de Cramér

Nous supposons désormais que ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d qui est non-dégénérée. Nous allons nous intéresser à présent aux points λ qui réalisent le supremum définissant $J(x)$, $x \in D_J$. Nous désignons par \mathcal{C} l'adhérence de l'enveloppe convexe du support de ν .

Lemme III.8. *Supposons que ν est une mesure de probabilité non-dégénérée sur \mathbb{R}^d . Alors l'intérieur de \mathcal{C} est non vide et $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \subset D_J \subset \mathcal{C}$. De plus pour tout $x \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, le supremum définissant $J(x)$ est atteint en un point $\lambda_x \in D_L$.*

Démonstration. La non-dégénérescence de ν signifie que le support de ν ne se concentre pas sur un hyperplan de \mathbb{R}^d . Par conséquent le support de ν contient des vecteurs linéairement indépendants et l'enveloppe convexe de ces vecteurs est d'intérieur non vide. Ainsi $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \neq \emptyset$.

Montrons d'abord que $D_J \subset \mathcal{C}$ (nous nous référons pour cela au lemme 12.8 de [12]). Supposons que $\mathcal{C} \neq \mathbb{R}^d$ (sinon le résultat est immédiat). Soit $x \notin \mathcal{C}$. Il découle du théorème de séparation de Hahn-Banach (cf. [55]) qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall y \in \mathcal{C} \quad \langle \lambda, y \rangle \leq a < \langle \lambda, x \rangle.$$

Puisque $\nu(\mathcal{C}) = 1$, nous avons, pour tout $t > 0$,

$$J(x) \geq \langle t\lambda, x \rangle - \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\langle t\lambda, y \rangle) d\nu(y) = -\ln \int_{\mathcal{C}} \exp(t\langle \lambda, y \rangle - t\langle \lambda, x \rangle) d\nu(y) \geq t(\langle \lambda, x \rangle - a).$$

En faisant tendre t vers $+\infty$, nous obtenons que $J(x) = +\infty$. Ainsi $D_J \subset \mathcal{C}$.

Soit $x \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^d telle que

$$J(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\langle \lambda_n, x \rangle - \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\langle \lambda_n, z \rangle) d\nu(z) \right) = -\ln \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\langle \lambda_n, z - x \rangle) d\nu(z).$$

Supposons que $|\lambda_n|$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$ et montrons que cela conduit à une contradiction. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = \lambda_n |\lambda_n|^{-1}$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite bornée donc, quitte à en extraire une sous-suite, nous pouvons supposer qu'il existe $u \in \mathbb{R}^d$, de norme 1, telle que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u . Soit v un vecteur du support de ν et U un ouvert de \mathbb{R}^d contenant v . Par définition du support, $\nu(U) > 0$. Supposons que $\langle u, z - x \rangle > 0$ pour tout $z \in U$. Alors, d'après le lemme de Fatou,

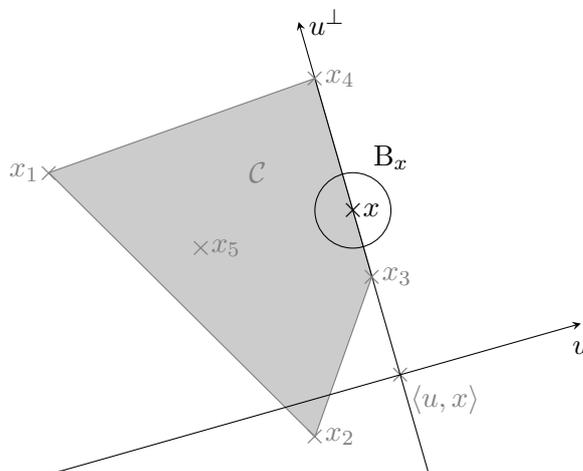
$$+\infty = \int_U \liminf_{n \rightarrow +\infty} \exp(|\lambda_n| \langle u_n, z - x \rangle) d\nu(z) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_U \exp(|\lambda_n| \langle u_n, z - x \rangle) d\nu(z).$$

Ainsi

$$\exp(-J(x)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(|\lambda_n| \langle u_n, z - x \rangle) d\nu(z) = +\infty.$$

Donc $J(x) = -\infty$, ce qui est absurde car J est une fonction positive ou nulle. Nous avons montré que, pour tout vecteur v appartenant au support de ν et pour tout ouvert U de \mathbb{R}^d contenant v , il existe $z \in U$ tel que $\langle u, z - x \rangle \leq 0$. Il en découle que, pour tout v appartenant au support de ν , $\langle u, v \rangle \leq \langle u, x \rangle$. Cette inégalité est stable par combinaisons convexes, donc

$$\forall y \in \mathcal{C} \quad \langle u, y \rangle \leq \langle u, x \rangle.$$



CAS OÙ ν EST DISCRÈTE ET CHARGE 5 POINTS DE \mathbb{R}^2 .

Comme $x \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$, il existe une boule B_x centrée en x et contenue dans \mathcal{C} . Ainsi nécessairement il existe $y_0 \in B_x$ tel que $\langle u, y_0 \rangle > \langle u, x \rangle$, ce qui est absurde. Donc $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admet une sous-suite bornée. Nous en déduisons l'existence d'une sous-suite $(\lambda_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un vecteur λ_x de \mathbb{R}^d . D'après le lemme de Fatou,

$$\begin{aligned} J(x) &= \langle \lambda_x, x \rangle - \ln \lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \langle \lambda_{\varphi(n)}, z \rangle d\nu(z) \\ &\leq \langle \lambda_x, x \rangle - \ln \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \langle \lambda_{\varphi(n)}, z \rangle d\nu(z) \\ &\leq \langle \lambda_x, x \rangle - \ln \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \exp \langle \lambda_{\varphi(n)}, z \rangle d\nu(z) \\ &= \langle \lambda_x, x \rangle - \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp \langle \lambda_x, z \rangle d\nu(z) \leq J(x). \end{aligned}$$

Ainsi $J(x) = \langle \lambda_x, x \rangle - L(\lambda_x)$. Ceci assure que $J(x) < +\infty$ (car $L(\lambda_x) \neq -\infty$) et donc que $\overset{\circ}{\mathcal{C}} \subset D_J$. De plus si $L(\lambda_x) = +\infty$ alors $J(x) = -\infty$, ce qui est absurde. Donc $L(\lambda_x) < \infty$, ce qui montre que le supremum définissant $J(x)$ est atteint en un point $\lambda_x \in \mathbb{R}^d$ en lequel la Log-Laplace L de ν est finie. \square

Si D_L est un ouvert de \mathbb{R}^d alors nous avons directement que, pour $(x, y) \in \overset{\circ}{D}_J$, le supremum définissant $J(x, y)$ est atteint en un point de $\overset{\circ}{D}_L$. C'est le cas lorsque le support de ν est borné. C'est aussi le cas pour la loi ν_ρ quand ρ est une gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, où nous avons alors $D_L = \mathbb{R} \times]-\infty, 1/(2\sigma^2)[$.

Nous allons voir que c'est également le cas quand L est steep, au sens de la définition suivante :

Définition III.9. Soit f une fonction convexe de \mathbb{R}^d à valeurs dans $] -\infty, +\infty]$ qui est différentiable sur l'intérieur de l'ensemble

$$D_f = \{ x \in \mathbb{R}^d : f(x) < +\infty \},$$

que nous supposons non vide. La fonction f est dite « steep » si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla f(x_n)\| = +\infty$$

pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $\overset{\circ}{D}_f$ qui converge vers un point du bord de D_f .

Remarquons que, si f est une fonction convexe semi-continue inférieurement et différentiable sur $\overset{\circ}{D}_f \neq \emptyset$ (c'est le cas de la Log-Laplace d'une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d) telle que D_f est un ouvert de \mathbb{R}^d , alors elle est steep. En effet, dans ce cas, pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de $\overset{\circ}{D}_f$ qui converge vers un point du bord de D_f ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\nabla f(x_n)\| = +\infty$$

car sinon il existe un point x du bord et une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ de $\overset{\circ}{D}_f$ qui converge vers x et telle que $(\|\nabla f(x_n)\|)_{n \geq 1}$ est bornée par un certain réel $M > 0$. La convexité de f entraîne que, pour tous $t > 0$ et $n \geq 1$,

$$f(x_0) - f(x_n) = \frac{(1-t)f(x_n) + tf(x_0) - f(x_n)}{t} \geq \frac{f((1-t)x_n + tx_0) - f(x_n)}{t}.$$

Faisons tendre t vers 0 :

$$f(x_0) - f(x_n) \geq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_n + t(x_0 - x_n)) - f(x_n)}{t} = \langle \nabla f(x_n), x_0 - x_n \rangle.$$

De plus l'inégalité de Cauchy-Schwarz implique que, pour tout $n \geq 1$,

$$f(x_n) \leq f(x_0) + \langle \nabla f(x_n), x_n - x_0 \rangle \leq f(x_0) + M \|x_n - x_0\|.$$

Mais $x \notin \overset{\circ}{D}_f = D_f$ et f est semi-continue inférieurement donc

$$+\infty = f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(x_n).$$

Par conséquent $(f(x_n))_{n \geq 1}$ tend vers $+\infty$ et donc $(\|x_n - x_0\|)_{n \geq 1}$ également. Nous en déduisons que $\|x - x_0\| = +\infty$: c'est absurde.

Lemme III.10 (Ioffe). *Soit f une fonction convexe de \mathbb{R}^d à valeurs dans $] -\infty, +\infty]$ qui est finie sur D_f d'intérieur non vide. Supposons que f est différentiable sur $\overset{\circ}{D}_f$ et steep. Si $f(0) = 0$ et s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^d$ tel que*

$$\sup_{u \in \mathbb{R}^d} (\langle u, x_0 \rangle - f(u)) = 0$$

alors 0 appartient à l'intérieur de D_f .

Il s'agit du lemme A.5 de [22]. Notons que, si ν est une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d qui admet un moment d'ordre 1 et dont la Log-Laplace L est steep, alors $0 \in \overset{\circ}{D}_L$. Ceci découle du lemme précédent puisque $L(0) = 0$ et, en notant m le moment d'ordre 1 de ν ,

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^d} (\langle t, m \rangle - L(t)) = J(m) = 0.$$

Nous avons aussi le corollaire suivant :

Corollaire III.11. *Supposons que ν est non-dégénérée sur \mathbb{R}^d . Si $\overset{\circ}{D}_L$ est non vide et si L est steep alors, pour tout $x \in \overset{\circ}{D}_J$, le supremum définissant $J(x)$ est atteint en un point $\lambda_x \in \overset{\circ}{D}_L$.*

Démonstration. Notons \mathcal{C} l'adhérence de l'enveloppe convexe du support de ν . Le lemme III.8 entraîne que $\overset{\circ}{D}_J = \overset{\circ}{\mathcal{C}} \neq \emptyset$. Si $x \in \overset{\circ}{D}_J$, le supremum définissant $J(x)$ est atteint en un point $\lambda_x \in D_L$. Il reste à montrer que λ_x n'est pas un point du bord de D_L . Posons

$$\tilde{L} : \lambda \mapsto L(\lambda + \lambda_x) - L(\lambda_x).$$

La fonction \tilde{L} est convexe, différentiable sur $\overset{\circ}{D}_{\tilde{L}} \neq \emptyset$, steep, nulle en 0 et

$$\begin{aligned} \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} (\langle \lambda, x \rangle - \tilde{L}(\lambda)) &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} (\langle x, \lambda \rangle - L(\lambda + \lambda_x)) + L(\lambda_x) \\ &= \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} (\langle x, \lambda \rangle - \langle x, \lambda_x \rangle - L(\lambda)) + L(\lambda_x) \\ &= J(x) - (\langle x, \lambda_x \rangle - L(\lambda_x)) = 0. \end{aligned}$$

Il découle alors du lemme précédent que $0 \in \overset{\circ}{D}_{\tilde{L}}$ et donc que $\lambda_x \in \overset{\circ}{D}_L$. □

d) Comportement de la transformée de Cramér J sur ∂D_J

Dans le paragraphe précédent, nous avons étudié le comportement de J sur $\overset{\circ}{D}_J$. Le lemme général suivant nous assure que, si ν est une mesure de probabilité à densité sur \mathbb{R}^d , alors sa transformée de Cramér est infinie sur ∂D_J et donc $\overset{\circ}{D}_J = D_J$. Nous nous inspirons de [12] pour la démonstration.

Proposition III.12. Soit ν une mesure de probabilité non-dégénérée sur \mathbb{R}^d . Notons \mathcal{C} l'adhérence de l'enveloppe convexe de son support. Si $x \in \partial\mathcal{C}$ alors il existe un hyperplan H contenant x et tel que $H \cap \mathcal{C} \subset \partial\mathcal{C}$. De plus, si J désigne la transformée de Cramér de ν , alors

$$J(x) \geq -\ln \nu(H).$$

En particulier, si ν admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d alors D_J est ouvert¹.

Démonstration. La mesure ν est non-dégénérée sur \mathbb{R}^d donc $\mathcal{C} \neq \emptyset$. Si $x \in \partial\mathcal{C}$ alors le théorème de séparation de Hahn-Banach (cf. [55]) assure qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}^d$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\langle \lambda, x \rangle = a \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathcal{C} \quad \langle \lambda, y \rangle \leq a.$$

Pour simplifier les notations, nous notons H l'hyperplan $\{y \in \mathbb{R}^d : \langle \lambda, y \rangle = a\}$ et

$$A = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle \lambda, y \rangle \geq a\} \quad \text{et} \quad B = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle \lambda, y \rangle \leq a\},$$

les deux demi-espaces fermés qu'il sépare. Supposons que $y \in \mathcal{C} \cap H$. Si $y \in \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ alors $\overset{\circ}{B} \cap H \neq \emptyset$, ce qui est absurde puisque H est le bord de B . Par conséquent $H \cap \mathcal{C} \subset \partial\mathcal{C}$. Ensuite, pour tout $\varepsilon > 0$, nous posons

$$A(\varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}^d : \langle \lambda, y \rangle > a - \varepsilon\}.$$

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi ν . Pour tout $n \geq 1$, posons

$$S_n = X_1 + \dots + X_n.$$

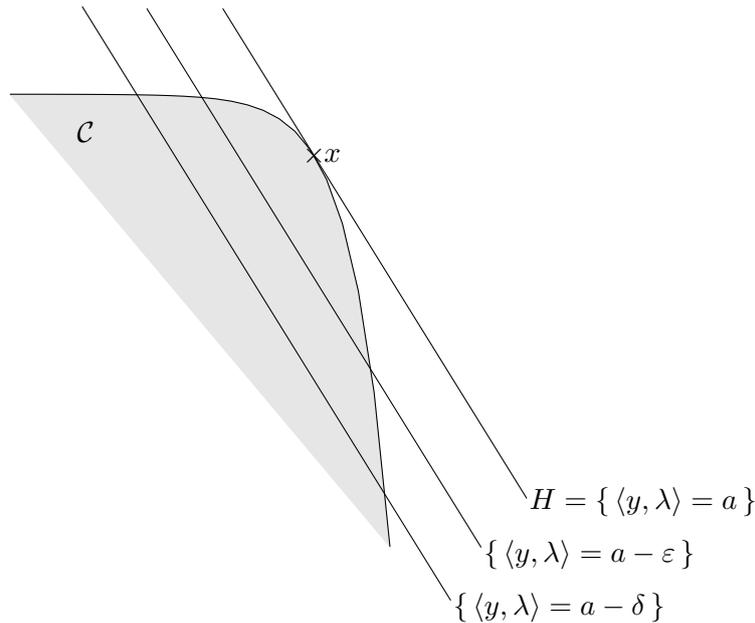
Fixons $n \geq 1$ et $\delta > 0$. Nous définissons

$$N = \text{card} \{i \in \{1, \dots, n\} : \langle \lambda, X_i \rangle \leq a - \delta\}.$$

La variable aléatoire N désigne le nombre de X_i , $i \in \{1, \dots, n\}$, qui n'appartiennent pas à $A(\delta)$. Dans la somme S_n , il y a exactement N termes qui appartiennent à $A(\delta)^c$ et $n - N$ qui appartiennent à $B \cap A(\delta)$. Avec probabilité 1, nous avons donc

$$\langle \lambda, S_n \rangle \leq N(a - \delta) + (n - N)a = na - N\delta.$$

Si $S_n/n \in A(\varepsilon)$ alors $a - \varepsilon < \langle \lambda, S_n/n \rangle \leq a - N\delta/n$ et donc $N \leq \varepsilon n/\delta$.



1. Plus généralement, c'est le cas dès que ν ne charge aucun hyperplan de \mathbb{R}^d .

Par conséquent

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A(\varepsilon)\right) \leq \mathbb{P}\left(N \leq \frac{\varepsilon n}{\delta}\right) = \sum_{k=0}^{\lfloor \varepsilon n / \delta \rfloor} \mathbb{P}(N = k)$$

et, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$,

$$\{N = k\} = \bigcup_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} \left\{ X_{i_1}, \dots, X_{i_k} \in A(\delta)^c, \quad \forall j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_k\} \quad X_j \in A(\delta) \right\}.$$

Les X_i , $i \in \{1, \dots, n\}$ sont indépendantes et de même loi donc il s'agit d'une union d'ensembles ayant la même probabilité et cette probabilité est majorée par

$$\mathbb{P}(X_1, \dots, X_{n-k} \in A(\delta)) = \mathbb{P}(X_1 \in A(\delta))^{n-k} = \nu(A(\delta))^{n-k}.$$

Ainsi, en prenant $\varepsilon < \delta/2$, nous avons

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A(\varepsilon)\right) \leq \sum_{k=0}^{\lfloor \varepsilon n / \delta \rfloor} \binom{n}{k} \nu(A(\delta))^{n-k} \leq \left(1 + \frac{\varepsilon n}{\delta}\right) \binom{n}{\lfloor \varepsilon n / \delta \rfloor} \max_{0 \leq k \leq \varepsilon n / \delta} \nu(A(\delta))^{n-k}.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(1 + \frac{\varepsilon n}{\delta}\right) &= 0 \\ \frac{1}{n} \ln \max_{0 \leq k \leq \varepsilon n / \delta} \nu(A(\delta))^{n-k} &= \max_{0 \leq k \leq \varepsilon n / \delta} \frac{n-k}{n} \ln \nu(A(\delta)) = \ln \nu(A(\delta)). \end{aligned}$$

De plus, d'après le lemme de 13.2 de [12],

$$\frac{1}{n} \ln \binom{n}{\lfloor \varepsilon n / \delta \rfloor} \leq \frac{2}{n} (\ln n + 2) - \frac{\lfloor \varepsilon n / \delta \rfloor}{n} \ln \left(\frac{\lfloor \varepsilon n / \delta \rfloor}{n}\right) - \left(1 + \frac{\lfloor \varepsilon n / \delta \rfloor}{n}\right) \ln \left(1 + \frac{\lfloor \varepsilon n / \delta \rfloor}{n}\right),$$

d'où

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \binom{n}{\lfloor \varepsilon n / \delta \rfloor} \leq -\frac{\varepsilon}{\delta} \ln \frac{\varepsilon}{\delta} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right).$$

Finalement, pour tout $\varepsilon \in]0, \delta/2[$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A(\varepsilon)\right) \leq \ln \nu(A(\delta)) - \frac{\varepsilon}{\delta} \ln \frac{\varepsilon}{\delta} - \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right).$$

Enfin le théorème de Cramér (cf. théorème B.10 de l'annexe) dans \mathbb{R}^d entraîne que

$$-J(x) \leq -\inf \left\{ J(y) : y \in A(\varepsilon) \right\} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \in A(\varepsilon)\right).$$

Par conséquent

$$J(x) \geq -\ln \nu(A(\delta)) + \frac{\varepsilon}{\delta} \ln \frac{\varepsilon}{\delta} + \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right) \ln \left(1 + \frac{\varepsilon}{\delta}\right).$$

En faisant tendre ε vers 0, nous obtenons que

$$\forall \delta > 0 \quad J(x) \geq -\ln \nu(A(\delta)).$$

Comme $A(\delta)$ tend vers A (en décroissant) quand δ tend vers 0, nous avons que $\nu(A(\delta))$ converge vers $\nu(A)$. Enfin $\overset{\circ}{A} \subset \mathcal{C}^c$ donc $\nu(\overset{\circ}{A}) = 0$, et A est inclus dans l'union disjointe de $\overset{\circ}{A}$ et H . Il s'ensuit que $\nu(A) \leq \nu(H)$ et donc

$$J(x) \geq -\ln \nu(A) \geq -\ln \nu(H).$$

La proposition III.8 entraîne que $\partial D_J = \partial \mathcal{C}$. Si ν admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue alors tout hyperplan est de mesure nulle. Donc

$$\forall x \in \partial D_J \quad J(x) = +\infty.$$

Cela signifie que D_J est ouvert. □

e) Régularité de la transformée de Cramér

En tant que fonction convexe, la transformée de Cramér possède des propriétés de continuité. Retenons le théorème suivant :

Théorème III.13. *Si ν est une mesure de probabilité non-dégénérée sur \mathbb{R}^d alors sa transformée de Cramér J est continue sur $\overset{\circ}{D}_J$.*

Démonstration. La fonction J est convexe sur \mathbb{R}^d donc le théorème 10.1 de [53] nous assure qu'elle est continue sur $\text{ri}(D_J)$, l'intérieur relatif de D_J , qui est l'intérieur de D_J vu comme un sous ensemble de son enveloppe affine. Puisque ν est non-dégénérée sur \mathbb{R}^d , le lemme III.8 nous assure que $\overset{\circ}{D}_J \neq \emptyset$ et donc $\text{ri}(D_J) = \overset{\circ}{D}_J$. Nous en déduisons le théorème. \square

Etudions à présent la différentiabilité de la transformée de Cramér.

Notation III.14. *Si f est une fonction différentiable sur un ouvert U de \mathbb{R}^d , notons $D_x f$ la différentielle de f en $x \in U$. Si f est de plus à valeurs réelles, nous notons :*

★ $D_x^2 f$ sa différentielle seconde en $x \in U$ (que nous regardons comme une matrice carrée de taille d).

★ ∇f la fonction de $U \rightarrow \mathbb{R}^d$ qui à $x \in U$ associe le vecteur $\nabla f(x) = D_x f$.

Définissons le domaine admissible de J :

Définition III.15. *Soit ν une mesure de probabilité non-dégénérée sur \mathbb{R}^d telle que D_L est d'intérieur non vide. Nous appelons domaine admissible de J l'ensemble $\nabla L(\overset{\circ}{D}_L)$, noté A_J .*

Le théorème suivant permet d'assurer notamment que A_J , le domaine admissible de J , est un ouvert de \mathbb{R}^d et que J est de classe C^∞ sur A_J .

Théorème III.16. *Soit ν une mesure de probabilité non-dégénérée sur \mathbb{R}^d telle que D_L est d'intérieur non vide. Notons A_J le domaine admissible de J .*

(a) *L'ensemble A_J est un ouvert de \mathbb{R}^d inclus dans D_J et la fonction ∇L est un C^∞ -difféomorphisme de $\overset{\circ}{D}_L$ sur A_J .*

(b) *Notons λ le C^∞ -difféomorphisme réciproque de ∇L . La fonction J est alors de classe C^∞ sur A_J et pour tout $x \in A_J$,*

$$J(x) = \langle x, \lambda(x) \rangle - L(\lambda(x)),$$

$$\nabla J(x) = (\nabla L)^{-1}(x) = \lambda(x) \quad \text{et} \quad D_x^2 J = \left(D_{\lambda(x)}^2 L \right)^{-1}.$$

(c) *Si L est steep (notamment si D_L est un ouvert de \mathbb{R}^d) alors $A_J = \overset{\circ}{D}_J = \overset{\circ}{C}$ où C désigne l'enveloppe convexe du support de ν .*

Les points (a) et (b) sont prouvés dans [1] et [9] (et dans [25] dans le cas où $D_L = \mathbb{R}^d$). Par souci de complétude, nous reproduisons la preuve ci-dessous.

Démonstration. (a) D'après la proposition III.3, la fonction L est de classe C^∞ sur $\overset{\circ}{D}_L$ et, pour tous $\lambda \in \overset{\circ}{D}_L$ et $i, j \in \{1, \dots, d\}$,

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}(\lambda) = \frac{1}{\exp L(\lambda)} \int_{\mathbb{R}^d} z_i e^{\langle \lambda, z \rangle} d\nu(z),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j}(\lambda) &= \frac{\int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j e^{\langle \lambda, z \rangle} d\nu(z)}{\exp L(\lambda)} - \frac{\left(\int_{\mathbb{R}^d} z_i e^{\langle \lambda, z \rangle} d\nu(z) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} z_j e^{\langle \lambda, z \rangle} d\nu(z) \right)}{(\exp L(\lambda))^2} \\ &= \mathbb{E}(Z_{\lambda,i} Z_{\lambda,j}) - \mathbb{E}(Z_{\lambda,i}) \mathbb{E}(Z_{\lambda,j}), \end{aligned}$$

où $Z_\lambda = {}^t(Z_{\lambda,1}, \dots, Z_{\lambda,d})$ est un vecteur aléatoire dans \mathbb{R}^d de loi μ_ν de densité

$$z \mapsto \exp(\langle \lambda, z \rangle - L(\lambda))$$

par rapport à ν . Ainsi $D_\lambda^2 L$ est la matrice de covariance de la loi μ_ν . De plus μ_ν a le même support que ν donc elle est non-dégénérée. Le lemme III.7 implique alors que $D_\lambda^2 L$ est inversible. Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathring{D}_L$, la matrice $D_\lambda^2 L$ est symétrique définie positive. Ceci entraîne que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, l'équation

$$\nabla L(\lambda) = x$$

admet au plus une solution $\lambda_x \in \mathring{D}_L$. En effet, s'il existe λ_1 et λ_2 distincts dans \mathring{D}_L et tels que $\nabla L(\lambda_1) = \nabla L(\lambda_2)$ alors la fonction

$$\psi : t \mapsto \langle \nabla L(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2), \lambda_1 - \lambda_2 \rangle$$

est de classe C^1 sur $[0, 1]$ à valeurs réelles et vérifie $\psi(0) = \psi(1)$. Le théorème de Rolle implique alors qu'il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $\psi'(t_0) = 0$, c'est-à-dire :

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\nabla L(t\lambda_1 + (1-t)\lambda_2)) \Big|_{t=t_0}, \lambda_1 - \lambda_2 \right\rangle = 0.$$

Par conséquent, en notant $\lambda_0 = t_0\lambda_1 + (1-t_0)\lambda_2 \in \mathring{D}_L$ et $v = \lambda_1 - \lambda_2 \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$, nous avons

$$\langle D_{\lambda_0}^2 L(v), v \rangle = 0.$$

Ceci contredit le fait que la matrice $D_{\lambda_0}^2 L$ est définie positive. Nous avons donc montré que la fonction ∇L est une bijection de \mathring{D}_L sur A_J de réciproque

$$\lambda : x \in A_J \mapsto \lambda_x.$$

De plus L est de classe C^∞ sur \mathring{D}_L et, pour tout $\lambda \in \mathring{D}_L$, $D_\lambda(\nabla L) = D_\lambda^2 L$ est un isomorphisme. Donc le théorème d'inversion globale (cf. [58]) implique que A_J est un ouvert de \mathbb{R}^d et que ∇L est un C^∞ -difféomorphisme de \mathring{D}_L sur A_J .

(b) Pour $x \in A_J$, posons

$$f_x : \lambda \in \mathbb{R}^d \mapsto \langle x, \lambda \rangle - L(\lambda).$$

La fonction f_x est différentiable sur \mathring{D}_L et

$$\forall \lambda \in \mathring{D}_L \quad \nabla f_x(\lambda) = x - \nabla L(\lambda).$$

D'après le point (a), pour tout $x \in A_J$, $\nabla f_x(\lambda) = 0$ si et seulement si $\lambda = \lambda(x)$. Comme f_x est concave, son supremum est alors atteint en $\lambda(x)$, c'est-à-dire

$$J(x) = f_x(\lambda(x)) = \langle x, \lambda(x) \rangle - L(\lambda(x)).$$

Ceci entraîne alors que $A_J \subset D_J$ et que J est de classe C^∞ sur A_J . Enfin pour tous $x \in A_J$, $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\langle \nabla J(x), u \rangle = \langle u, \lambda(x) \rangle + \langle D_x \lambda(u), x \rangle - \langle \nabla L(\lambda(x)), D_x \lambda(u) \rangle = \langle u, \lambda(x) \rangle$$

car $\nabla L(\lambda(x)) = x$. Ainsi

$$\forall x \in A_J \quad \nabla J(x) = \lambda(x) = (\nabla L)^{-1}(x).$$

En différentiant $\nabla L(\lambda(x)) = x$, nous obtenons :

$$D_{\lambda(x)}^2 L \circ D_x^2 J = D_{\lambda(x)}^2 L \circ D_x \lambda = \text{Id}$$

d'où l'expression de $D_x^2 J$ puisque $D_{\lambda(x)}^2 L$ est un isomorphisme.

(c) Si D_L est un ouvert de \mathbb{R}^d alors le lemme III.8 entraîne que pour $x \in \overset{\circ}{\mathcal{C}} = \overset{\circ}{D}_J$, le supremum définissant $J(x)$ est atteint en un point $\lambda_x \in D_L = \overset{\circ}{D}_L$. Et si L est steep alors la même conclusion découle du corollaire III.11. Dans les deux cas, L est différentiable en $\lambda(x) = \lambda_x$ et ce qui précède implique que

$$x = \nabla L(\lambda_x) \in \nabla L(\overset{\circ}{D}_L) = A_J,$$

c'est-à-dire $\overset{\circ}{D}_J \subset A_J$. Enfin, comme $A_J \subset D_J$ et A_J est ouvert, nous avons $A_J = \overset{\circ}{D}_J = \overset{\circ}{\mathcal{C}}$ d'où le point (c). \square

f) Relation asymptotique entre densité et transformée de Cramér

Soit ν une mesure de probabilité admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , avec $d \geq 1$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi ν . Le théorème suivant assure que, sous certaines hypothèses permettant l'inversion de Fourier, la densité de $(X_1 + \dots + X_n)/n$ s'exprime asymptotiquement en fonction de J . Nous en proposons une démonstration, inspirée de l'article de C. Andriani et P. Baldi [1]. Elle repose sur le théorème III.16.

Théorème III.17. *Soit ν une mesure de probabilité non-dégénérée sur \mathbb{R}^d . Notons L sa Log-Laplace et J sa transformée de Cramér. Supposons que $\overset{\circ}{D}_L \neq \emptyset$ et qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que*

$$\widehat{\nu^{*n_0}} \in L^1(\mathbb{R}^d).$$

Notons A_J le domaine admissible de J . Pour tout $x \in A_J$, notons μ_x la mesure sur \mathbb{R}^d telle que

$$d\mu_x(y) = \frac{\exp\langle y + x, \lambda(x) \rangle}{\exp L(\lambda(x))} d\nu(y + x),$$

où λ désigne la fonction réciproque de ∇L . Pour n assez grand, la transformée de Fourier de μ_x appartient à $L^n(\mathbb{R}^d)$. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi ν . Pour tout $n \geq 1$, posons

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n}(X_1 + \dots + X_n).$$

Alors pour tout $n \geq n_0$, \bar{X}_n admet une densité g_n par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d vérifiant :

(a) Pour $x \in A_J$ et pour n assez grand,

$$g_n(x) = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^d e^{-nJ(x)} \int_{\mathbb{R}^d} (\widehat{\mu_x}(t))^n dt.$$

(b) Pour tout compact $K_J \subset A_J$, uniformément en $x \in K_J$, quand n tend vers $+\infty$,

$$g_n(x) \sim \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{d/2} (\det D_x^2 J)^{1/2} e^{-nJ(x)}.$$

Nous présentons d'abord quelques lemmes utiles pour la preuve du théorème III.17.

Lemme III.18 (Théorème de convergence dominée uniforme). *Soient $(\mathcal{X}, \mathcal{T})$ un ensemble topologique séparable et $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espace mesuré. Soient f et f_n , $n \geq 1$, des fonctions mesurables sur $\mathcal{X} \times \Omega$ à valeurs dans \mathbb{C} . Supposons que, pour tout $\omega \in \Omega$, les fonctions $x \mapsto f(x, \omega)$ et $x \mapsto f_n(x, \omega)$, $n \geq 1$, sont continues sur \mathcal{X} et que*

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} |f_n(x, \omega) - f(x, \omega)| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Supposons de plus qu'il existe une fonction g positive et intégrable sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad \forall \omega \in \Omega \quad |f_n(x, \omega)| \leq g(\omega).$$

Alors pour tout $x \in \mathcal{X}$, la fonction $\omega \mapsto f(x, \omega)$ est intégrable et

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} \left| \int_{\Omega} f_n(x, \omega) d\mu(\omega) - \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega) \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration. Nous adaptons la démonstration du théorème de convergence dominée classique de [56]. En passant à la limite dans l'inégalité de domination, nous obtenons

$$\forall (x, \omega) \in \mathcal{X} \times \Omega \quad |f(x, \omega)| \leq g(\omega).$$

Ceci montre que, pour tout $x \in \mathcal{X}$, la fonction $\omega \mapsto f(x, \omega)$ est intégrable. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons

$$h_n : \omega \mapsto \sup_{x \in \mathcal{X}} |f_n(x, \omega) - f(x, \omega)|.$$

Pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $\omega \in \Omega$, la fonction $x \in \mathcal{X} \mapsto |f_n(x, \omega) - f(x, \omega)|$ est continue donc son supremum est égal à son supremum sur un ensemble dénombrable dense de \mathcal{X} . Par conséquent h_n est une fonction mesurable. La suite $(2g - h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est composée de fonctions positives ou nulles dont la limite simple est la fonction $2g$. Le lemme de Fatou entraîne que

$$\int_{\Omega} 2g d\mu = \int_{\Omega} \liminf_{n \rightarrow +\infty} (2g - h_n) d\mu \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} (2g - h_n) d\mu = \int_{\Omega} 2g d\mu - \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} h_n d\mu.$$

Comme g est intégrable, nous en déduisons que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} h_n d\mu \leq 0$$

et donc que $\int_{\Omega} h_n d\mu$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}$, h_n est une fonction positive ou nulle. Finalement

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathcal{X}} \left| \int_{\Omega} f_n(x, \omega) d\mu(\omega) - \int_{\Omega} f(x, \omega) d\mu(\omega) \right| &\leq \sup_{x \in \mathcal{X}} \int_{\Omega} |f_n(x, \omega) - f(x, \omega)| d\mu(\omega) \\ &\leq \int_{\Omega} h_n d\mu \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Lemme III.19. Soit ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d . Notons L sa Log-Laplace. Soit K un compact inclus dans $\overset{\circ}{D}_L$. Alors la fonction

$$(s, t) \mapsto M(s + it) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{(s+it, x)} d\nu(x)$$

est uniformément continue sur $K \times \mathbb{R}^d$.

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, notons B_n la boule ouverte de rayon n centrée en l'origine et posons

$$f_n : y \mapsto \int_{B_n^c} e^{(y, x)} d\nu(x).$$

Il s'agit d'une suite décroissante de fonctions continues sur $K \subset \overset{\circ}{D}_L$, qui tend vers la fonction nulle. Le théorème de Dini (cf. le lemme X.7 pour une généralisation aux fonctions semi-continues

supérieurement) entraîne que $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers la fonction nulle sur K . Donnons-nous $\varepsilon > 0$. Il existe alors $n_0 \geq 1$ tel que

$$\forall y \in K \quad \int_{B_{n_0}^c} e^{\langle y, x \rangle} d\nu(x) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Posons ensuite

$$g : (x, s, t) \in (\mathbb{R}^d)^3 \longmapsto \exp(\langle s + it, x \rangle).$$

Il s'agit d'une fonction uniformément continue sur $B_{n_0} \times K \times \mathbb{R}^d$ (car sa différentielle est bornée sur cet ensemble donc elle est lipschitzienne). Ainsi il existe $\delta > 0$ tel que pour tous $x \in B_{n_0}$, $(s, u) \in K^2$ et $(t, v) \in (\mathbb{R}^d)^2$,

$$\|(s, t) - (u, v)\| \leq \delta \implies |g(x, s, t) - g(x, u, v)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

et donc

$$\begin{aligned} |M(s + it) - M(u + iv)| &\leq \int_{B_{n_0}} |g(x, s, t) - g(x, u, v)| d\nu(x) + 2 \sup_{y \in K} \int_{B_{n_0}^c} e^{\langle y, x \rangle} d\nu(x) \\ &\leq \int_{B_{n_0}} \frac{\varepsilon}{2} d\nu(x) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Ceci montre la continuité uniforme de $(s, t) \longmapsto M(s + it)$ sur $K \times \mathbb{R}^d$. \square

Enonçons le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin qui nous sera utile pour notre dernier lemme préliminaire. Rappelons que la norme subordonnée d'une application linéaire continue T de $L^p(\mathbb{R}^d)$ dans $L^q(\mathbb{R}^d)$, avec $(p, q) \in [1, +\infty]^2$, est définie par

$$\|T\|_{p,q} = \sup \left\{ \frac{\|T(f)\|_q}{\|f\|_p} : f \in L^p, f \neq 0 \right\}.$$

Théorème III.20 (Riesz-Thorin). *Soient p_0, p_1, q_0 et q_1 dans $[1, +\infty]$ tels que $p_0 \neq p_1$ et $q_0 \neq q_1$. Pour tout $t \in [0, 1]$, nous définissons p_t et q_t par*

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1}.$$

Soit T un application linéaire continue de $L^{p_0}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{q_0}(\mathbb{R}^d)$ de norme subordonnée M_0 . Supposons que T est aussi continue de $L^{p_1}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{q_1}(\mathbb{R}^d)$ de norme subordonnée M_1 . Alors, pour tout $t \in [0, 1]$, T est une application linéaire continue de $L^{p_t}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^{q_t}(\mathbb{R}^d)$ et

$$\forall f \in L^{p_t}(\mathbb{R}^d) \quad \|T(f)\|_{q_t} \leq M_0^{1-t} M_1^t \|f\|_{p_t}.$$

Nous nous référons au chapitre 1 de [7] pour une démonstration de ce résultat et la conséquence suivante : l'application qui à une fonction intégrable associe sa transformée de Fourier est une application linéaire continue de $L^1(\mathbb{R}^d)$ dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ de norme subordonnée égale à 1. De plus le théorème de Plancherel (cf. [56]) assure que

$$\forall f \in L^2(\mathbb{R}^d) \quad \|\widehat{f}\|_2 = (2\pi)^{d/2} \|f\|_2.$$

Pour tout $t \in [0, 1]$, posons $p_t = 2/(2-t)$ et $q_t = 2/t$. Nous vérifions aisément que p_t et q_t sont conjugués et que

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{p_0} + \frac{t}{p_1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{q_t} = \frac{1-t}{q_0} + \frac{t}{q_1},$$

avec $p_0 = 1, p_1 = 2, q_0 = +\infty$ et $q_1 = 2$. Le théorème d'interpolation de Riesz-Thorin entraîne alors que

$$\forall f \in L^{p_t}(\mathbb{R}^d) \quad \|\widehat{f}\|_{q_t} \leq 1^{1-t} (2\pi)^{td/2} \|f\|_{p_t} = (2\pi)^{d/q_t} \|f\|_{p_t}.$$

En remarquant que p_t et q_t sont conjugués et que $p_t \in [1, 2]$, nous obtenons l'inégalité suivante :

Lemme III.21 (Inégalité de Hausdorff-Young). *Si $d \geq 1$ et $p \in]1, 2]$ alors $q = p/(p-1) \geq 2$ et*

$$\forall f \in L^p(\mathbb{R}^d) \quad \|\widehat{f}\|_q \leq (2\pi)^{d/q} \|f\|_p.$$

Avant de démontrer le théorème III.17, terminons par un dernier lemme.

Lemme III.22. *Supposons qu'il existe $s_0 \neq 0$ telle que $|M(is_0)| = 1$. Alors la mesure ν est arithmétique, c'est-à-dire, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que*

$$\nu(\{x \in \mathbb{R}^d : \langle s_0, x \rangle \in a + b\mathbb{Z}\}) = 1.$$

Démonstration. Supposons que $|M(is_0)| = 1$ pour un certain $s_0 \neq 0$. Ainsi

$$1 = \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle s_0, x \rangle} d\nu(x) \right| \leq \int_{\mathbb{R}^d} d\nu(x) = 1.$$

Il s'agit du cas d'égalité de cette inégalité classique : il existe $b_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$e^{i\langle s_0, x \rangle} = e^{ib_0} \quad \nu \text{ p.s.}$$

d'où

$$\nu(\{x \in \mathbb{R}^d : \langle s_0, x \rangle \in b_0 + 2\pi\mathbb{Z}\}) = 1$$

et le lemme est démontré. \square

Attaquons maintenant la démonstration du théorème III.17. Notons φ la transformée de Fourier de ν . Nous avons

$$\forall n \geq 1 \quad \widehat{\nu^{*n}} = \widehat{\nu}^n = \varphi^n.$$

Par hypothèse, $\varphi^{n_0} \in L^1$ et

$$\forall n \geq n_0 \quad |\widehat{\nu^{*n}}| = |\varphi|^{n_0} |\varphi|^{n-n_0} \leq |\varphi|^{n_0}.$$

Ainsi $\widehat{\nu^{*n}} \in L^1$ et le théorème d'inversion de Fourier (cf. [56]) entraîne que ν^{*n} admet une densité f_n vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t, x \rangle} \varphi^n(t) dt.$$

Ceci entraîne également que $f_n \in L^\infty$.

Soient $s \in \mathring{D}_L$ et $n \geq 1$. La fonction $x \mapsto e^{\langle s, x \rangle} f_n(x)$ est une fonction positive d'intégrale $M(s)^n < +\infty$. Notons $\varphi_{s,n}$ sa transformée de Fourier. Il existe $p = p(s) \in]1, 2]$ tel que $ps \in \mathring{D}_L$. Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{\langle s, x \rangle} f_n(x) \right|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle ps, x \rangle} f_n(x) \|f_n\|_\infty^{p-1} dx = M(ps)^{n_0} \|f_n\|_\infty^{p-1}$$

qui est une quantité finie. Par conséquent l'inégalité de Hausdorff-Young entraîne que $\varphi_{s,n_0} \in L^q$ pour $q = q(s) = p(s)/(p(s)-1) \in [2, +\infty[$. Or

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \quad \varphi_{s,n}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t, x \rangle} e^{\langle s, x \rangle} f_n(x) dx = M(s+it)^n.$$

Soit $n \geq qn_0$. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{s,n}(t)| dt &= \int_{\mathbb{R}^d} |M(s+it)|^{n_0 q} |M(s+it)|^{n-n_0 q} dt \\ &\leq M(s)^{n-n_0 q} \int_{\mathbb{R}^d} (|M(s+it)|^{n_0})^q dt \\ &= M(s)^{n-n_0 q} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{s,n_0}|^q dt < +\infty. \end{aligned}$$

C'est-à-dire $\varphi_{s,n} \in L^1$ et donc le théorème d'inversion de Fourier entraîne que

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{\langle s,x \rangle} f_n(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t,x \rangle} \varphi_{s,n}(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i\langle t,x \rangle} M(s+it)^n dt.$$

Remarquons ensuite que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad g_n(x) = n^d f_n(nx).$$

Par conséquent, pour tout $s \in \mathring{D}_L$ et $n \geq q(s)n_0$,

$$g_n(x) = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-n\langle it+s,x \rangle} M(s+it)^n dt.$$

Si $x \in A_J$ alors le théorème III.16 entraîne que

$$J(x) = \langle \lambda(x), x \rangle - L(\lambda(x))$$

donc en appliquant ce qui précède à $s = \lambda(x)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \left(\frac{n}{2\pi}\right)^d \int_{\mathbb{R}^d} e^{-n\langle \lambda(x)+it,x \rangle} M(\lambda(x)+it)^n dt \\ &= \left(\frac{n}{2\pi}\right)^d e^{-nJ(x)} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{J(x)-\langle \lambda(x)+it,x \rangle}\right)^n M(\lambda(x)+it)^n dt \\ &= \left(\frac{n}{2\pi}\right)^d e^{-nJ(x)} \int_{\mathbb{R}^d} \left(e^{-i\langle t,x \rangle - L(\lambda(x))}\right)^n M(\lambda(x)+it)^n dt. \end{aligned}$$

Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}^d$,

$$\widehat{\mu}_x(t) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle t,y \rangle + \langle y+x, \lambda(x) \rangle - L(\lambda(x))} d\nu(y+x) = e^{-i\langle t,x \rangle} \frac{M(\lambda(x)+it)}{M(\lambda(x))},$$

où nous avons effectué le changement de variable $z = y + x$. Nous en déduisons que $\widehat{\mu}_x \in L^n$ et que

$$g_n(x) = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^d e^{-nJ(x)} \int_{\mathbb{R}^d} (\widehat{\mu}_x(t))^n dt.$$

Cette égalité est valable dès que $n \geq qn_0$ (q dépendant de $s = \lambda(x)$). Nous avons démontré le point (a).

Prouvons maintenant le point (b). Soit K_J un compact de A_J . Insistons sur le fait que, pour $x \in A_J$ donné, l'expression de g_n ci-dessus n'est valable que pour $n \geq n_0q$, où q dépend de x . Revenons sur la construction de q : pour $s \in \mathring{D}_L$, nous pouvons choisir $p(s) \in]1, 2] \cap \mathbb{Q}$ tel que $p(s)s \in \mathring{D}_L$. Le compact $\lambda(K_J)$, sous-ensemble de \mathring{D}_L , est ainsi recouvert par l'union (qui est dénombrable) des ouverts

$$\mathcal{O}_p = \{s \in \mathring{D}_L : ps \in \mathring{D}_L\}, \quad p \in]1, 2] \cap \mathbb{Q}.$$

Nous pouvons donc en extraire un sous-recouvrement fini

$$\lambda(K_J) \subset \mathcal{O}_{p_0} \cup \dots \cup \mathcal{O}_{p_k} \quad \text{avec} \quad 1 < p_0 \leq \dots \leq p_k \leq 2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Enfin, par convexité de \mathring{D}_L , nous obtenons que les ouverts $(\mathcal{O}_p)_{p \in]1, 2] \cap \mathbb{Q}}$ forment une suite décroissante pour l'inclusion, si bien que $\lambda(K_J) \subset \mathcal{O}_{p_0}$. Nous posons alors $q_0 = p_0/(p_0 - 1)$ et nous avons

$$\forall n \geq q_0 n_0 \quad \forall x \in K_J \quad g_n(x) = \left(\frac{n}{2\pi}\right)^d e^{-nJ(x)} \int_{\mathbb{R}^d} (\widehat{\mu}_x(t))^n dt.$$

Pour tout $x \in K_J$, la loi μ_x admet pour espérance

$$\int_{\mathbb{R}^d} y \frac{e^{\langle x+y, \lambda(x) \rangle}}{M(\lambda(x))} d\nu(y+x) = \int_{\mathbb{R}^d} (z-x) \frac{e^{\langle z, \lambda(x) \rangle}}{M(\lambda(x))} d\nu(z) = \nabla L(\lambda(x)) - x = 0$$

et pour matrice de covariance $\Sigma_x = D_{\lambda(x)}^2 L$ car, pour $1 \leq i, j \leq d$ et $x \in D_L$,

$$\begin{aligned} (\Sigma_x)_{i,j} &= \frac{\int_{\mathbb{R}^d} y_i y_j e^{\langle \lambda(x), y+x \rangle} d\nu(y+x)}{M(\lambda(x))} = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} (z_i - x_i)(z_j - x_j) e^{\langle \lambda(x), z \rangle} d\nu(z)}{M(\lambda(x))} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j e^{\langle \lambda(x), z \rangle} d\nu(z)}{M(\lambda(x))} - x_i x_j = \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\lambda(x)). \end{aligned}$$

Quand t tend vers 0, uniformément en $x \in K_J$,

$$\widehat{\mu}_x(t) = 1 - \frac{1}{2} \langle \Sigma_x t, t \rangle + o(\|t\|^2).$$

En effet

$$(x, t) \mapsto \widehat{\mu}_x(t) = e^{-i\langle t, x \rangle} \frac{M(\lambda(x) + it)}{M(\lambda(x))}$$

est de classe C^∞ sur $A_J \times \mathbb{R}^d$ (cf. théorème III.16) donc la formule de Taylor-Lagrange assure que le terme de reste est uniforme en $x \in K_J$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, uniformément en $x \in K_J$,

$$\widehat{\mu}_x \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{1}{2} \langle \Sigma_x t, t \rangle \right).$$

Il s'agit de la même méthode que pour la démonstration du théorème central limite.

Notons que les fonctions $x \mapsto \widehat{\mu}_x(t)$ et $x \mapsto \exp(-\langle \Sigma_x t, t \rangle / 2)$, $t \in \mathbb{R}^d$, sont continues sur K_J . Pour appliquer le théorème de convergence dominée (version uniforme), il nous faut encore obtenir une majoration uniforme de la suite de fonctions. Pour tout $x \in A_J$, la matrice Σ_x est symétrique définie positive donc ε_x , sa plus petite valeur propre, est strictement positive et ε_x^{-1} est la plus grande valeur propre de l'inverse de Σ_x . Ainsi, en notant $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, nous avons

$$\forall x \in A_J \quad \varepsilon_x = (\max\{\alpha : \alpha \text{ est une valeur propre de } \Sigma_x^{-1}\})^{-1} = \|\Sigma_x^{-1}\|^{-1}.$$

De plus $x \mapsto \Sigma_x = D_{\lambda(x)}^2 L$ est continue sur A_J donc c'est aussi le cas de la fonction $x \mapsto \varepsilon_x$. Notons alors ε_0 son minimum sur le compact K_J inclus dans A_J . Il s'agit d'un réel strictement positif. Le développement limité ci-dessus nous assure l'existence de $\delta > 0$ tel que

$$\forall (t, x) \in B(0, \delta) \times K_J \quad |\widehat{\mu}_x(t)| \leq 1 - \frac{1}{2} \left\langle \left(\Sigma_x - \frac{\varepsilon_0}{2} \text{Id} \right) t, t \right\rangle.$$

Le théorème spectral des matrices symétriques réelles assure que, pour tout $x \in K_J$, la matrice $\Sigma_x - \varepsilon_0 \text{Id}$ est symétrique positive. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \quad \left\langle \left(\Sigma_x - \frac{\varepsilon_0}{2} \text{Id} \right) t, t \right\rangle - \frac{\varepsilon_0}{2} \|t\|^2 = \langle (\Sigma_x - \varepsilon_0 \text{Id}) t, t \rangle \geq 0.$$

Nous en déduisons que

$$\forall (t, x) \in B(0, \delta) \times K_J \quad |\widehat{\mu}_x(t)| \leq 1 - \frac{\varepsilon_0}{4} \|t\|^2.$$

En utilisant le fait que $1 - y \leq e^{-y}$ pour tout $y \geq 0$, nous obtenons que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall (t, x) \in B(0, \delta\sqrt{n}) \times K_J \quad \left| \widehat{\mu}_x \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right|^n \leq \exp \left(-\frac{\varepsilon_0}{4} \|t\|^2 \right).$$

Le terme de droite est intégrable et indépendant de $x \in K_J$ et de n . Le théorème de convergence dominée uniforme (cf. lemme III.18) entraîne donc que, uniformément en K_J ,

$$\int_{\|t\| < \delta\sqrt{n}} \widehat{\mu}_x \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left(-\frac{1}{2} \langle \Sigma_x t, t \rangle \right) dt.$$

De plus cette deuxième intégrale est égale à $(2\pi)^{d/2} (\det \Sigma_x)^{-1/2}$ et le théorème III.16 assure que, pour $x \in A_J$, $D_{\lambda(x)}^2 L$ est la matrice inverse de $D_x^2 J$. Ainsi, quand $n \rightarrow \infty$, uniformément en $x \in K_J$,

$$\int_{\|t\| < \delta} \widehat{\mu}_x(t)^n dt = n^{-d/2} \int_{\|t\| < \delta\sqrt{n}} \widehat{\mu}_x \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n dt \sim \left(\frac{2\pi}{n} \right)^{d/2} (\det D_x^2 J)^{1/2}.$$

Regardons maintenant la convergence du reste de l'intégrale. Posons

$$h : x \in K_J \longmapsto \sup_{\|t\| \geq \delta} |\widehat{\mu}_x(t)|.$$

La fonction λ est continue donc $\lambda(K_J)$ est un compact et le lemme III.19 assure que la fonction $(s, t) \longmapsto M(s + it)$ est uniformément continue sur $\lambda(K_J) \times \mathbb{R}^d$. Par conséquent la fonction

$$x \longmapsto \sup_{\|t\| \geq \delta} |M(\lambda(x) + it)|$$

est continue sur K_J . Or pour tout $x \in K_J$,

$$h(x) = \sup_{\|t\| \geq \delta} |\widehat{\mu}_x(t)| = \frac{1}{M(\lambda(x))} \sup_{\|t\| \geq \delta} |M(\lambda(x) + it)|.$$

Ainsi h est continue sur K_J . Nous en déduisons, par compacité de K_J , qu'il existe $x_0 \in K_J$ tel que

$$\sup_{x \in K_J} \sup_{\|t\| \geq \delta} |\widehat{\mu}_x(t)| = \sup_{x \in K_J} h(x) = h(x_0) = \sup_{\|t\| \geq \delta} |\widehat{\mu}_{x_0}(t)|.$$

Enfin $\widehat{\mu}_{x_0} \in L^{n_0 q_0}$ donc $\mu_{x_0}^{*n_0 q_0}$ admet une densité. Ainsi le lemme de Riemann-Lebesgue implique que

$$(\widehat{\mu}_{x_0}(t))^{n_0 q_0} = \widehat{\mu_{x_0}^{*n_0 q_0}}(t) \xrightarrow{\|t\| \rightarrow +\infty} 0$$

et le lemme III.22 assure que, pour tout $t \neq 0$, $\left| \widehat{\mu_{x_0}^{*n_0 q_0}}(t) \right| < 1$. Par conséquent

$$\kappa = \sup_{\|t\| \geq \delta} |\widehat{\mu}_{x_0}(t)| \in]0, 1[.$$

Nous en déduisons que

$$\sup_{x \in K_J} \sup_{\|t\| \geq \delta} |\widehat{\mu}_x(t)| \leq \kappa < 1.$$

Soit $x \in K_J$. Nous avons alors, pour tout $n \geq n_0 q_0$,

$$\left| \int_{\|t\| \geq \delta} \widehat{\mu}_x(t)^n dt \right| \leq \int_{\|t\| \geq \delta} |\widehat{\mu}_x(t)|^n dt \leq \kappa^{n-n_0 q_0} \int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\mu}_x(t)|^{n_0 q_0} dt.$$

Or

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\mu}_x(t)|^{n_0 q_0} dt = \frac{1}{M(\lambda(x))^{n_0 q_0}} \int_{\mathbb{R}^d} |M(\lambda(x) + it)|^{n_0 q_0} dt = \frac{1}{M(\lambda(x))^{n_0 q_0}} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{\lambda(x), n_0}(t)|^{q_0} dt,$$

avec les notations de la page 59. L'inégalité de Hausdorff-Young nous assure que

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{\lambda(x), n_0}(t)|^{q_0} dt = \|\varphi_{\lambda(x), n_0}\|_{q_0}^{q_0} \leq (2\pi)^d \left\| e^{\langle \lambda(x), \cdot \rangle} f_{n_0} \right\|_{p_0}^{q_0}.$$

Enfin nous avons vu que

$$\left\| e^{\langle \lambda(x), \cdot \rangle} f_{n_0} \right\|_{p_0}^{q_0} = \left(\int_{\mathbb{R}^d} \left| e^{\langle \lambda(x), t \rangle} f_{n_0}(t) \right|^{p_0} dt \right)^{q_0/p_0} \leq (M(p_0 \lambda(x))^{n_0} \|f_{n_0}\|_{\infty}^{p_0-1})^{q_0/p_0}.$$

En rassemblant ces inégalités, nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^d} |\widehat{\mu}_x(t)|^{n_0 q_0} dt \leq \frac{(2\pi)^d}{M(\lambda(x))^{n_0 q_0}} M(p_0 \lambda(x))^{n_0 q_0/p_0} \|f_{n_0}\|_{\infty}.$$

Enfin la fonction $s \mapsto M(p_0 s)/M(s)^{p_0}$ est continue donc bornée sur le compact $\lambda(K_J)$. Nous en déduisons que, pour tout $n \geq n_0 q_0$, uniformément en $x \in K_J$,

$$\left| \int_{\|t\| \geq \delta} \widehat{\mu}_x(t)^n dt \right| = O(\kappa^n).$$

Finalement

$$\begin{aligned} g_n(x) &= \left(\frac{n}{2\pi} \right)^d e^{-nJ(x)} \left(\int_{\|t\| \geq \delta} \widehat{\mu}_x(t)^n dt + \int_{\|t\| < \delta} \widehat{\mu}_x(t)^n dt \right) \\ &= \left(\frac{n}{2\pi} \right)^d e^{-nJ(x)} \left(O(\kappa^n) + \left(\frac{2\pi}{n} \right)^{d/2} (\det D_x^2 J)^{1/2} (1 + o(1)) \right) \\ &= \left(\frac{n}{2\pi} \right)^{d/2} e^{-nJ(x)} (\det D_x^2 J)^{1/2} (1 + o(1)), \end{aligned}$$

puisque $\kappa \in]0, 1[$. Le développement est uniforme en $x \in K_J$ d'après toute l'étude qui précède et car la fonction $x \mapsto (\det D_x^2 J)^{1/2}$ est continue donc bornée sur K_J . Ceci termine la démonstration du théorème III.17.

Proposition III.23. *Soit ν une mesure de probabilité non-dégénérée sur \mathbb{R}^d telle que $\mathring{D}_L \neq \emptyset$. Si il existe $m \in \mathbb{N}$ et $p \in]1, 2]$ tels que ν^{*m} admet une densité $f_m \in L^p$, alors les hypothèses du théorème III.17 sont vérifiées.*

Démonstration. Il découle de l'inégalité de Hausdorff-Young que $\widehat{f}_m \in L^r$, avec $r = p/(p-1)$. De plus \widehat{f}_m est bornée donc $\widehat{f}_m \in L^q$ où q est un nombre entier quelconque supérieur à r . Par conséquent

$$\widehat{\nu^{*mq}} = \left(\widehat{\nu^{*m}} \right)^q = \left(\widehat{f}_m \right)^q \in L^1.$$

Ainsi les hypothèses du théorème sont vérifiées (avec $n_0 = mq$). □

Chapitre IV

Etude de la fonction $I - F$

Sommaire

11	Minimum de $I - F$ sur Δ^*	66
a)	Domaine admissible de I	66
b)	Cas d'une loi de Bernoulli	67
c)	Cas où Λ est steep	67
d)	Cas général	71
e)	Preuve alternative de la proposition IV.1	73
f)	Et si ρ n'est pas symétrique?	74
12	Une inégalité exponentielle pour les lois symétriques	75
13	Développement de $I - F$ au voisinage de $(0, \sigma^2)$	78

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0. Rappelons que la transformée de Laplace Λ de ρ est définie par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \Lambda(u, v) = \ln \int_{\mathbb{R}} e^{uz+ vz^2} d\rho(z),$$

et sa transformée de Cramér I par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad I(x, y) = \sup_{(u, v) \in \mathbb{R}^2} (xu + yv - \Lambda(u, v)).$$

Dans le paragraphe 11, nous étudions les minima de la fonction $I - F$ sur

$$\Delta^* = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[: x^2 \leq y \},$$

dans le cas où ρ est symétrique et nous montrons la proposition clé suivante :

Proposition IV.1. *Si ρ est une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} , de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que Λ est finie sur un voisinage de $(0, 0)$ alors la fonction*

$$(x, y) \in \Delta^* \longmapsto I(x, y) - \frac{x^2}{2y}$$

admet un unique minimum en $(0, \sigma^2)$ en lequel elle est nulle.

Dans le paragraphe 12, nous prouvons une conséquence de cette proposition : une inégalité de concentration pour des variables aléatoires symétriques indépendants et identiquement distribués. Enfin l'étude du comportement de $I - F$ au voisinage de $(0, \sigma^2)$ fait l'objet du paragraphe 13.

11 Minimum de $I - F$ sur Δ^*

Dans les paragraphes 11.a) à 11.d), nous donnons la démonstration originelle (obtenue en 2012 et présentée dans [15]) de la proposition IV.1, utilisant le théorème III.16 sur la différentiabilité de la transformée de Cramér sur son domaine admissible. Nous avons depuis obtenu une démonstration plus immédiate que nous présentons au paragraphe 11.e). Enfin nous donnons un contre exemple de l'inégalité $I \geq F$ dans le cas non-symétrique au paragraphe 11.f).

a) Domaine admissible de I

Nous commençons par énoncer quelques propriétés de I , déduites du cas général exposé dans la section 10. Supposons que ρ est symétrique et que son support possède au moins trois points, ce qui assure que la loi ν_ρ soit non-dégénérée sur \mathbb{R}^2 . La fonction Λ est la Log-Laplace de ν_ρ et l'ensemble de définition D_Λ contient $\mathbb{R} \times]-\infty, 0[$ donc son intérieur est non vide. La fonction I est la transformée de Cramér de la loi ν_ρ et nous notons $A_I = \nabla \Lambda(\overset{\circ}{D}_\Lambda)$ le domaine admissible de I . Le théorème III.16 entraîne que :

(a) L'ensemble A_I est un ouvert de D_I et la fonction $\nabla \Lambda$ est un C^∞ -difféomorphisme de $\overset{\circ}{D}_\Lambda$ sur A_I .

(b) La fonction I est de classe C^∞ sur A_I . Notons $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ la réciproque de $\nabla \Lambda$. Pour tout $(x, y) \in A_I$,

$$\begin{aligned} I(x, y) &= xu(x, y) + yv(x, y) - \Lambda(u(x, y), v(x, y)), \\ \nabla I(x, y) &= (\nabla \Lambda)^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)), \\ D_{(x, y)}^2 I &= \left(D_{(u(x, y), v(x, y))}^2 \Lambda \right)^{-1}. \end{aligned}$$

(c) Si Λ est steep (notamment si D_Λ est un ouvert de \mathbb{R}^2) alors $A_I = \overset{\circ}{D}_I = \overset{\circ}{\mathcal{C}}_\rho$ où \mathcal{C}_ρ désigne l'enveloppe convexe de l'ensemble

$$\{ (x, x^2) : x \text{ est dans le support de } \rho \}.$$

De plus, l'inégalité de Jensen entraîne que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \ln \int_{\mathbb{R}} e^{uz+vw} d\rho(z) \geq \int_{\mathbb{R}} (uz + vw) d\rho(z) = v\sigma^2$$

donc $I(0, \sigma^2) \leq 0$. Comme I est une fonction de taux, $I(0, \sigma^2) = 0$. Ainsi

$$\inf_{\Delta^*} (I - F) \in [-1/2, 0].$$

La fonction I est paire en la première variable. En effet si $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$\begin{aligned} I(-x, y) &= \sup_{(u, v) \in \mathbb{R}^2} \left(-xu + yv - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{uz+vw} d\rho(z) \right) \\ &= \sup_{(u, v) \in \mathbb{R}^2} \left(xu + yv - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{-uz+vw} d\rho(z) \right) = I(x, y). \end{aligned}$$

Supposons que $I - F$ admette un unique minimum (x_0, y_0) sur Δ^* . Alors $(-x_0, y_0)$ est également un minimum de $I - F$ car

$$I(-x_0, y_0) - F(-x_0, y_0) = I(x_0, y_0) - F(x_0, y_0).$$

L'unicité du minimum implique donc que $x_0 = 0$ si bien que

$$\inf_{\Delta^*} (I - F) = I(0, y_0) - F(0, y_0) = I(0, y_0) \geq 0.$$

Comme $I(0, \sigma^2) = 0$ nous en déduisons que $y_0 = \sigma^2$.

Il s'agit donc de montrer, sous l'hypothèse que ρ est symétrique, que $I - F$ admet un unique minimum sur Δ^* . Il s'agira alors de $(0, \sigma^2)$.

b) Cas d'une loi de Bernoulli

Considérons la loi $\rho = (\delta_{-c} + \delta_c)/2$ où $c > 0$. Elle est centrée et de variance c^2 . Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Lambda(u, v) = \ln \int_{\mathbb{R}} e^{ux+vx^2} d\rho(x) = vc^2 + \ln \operatorname{ch}(uc).$$

Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, une étude de fonction nous permet de calculer $I(x, y)$, le supremum de la fonction $(u, v) \mapsto xu + yv - \Lambda(u, v)$. Nous obtenons que I est finie sur $D_I = [-c, c] \times \{c^2\}$, que $I(-c, c^2) = I(c, c^2) = \ln 2$ et que pour tout $x \in]-c, c[$,

$$I(x, c^2) = \frac{1}{2c} ((c+x) \ln(c+x) + (c-x) \ln(c-x)) - \ln c.$$

La fonction $g : x \mapsto I(x, c^2) - x^2/(2c^2)$ est de classe C^2 sur $] -c, c[$ et

$$\forall x \in] -c, c[\quad g'(x) = \frac{1}{c} \left(\operatorname{argth} \left(\frac{x}{c} \right) - \frac{x}{c} \right),$$

$$g''(x) = \frac{1}{c^2 - x^2} - \frac{1}{c^2} \geq 0.$$

Ainsi g' est croissante sur $[-c, c]$ et comme $g'(0) = 0$ nous en déduisons que g admet un unique minimum en 0 et vaut 0. Par conséquent la fonction

$$G : (x, y) \in \Delta^* \mapsto I(x, y) - \frac{x^2}{2y}$$

admet un unique minimum en $(0, c^2) = (0, \sigma^2)$. Retenons le lemme suivant, qui découle de l'étude précédente :

Lemme IV.2. *Soit $c > 0$. Posons*

$$\varphi_c : x \in \mathbb{R} \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}} (ux - \ln \operatorname{ch}(uc)).$$

Alors la fonction $x \mapsto \varphi_c(x) - x^2/(2c^2)$ est strictement croissante sur $[0, c]$, strictement décroissante sur $[-c, 0]$ et nulle en 0.

Comme nous l'avons mentionné dans le paragraphe 3.b), le cas de la loi de Bernoulli est spécial puisque le modèle d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée coïncide alors avec le modèle d'Ising Curie-Weiss critique.

c) Cas où Λ est steep

Nous avons vu dans le paragraphe 11.a) que, quand ρ charge au moins trois points et quand Λ est steep, I est différentiable sur l'intérieur de son ensemble de définition D_I et que, si $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ désigne la réciproque de $\nabla \Lambda$, alors

$$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{D}_I \quad \frac{\partial I}{\partial x}(x, y) = u(x, y).$$

Si nous montrons que $u(x, y) > x/y$ pour $x, y > 0$ alors, en intégrant cette égalité, nous aurons

$$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{D}_I \quad 0 \leq \varepsilon < x \implies I(x, y) - \frac{x^2}{2y} > I(\varepsilon, y) - \frac{\varepsilon^2}{2y}.$$

Il suffit alors d'étendre cette inégalité sur les éventuels points du bord D_I pour établir que $I - F$ admet un unique minimum en $(0, \sigma^2)$. C'est ce que nous allons montrer dans le lemme clé suivant :

Lemme IV.3. Soit ρ une mesure de probabilité symétrique dont le support possède au moins trois points. Pour tout $(x, y) \in A_I$, nous avons $u(x, y) = 0$ si $x = 0$ et

$$u(x, y) > \frac{x}{y} \quad \text{si } x > 0,$$

$$u(x, y) < \frac{x}{y} \quad \text{si } x < 0.$$

Démonstration. Le vecteur $(u, v) = (u(x, y), v(x, y))$ vérifie

$$(x, y) = \nabla \Lambda(u, v) = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} z e^{uz+uz^2} d\rho(z)}{\int_{\mathbb{R}} e^{uz+uz^2} d\rho(z)}, \frac{\int_{\mathbb{R}} z^2 e^{uz+uz^2} d\rho(z)}{\int_{\mathbb{R}} e^{uz+uz^2} d\rho(z)} \right).$$

La probabilité ρ est symétrique donc

$$\int_{\mathbb{R}} z e^{uz+uz^2} d\rho(z) = \int_0^{+\infty} 2z \operatorname{sh}(uz) e^{uz^2} d\rho(z).$$

Cette formule montre que u et x ont même signe. Ensuite $\operatorname{th}(z) \leq z$ pour tout $z \geq 0$ donc, si $x > 0$ alors $\operatorname{sh}(uz) \leq uz \operatorname{ch}(uz)$. L'égalité a lieu si et seulement si $uz = 0$. Par conséquent, en utilisant la symétrie de ρ ,

$$x \leq u \frac{\int_0^{+\infty} 2z^2 \operatorname{ch}(uz) e^{uz^2} d\rho(z)}{\int_{\mathbb{R}} e^{uz+uz^2} d\rho(z)} = u \frac{\int_{\mathbb{R}} z^2 e^{uz+uz^2} d\rho(z)}{\int_{\mathbb{R}} e^{uz+uz^2} d\rho(z)} = uy.$$

Comme $x > 0$, $u > 0$ et $y > 0$, nous concluons que $u > x/y$. De même nous montrons que, si $x < 0$, alors $u < x/y$. \square

Nous pouvons désormais énoncer l'inégalité suivante :

Proposition IV.4. Si ρ est une mesure de probabilité sur \mathbb{R} symétrique, de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que la fonction Λ est steep alors

$$\forall (x, \varepsilon, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad 0 \leq \varepsilon < x \implies I(x, y) - \frac{x^2}{2y} \geq I(\varepsilon, y) - \frac{\varepsilon^2}{2y}.$$

L'inégalité est stricte si $(\varepsilon, y) \in \overset{\circ}{D}_I$.

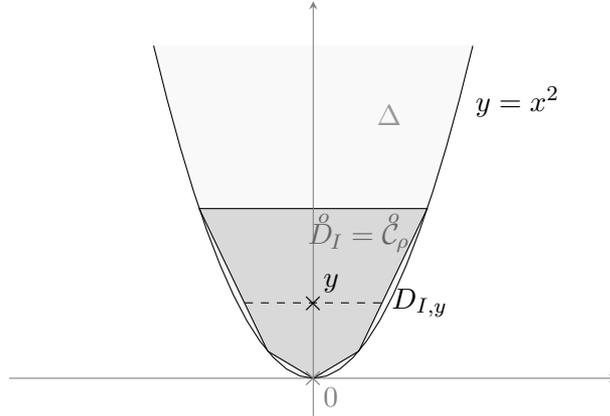
Notons que ce résultat englobe le cas où D_Λ est un ouvert de \mathbb{R}^2 puisque cette condition implique que Λ est steep. Cette proposition couvre donc le cas des lois symétriques à support borné, ce qui constitue le point de départ de la preuve de cette inégalité pour toutes les lois symétriques réelles.

Démonstration. Nous avons déjà traité le cas où ρ est une loi de Bernoulli. Supposons alors que le support de ρ possède au moins trois points. Nous avons vu dans le paragraphe 11.a) que I est de classe C^∞ sur $\overset{\circ}{D}_I$ et que

$$\forall (x, y) \in \overset{\circ}{D}_I \quad \frac{\partial I}{\partial x}(x, y) = u(x, y).$$

Examinons la structure de l'ensemble D_I . Posons

$$\forall y > 0 \quad D_{I,y} = \{x \in \mathbb{R} : (x, y) \in D_I\}.$$



CAS OÙ ρ EST DISCRÈTE SYMÉTRIQUE ET CHARGE 5 POINTS.

Soit $y > 0$ tel qu'il existe $x \in \mathbb{R}$ pour lequel $(x, y) \in \overset{\circ}{D}_I$. L'ensemble $D_{I,y}$ est un convexe de \mathbb{R} . De plus $x \mapsto I(x, y)$ est paire, donc $\overset{\circ}{D}_{I,y}$ (l'intérieur de $D_{I,y}$ vu comme un sous ensemble de \mathbb{R}) est un intervalle ouvert de la forme $] -a(y), a(y)[$ avec $a(y) \in [0, \sqrt{y}]$. Le lemme IV.3 implique que $u(t, y) > t/y$ pour tout $t \in]0, a(y)[$. Ainsi, pour tout $x \in \overset{\circ}{D}_{I,y} \cap]0, +\infty[$ et $\varepsilon \in [0, x[$,

$$I(x, y) - I(\varepsilon, y) = \int_{\varepsilon}^x u(t, y) dt > \int_{\varepsilon}^x \frac{t}{y} dt = \frac{x^2}{2y} - \frac{\varepsilon^2}{2y}.$$

Il n'y a pas de problème de définition en $y = 0$ puisque $\overset{\circ}{D}_I \subset \Delta^*$ ne contient pas $\mathbb{R} \times \{0\}$ et $\overset{\circ}{D}_{I,0} = \emptyset$. De plus

$$x \mapsto \frac{I(x, y) - I(\varepsilon, y)}{x - \varepsilon}$$

est croissante sur $D_{I,y} \setminus \{\varepsilon\}$ puisque I est convexe. Par conséquent, si $-a(y)$ et $a(y)$ appartiennent à $D_{I,y}$, alors l'inégalité précédente reste valable pour $x = -a(y)$ et $x = a(y)$. Nous avons montré que

$$\forall (x, y) \in D_I \quad y > 0, 0 \leq \varepsilon < x \implies I(x, y) - I(\varepsilon, y) > \frac{x^2}{2y} - \frac{\varepsilon^2}{2y}$$

sauf pour les points (x, y) des bords supérieurs et inférieurs de D_I , si ils existent. Plus précisément, posons

$$K^2 = \inf \{x^2 : x \text{ est dans le support de } \rho\} \geq 0$$

et

$$L^2 = \sup \{x^2 : x \text{ est dans le support de } \rho\} \leq +\infty.$$

Si $K = 0$ et $L = +\infty$ alors l'inégalité est montrée sur tout $D_I \setminus \{(0, 0)\}$. Supposons que $K^2 > 0$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Définissons

$$f : (u, v) \in \mathbb{R}^2 \mapsto ux + vK^2 - \Lambda(u, v).$$

En notant $c_K = \rho(\{K\})$, nous avons pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(u, v) = ux - \ln(2c_K \operatorname{ch}(uK)) - \ln \int_{\mathbb{R} \setminus [-K, K]} e^{uz + v(z^2 - K^2)} d\rho(z).$$

Pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus] -K, K[$, la fonction $v \mapsto \exp(v(z^2 - K^2))$ est croissante. Par conséquent

$$\begin{aligned} \sup_{v \in \mathbb{R}} f(u, v) &= ux - \ln(2c_K \operatorname{ch}(uK)) - \ln \left(\lim_{v \rightarrow -\infty} \int_{\mathbb{R} \setminus [-K, K]} e^{uz + v(z^2 - K^2)} d\rho(z) \right) \\ &= ux - \ln(2c_K \operatorname{ch}(uK)) \end{aligned}$$

d'après le théorème de convergence dominée. En effet

$$\forall z \in \mathbb{R} \setminus [-K, K], v < -1, \quad \left| e^{uz+v(z^2-K^2)} \right| \leq e^{uz-(z^2-K^2)}$$

et la fonction $z \in \mathbb{R} \setminus [-K, K] \mapsto e^{uz-(z^2-K^2)}$ est ρ -intégrable car elle est bornée (puisqu'elle est continue et tend vers 0 quand $|z|$ tend vers $+\infty$). Ainsi

$$I(x, K^2) = \sup_{u, v \in \mathbb{R}} f(u, v) = \sup_{u \in \mathbb{R}} \{ ux - \ln(2c_K \text{ch}(uK)) \}.$$

En fait, nous retombons sur le cas d'une loi de Bernoulli. La raison est que, si nous conditionnons à $T_n = K^2$ dans notre modèle, alors pour tout i , $X_n^i = -K$ ou K .

Si $c_K = 0$, alors $I(x, K^2) = +\infty$ pour tout $x \neq 0$, si bien que l'inégalité (large) est vérifiée pour $y = K^2$. Si $c_K > 0$, alors le lemme IV.2 implique que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$0 \leq \varepsilon < x \leq K \implies I(x, K^2) - I(\varepsilon, K^2) = \varphi_K(x) - \varphi_K(\varepsilon) > \frac{x^2}{2K^2} - \frac{\varepsilon^2}{2K^2}.$$

Si $L < +\infty$ alors nous montrons de même l'inégalité pour $y = L^2$. Par conséquent

$$\forall (x, y) \in D_I \setminus \{(0, 0)\} \quad 0 \leq \varepsilon < x \implies I(x, y) - \frac{x^2}{2y} \geq I(\varepsilon, y) - \frac{\varepsilon^2}{2y}$$

et cette inégalité est stricte pour $(\varepsilon, y) \in \overset{\circ}{D}_I$. Enfin nous remarquons que pour tout $y \in \mathbb{R}$, par convexité et parité de $x \mapsto I(x, y)$, si $I(\varepsilon, y) = +\infty$, alors $I(x, y) = +\infty$ pour tout $x > \varepsilon$. Par conséquent l'inégalité s'étend à tout ensemble de \mathbb{R}^2 qui ne contient pas $\mathbb{R} \times \{0\}$. \square

Remarquons que, pour tout $u \in \mathbb{R}$, la fonction $v \mapsto \Lambda(u, v)$ est croissante sur \mathbb{R} . Ainsi

$$\inf_{v \in \mathbb{R}} \Lambda(u, v) = \lim_{v \rightarrow -\infty} \Lambda(u, v) = \lim_{v \rightarrow -\infty} \left(\ln \rho(\{0\}) + \ln \int_{\mathbb{R}^*} e^{uz+ vz^2} d\rho(z) \right) = \ln \rho(\{0\})$$

d'après le théorème de convergence dominée. Et donc

$$-I(0, 0) = \inf_{u, v \in \mathbb{R}^2} \Lambda(u, v) = \ln \rho(\{0\}).$$

Ceci est valable pour toute mesure de probabilité ρ sur \mathbb{R} . D'où le lemme :

Lemme IV.5. *Si ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} alors $I(0, 0) = -\ln \rho(\{0\})$.*

Nous déduisons de la proposition IV.4 le corollaire suivant :

Corollaire IV.6. *Si ρ est une mesure de probabilité symétrique de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que Λ est steep, alors la fonction $(x, y) \in \Delta^* \mapsto I(x, y) - x^2/(2y)$ admet un unique minimum en $(0, \sigma^2)$.*

Démonstration. La proposition IV.4 assure que $x \in \mathbb{R} \mapsto I(x, \sigma^2) - x^2/(2\sigma^2)$ admet un unique minimum en 0. De plus la fonction Λ est convexe, différentiable sur $\overset{\circ}{D}_\Lambda \neq \emptyset$, steep, nulle en $(0, 0)$ et $I(0, \sigma^2) = 0$ donc, d'après le lemme III.10, $(0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$. Dans le cas où D_Λ est un ouvert de \mathbb{R}^2 alors c'est évident puisque $(0, 0) \in D_\Lambda = \overset{\circ}{D}_\Lambda$. Il découle ainsi du point (d) de la proposition III.4 que $I(0, \cdot)$ admet un unique minimum en σ^2 et y vaut 0. Par conséquent

$$\forall (x, y) \in \Delta^* \quad y \neq \sigma^2 \implies I(x, y) - \frac{x^2}{2y} \geq I(0, y) > 0.$$

Par conséquent la fonction $(x, y) \in \Delta^* \mapsto I(x, y) - x^2/(2y)$ admet un unique minimum en $(0, \sigma^2)$. \square

d) Cas général

La démonstration repose sur le résultat dans le cas où ρ est à support borné (où alors $D_\Lambda = \mathbb{R}^2$) et le théorème de Mosco :

Définition IV.7. Soient f et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des fonctions convexes de \mathbb{R}^d à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$. Nous disons que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f au sens de Mosco si, pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,
 \star pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^d qui converge vers x ,

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) \geq f(x),$$

\star il existe une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de \mathbb{R}^d qui converge vers x et telle que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} f_n(x_n) \leq f(x).$$

Nous notons alors

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{M}} f.$$

Théorème IV.8 (Mosco [46]). Si f et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des fonctions de \mathbb{R}^d dans $[-\infty, +\infty]$ convexes et semi-continues inférieurement alors

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{M}} f \iff f_n^* \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{M}} f^*,$$

où f^* (resp. f_n^*) désigne la transformée de Fenchel-Legendre de f (resp. f_n).

Proposition IV.9. Soit ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d . Notons L sa Log-Laplace. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de compacts dont la réunion est \mathbb{R}^d . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, définissons $\nu_n = \nu(\cdot | K_n)$ la probabilité ν conditionnée par K_n et notons L_n sa Log-Laplace. Nous avons alors

$$L_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{M}} L.$$

Démonstration. Pour n assez grand, le compact K_n rencontre le support de ν , et nous avons

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d} \quad \nu_n(A) = \frac{\nu(A \cap K_n)}{\nu(K_n)}.$$

Pour n assez grand et pour $\lambda \in \mathbb{R}^d$,

$$L_n(\lambda) = \ln \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle \lambda, z \rangle} d\nu_n(z) = \ln \int_{K_n} e^{\langle \lambda, z \rangle} d\nu(z) - \ln \nu(K_n).$$

Donc par convergence monotone,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} L_n(\lambda) = \ln \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\mathbb{1}_{K_n}(z) e^{\langle \lambda, z \rangle} \right) d\nu(z) - \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln \nu(K_n) = L(\lambda).$$

Ainsi la deuxième condition de la convergence de Mosco (avec la limsup) est vérifiée avec la suite $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ constante égale à λ .

Soient $\lambda \in \mathbb{R}^d$ et $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque qui converge vers λ . Le lemme de Fatou entraîne que

$$\exp L(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^d} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{1}_{K_n}(z) e^{\langle \lambda_n, z \rangle} d\nu(z) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{K_n}(z) e^{\langle \lambda_n, z \rangle} d\nu(z).$$

Donc

$$L(\lambda) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} (L_n(\lambda_n) + \ln \nu(K_n)) = \liminf_{n \rightarrow +\infty} L_n(\lambda_n).$$

Ainsi la première condition de la convergence de Mosco (avec la liminf) est satisfaite. \square

Corollaire IV.10. *Si ρ une mesure de probabilité symétrique et non-dégénérée sur \mathbb{R} alors*

$$\forall (x, y) \in \Delta^* \quad \forall \varepsilon \in [0, x] \quad I(x, y) - \frac{x^2}{2y} \geq I(\varepsilon, y) - \frac{\varepsilon^2}{2y}.$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $K_n = [-n, n]^2$. Pour n assez grand pour que K_n intersecte le support de ν_ρ , notons $\nu_n = \nu_\rho(\cdot | K_n)$, Λ_n sa Log-Laplace et I_n sa transformée de Fenchel-Legendre. Pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$,

$$\Lambda_n(u, v) = \ln \int_{K_n} e^{us+vt} d\nu_\rho(s, t) - \ln \nu_\rho(K_n) \leq \Lambda(u, v) - \ln \nu_\rho(K_n).$$

Passant à la transformée de Fenchel-Legendre, il vient

$$\forall (\varepsilon, y) \in \mathbb{R}^2 \quad I(\varepsilon, y) \leq I_n(\varepsilon, y) - \ln \nu_\rho(K_n).$$

De plus la mesure ν_n est à support borné donc la proposition IV.4 et l'inégalité précédente entraînent que, pour tout $(x, \varepsilon, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times]0, +\infty[$,

$$0 \leq \varepsilon < x \quad \implies \quad I(\varepsilon, y) - \frac{\varepsilon^2}{2y} + \frac{x^2}{2y} \leq I_n(x, y) - \ln \nu_\rho(K_n).$$

Il découle de la proposition IV.9 que $(\Lambda_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Mosco vers Λ donc, d'après le théorème de Mosco, $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge au sens de Mosco vers I . En particulier, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $y > 0$ et $x > \varepsilon$, il existe une suite $(x_n, y_n) \in \mathbb{R}^2$ qui converge vers (x, y) et telle que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} I_n(x_n, y_n) \leq I(x, y).$$

Comme $y > 0$ et $x > \varepsilon$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $y_n > 0$ et $x_n > \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Par conséquent

$$\forall n \geq n_0 \quad I(\varepsilon, y_n) - \frac{\varepsilon^2}{2y_n} + \frac{x_n^2}{2y_n} \leq I_n(x_n, y_n) - \ln \nu_\rho(K_n).$$

De plus $\nu_\rho(K_n)$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$. D'où

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} I(\varepsilon, y_n) - \frac{\varepsilon^2}{2y} + \frac{x^2}{2y} \leq I(x, y).$$

Enfin I est semi-continue inférieurement donc

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} I(\varepsilon, y_n) \geq I(\varepsilon, y).$$

D'où l'inégalité annoncée. \square

Nous pouvons maintenant montrer que $I - F$ admet un unique minimum sur Δ^* en $(0, \sigma^2)$, dans le cas général d'une mesure symétrique :

Démonstration de la proposition IV.1. Le corollaire IV.10 entraîne que

$$\forall (x, y) \in \Delta^* \quad I(x, y) - \frac{x^2}{2y} \geq I(0, y).$$

Ainsi $I - F$ est une fonction positive. Comme $(0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$, la fonction $I(0, \cdot)$ admet un unique minimum en σ^2 (cf. le point (d) de la proposition III.4). Par conséquent, si $I - F$ admet un minimum sur Δ^* en (x_0, y_0) , alors $y_0 = \sigma^2$ et $I(x_0, \sigma^2) = x_0^2/(2\sigma^2)$.

De plus $(0, \sigma^2) \in A_I$ donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que B_ε , la boule ouverte centrée en $(0, \sigma^2)$ et de rayon ε , est incluse dans A_I . Si (x, y) réalise le minimum de $I - F$ sur B_ε alors

$$(u(x, y), v(x, y)) = \nabla I(x, y) = \nabla F(x, y) = (x/y, -x^2/(2y^2)).$$

Le lemme IV.3 assure alors que $x = 0$ et donc $u(x, y) = v(x, y) = 0$. Par conséquent $(x, y) = (0, \sigma^2)$. D'où

$$\forall x \in]-\varepsilon, 0[\cap]0, \varepsilon[\quad I(x, \sigma^2) - \frac{x^2}{2\sigma^2} > 0.$$

En appliquant le corollaire IV.10 avec $\varepsilon/2$, nous voyons que l'inégalité ci-dessus est vraie pour tout $x \neq 0$. Il s'ensuit que $x_0 = 0$. \square

e) Preuve alternative de la proposition IV.1

Dans ce paragraphe, nous donnons une démonstration plus immédiate de la proposition IV.1 que nous avons découverte bien après, notamment en étudiant la mesure empirique associée au modèle. Elle repose sur le lemme suivant :

Lemme IV.11. *Si ρ est une mesure de probabilité symétrique et non-dégénérée sur \mathbb{R} alors*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \Lambda \left(\frac{x}{y}, -\frac{x^2}{2y^2} \right) \leq 0,$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$.

Démonstration. Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. En utilisant la symétrie de ρ , nous obtenons

$$\exp \Lambda(u, v) = \int_{\mathbb{R}} \exp(uz + vz^2) d\rho(z) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-uz + vz^2) d\rho(z),$$

si bien que

$$\begin{aligned} \exp \Lambda(u, v) &= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(uz + vz^2) d\rho(z) + \int_{\mathbb{R}} \exp(-uz + vz^2) d\rho(z) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \operatorname{ch}(uz) \exp(vz^2) d\rho(z). \end{aligned}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous avons alors

$$1 - \exp \Lambda \left(\frac{x}{y}, -\frac{x^2}{2y^2} \right) = \int_{\mathbb{R}} \left(1 - \operatorname{ch} \left(\frac{xz}{y} \right) \exp \left(-\frac{x^2 z^2}{2y^2} \right) \right) d\rho(z) = \int_{\mathbb{R}} \varphi \left(\frac{xz}{y} \right) d\rho(z),$$

où $\varphi(s) = 1 - \operatorname{ch}(s) \exp(-s^2/2)$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. La fonction φ est positive sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0 si bien que

$$1 - \exp \Lambda \left(\frac{x}{y}, -\frac{x^2}{2y^2} \right) \geq 0,$$

et, comme ρ est non-dégénérée, l'égalité a lieu si et seulement si $x = 0$. En passant au logarithme, nous démontrons le lemme. \square

Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Par définition de $I(x, y)$ nous avons

$$I(x, y) \geq x \times \frac{x}{y} + y \times \left(-\frac{x^2}{2y^2} \right) - \Lambda \left(\frac{x}{y}, -\frac{x^2}{2y^2} \right).$$

Nous en déduisons que

$$I(x, y) - \frac{x^2}{2y} \geq -\Lambda \left(\frac{x}{y}, -\frac{x^2}{2y^2} \right) \geq 0.$$

Et d'après le lemme, le terme de droite est strictement positif dès que $x \neq 0$. Si $x = 0$ alors

$$I(x, y) - \frac{x^2}{2y} = I(0, y).$$

Si nous faisons l'hypothèse que Λ est finie au voisinage de $(0, 0)$ alors le point (d) de la proposition III.4 nous assure que $I(0, y) > 0$ pour $y \neq \sigma^2$. Nous avons donc montré que $I - F$ admet un unique minimum sur Δ^* en $(0, \sigma^2)$.

En fait nous avons montré un résultat plus fort que celui de la proposition IV.1 :

Proposition IV.12. *Si ρ est une mesure de probabilité symétrique et non-dégénérée sur \mathbb{R} alors*

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \quad I(x, y) > \frac{x^2}{2y}$$

Si de plus Λ est finie sur un voisinage de $(0, 0)$ alors la fonction

$$(x, y) \in \Delta^* \longmapsto I(x, y) - \frac{x^2}{2y}$$

admet un unique minimum en $(0, \sigma^2)$.

f) Et si ρ n'est pas symétrique ?

Quel est le minimum de $I - F$ dans le cas où ρ est une mesure de probabilité centrée mais non symétrique ? Pour tenter de répondre à cette question, regardons le cas simple où

$$\rho = \frac{b}{a+b} \delta_{-a} + \frac{a}{a+b} \delta_b,$$

avec a et b deux réels strictement positifs. Il s'agit d'une mesure centrée et de variance $\sigma^2 = ab$, qui n'est symétrique que si $a = b$. Supposons que ce n'est pas le cas. Nous calculons ensuite que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \Lambda(u, v) = \ln \left(b e^{-ua+va^2} + a e^{ub+vb^2} \right) - \ln(a+b).$$

Une étude de fonction nous permet de montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$I(x, y) = \begin{cases} \frac{a+x}{a+b} \ln \left(1 + \frac{x}{a} \right) + \frac{b-x}{a+b} \ln \left(1 - \frac{x}{b} \right) & \text{si } x \in]-a, b[\text{ et } y = (b-a)x + ab, \\ \ln(1+a/b) & \text{si } (x, y) = (-a, a^2), \\ \ln(1+b/a) & \text{si } (x, y) = (b, b^2), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi le couple (x_0, y_0) est un minimum de $I - F$ si et seulement si $y_0 = (b-a)x_0 + ab$ et x_0 est un minimum sur $[-a, b]$ de la fonction g définie par $g(-a) = \ln(1+a/b) - 1/2$, $g(b) = \ln(1+b/a) - 1/2$ et

$$\forall x \in]-a, b[\quad g(x) = \frac{a+x}{a+b} \ln \left(1 + \frac{x}{a} \right) + \frac{b-x}{a+b} \ln \left(1 - \frac{x}{b} \right) - \frac{x^2}{2((b-a)x + ab)}.$$

Par calcul, nous obtenons que, au voisinage de 0,

$$g(x) = \frac{b-a}{3a^2b^2} x^3 + \frac{ab-5(b-a)^2}{12a^3b^3} x^4 + o(x^4).$$

Comme $a \neq b$, le point 0 ne peut pas être le minimum de g et donc cela exclut que $(0, \sigma^2)$ soit le minimum de la fonction $I - F$. Il s'ensuit (cf. les arguments classiques de grandes déviations

rappelés dans le paragraphe 9.b)) que, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n)$ ne converge pas en probabilité vers $(0, \sigma^2)$. Cependant il se pourrait que les fluctuations autour du minimum de $I - F$ soient d'ordre $n^{3/4}$. Etudions plus en détail la fonction g : pour tout $x \in]-a, b[$, nous avons

$$g'(x) = \frac{1}{a+b} \ln \left(\frac{1+x/a}{1-x/b} \right) - \frac{x}{2} \frac{(b-a)x + 2ab}{((b-a)x + ab)^2}$$

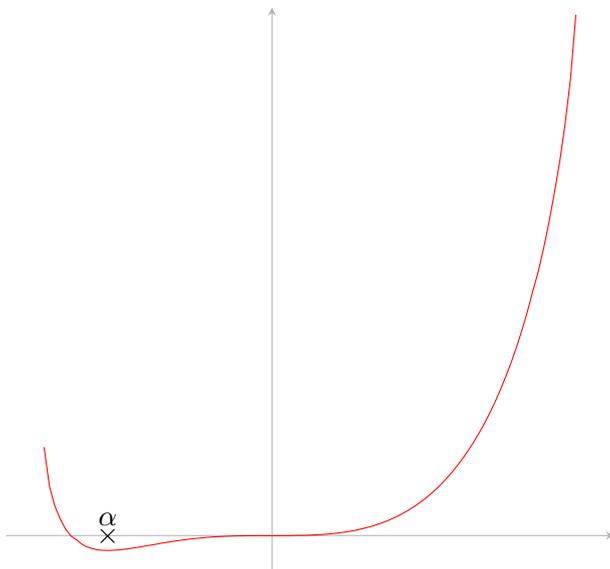
et

$$g''(x) = \frac{1}{(a+x)(b-x)} - \frac{a^2b^2}{((b-a)x + ab)^3}.$$

Nous calculons que $g''(x) \geq 0$ si et seulement si $xP(x) \geq 0$, avec

$$P(x) = (b-a)^3x^2 + ab(3(b-a)^2 + ab)x + 2a^2b^2(b-a).$$

Pour continuer, regardons le cas où $(a, b) = (3, 4)$. Le polynôme P admet alors deux racines réelles : $-90 \pm 6\sqrt{217}$. Ainsi il existe $\alpha \in]-3, -90 + 6\sqrt{217}[$ tel que $g'(x) < 0$ sur $] -3, \alpha[$ et $g'(x) > 0$ sur $] \alpha, 4[$. Ce point α est donc le minimum de g (une valeur approchée est $-2,1616$). Traçons la fonction g :



De plus le terme d'ordre 2 dans le développement limité de g autour de ce minimum est strictement positif donc les arguments classiques de grandes déviations et de méthode de Laplace rappelés dans le paragraphe 9.b) suggèrent que les fluctuations sont en \sqrt{n} et la loi limite Gaussienne. Par conséquent, dans le cas où ρ n'est pas symétrique, la somme S_n des variables aléatoires de notre modèle ne se comporte pas en général comme nous le voulons et il nous faudrait donc déterminer une nouvelle fonction d'interaction.

Nous nous contenterons d'étudier le cas des mesures symétriques dans la suite. Nous allons voir dans le paragraphe 13 que, dans ce cas, $I(x, \sigma^2) \sim \mu_4 x^4 / (12\sigma^8)$ au voisinage de 0. Cela va nous assurer des fluctuations d'ordre $n^{3/4}$.

12 Une inégalité exponentielle pour les lois symétriques

Une question centrale dans l'étude des sommes de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées est le contrôle de la probabilité qu'elles dévient de leur valeur typique. Cependant ces probabilités sont généralement difficiles à calculer, et la stratégie alternative est d'avoir recours à des inégalités. La plus fondamentale est la célèbre inégalité de Tchebychev.

De nombreuses extensions de cette inégalité permettent de montrer que, pour des variables aléatoires indépendantes admettant des moments exponentiels, la vitesse de déviation décroît exponentiellement quand le nombre de variables augmente. Citons par exemples les inégalités de Tchebychev exponentielle et de Hoeffding, qui sont très utiles notamment pour construire des tests statistiques et des intervalles de confiance.

La proposition IV.12 nous assure que, si ρ est symétrique et non-dégénérée, alors $I(x, y) > x^2/(2y)$ dès que $x \neq 0$ et $y \neq 0$. Dans ce paragraphe nous en montrons une conséquence : une inégalité exponentielle très simple.

Théorème IV.13. *Soit ρ une mesure symétrique sur \mathbb{R} . Si $n \geq 1$ et si X_1, \dots, X_n sont n variables aléatoires indépendantes de même loi ρ , alors*

$$\forall x > 0 \quad \forall y > 0 \quad \mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \geq x, X_1^2 + \dots + X_n^2 \leq y) < \exp\left(-\frac{x^2}{2y}\right).$$

Si nous appliquons cette inégalité avec nx, ny au lieu de x, y , alors nous obtenons une inégalité qui contrôle les deux premiers moments empiriques de X_1, \dots, X_n :

$$\forall x > 0 \quad \forall y > 0 \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \geq x, \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} \leq y\right) < \exp\left(-\frac{nx^2}{2y}\right).$$

Avec la théorie classique des grandes déviations (cf. l'annexe B ou plus généralement [22]), nous obtenons usuellement des inégalités exponentielles de ce type, mais malheureusement elles ne sont valables que pour n grand et c'est un problème difficile de quantifier à quel point n doit être grand. Durant les dernières décennies, les probabilistes et statisticiens ont essayé de prouver des inégalités non-asymptotiques, qui sont valables pour tout $n \geq 1$ et avec des constantes explicites (cf. [10]). La plupart de ces inégalités sont basées sur le phénomène de concentration de la mesure et elles requièrent un fort contrôle sur la queue de la distribution ρ , typiquement l'existence d'un moment exponentiel. L'inégalité du théorème IV.13 est valable pour toutes les lois symétriques et ne requiert aucune condition d'intégrabilité.

Démonstration du théorème IV.13. Soient $n \geq 1$ et $x, y > 0$. Notons

$$S_n = X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad T_n = X_1^2 + \dots + X_n^2.$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \geq x, T_n \leq y) &= \mathbb{P}\left(\frac{x}{y} S_n \geq \frac{x^2}{y}, -\frac{x^2}{2y^2} T_n \geq -\frac{x^2}{2y}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\frac{x}{y} S_n - \frac{x^2}{2y^2} T_n \geq \frac{x^2}{2y}\right) = \mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{x}{y} S_n - \frac{x^2}{2y^2} T_n\right) \geq \exp\left(\frac{x^2}{2y}\right)\right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Markov et le fait que X_1, \dots, X_n sont indépendantes de même loi ρ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(S_n \geq x, T_n \leq y) &\leq \exp\left(-\frac{x^2}{2y}\right) \mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{x}{y} X_i - \frac{x^2}{2y^2} X_i^2\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{x^2}{2y} + n\Lambda\left(\frac{x}{y}, -\frac{x^2}{2y^2}\right)\right). \end{aligned}$$

Comme $x > 0$, le lemme IV.11 entraîne que

$$\mathbb{P}(S_n \geq x, T_n \leq y) < \exp\left(-\frac{x^2}{2y}\right),$$

et le théorème est démontré. \square

Notons que le théorème IV.13 est plus exactement une conséquence du lemme IV.11.

Dans toute la suite de ce paragraphe, nous supposons que X_1, \dots, X_n sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi symétrique sur \mathbb{R} . Examinons les liens entre notre inégalité et l'inégalité de Hoeffding : supposons qu'il existe $c > 0$ tel que $\mathbb{P}(|X_1| \leq c) = 1$. En prenant $y = c^2$ dans notre inégalité, nous obtenons

$$\forall x > 0 \quad \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \geq x\right) < \exp\left(-\frac{nx^2}{2c^2}\right).$$

Nous retrouvons ainsi la borne supérieure donnée par l'inégalité de Hoeffding (dans le cas particulier de variables indépendantes et de même loi bornée et symétrique, et avec une inégalité stricte). Notons que la preuve de notre inégalité est plus simple que celle de l'inégalité de Hoeffding, qui requiert un développement du second ordre, la formule de Taylor et l'hypothèse que les variables sont bornées. La démonstration de notre inégalité de requiert que l'inégalité $\text{ch}(u) \leq \exp(-u^2/2)$ pour $u \in \mathbb{R}$, et l'hypothèse de symétrie de la loi.

Réciproquement, un référent anonyme nous a fait remarquer que l'inégalité de Hoeffding nous permet de retrouver notre inégalité via un argument de conditionnement : donnons-nous $x, y > 0$ et $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$. Supposons aussi qu'elles sont indépendantes de X_1, \dots, X_n . La symétrie des X_i , $1 \leq i \leq n$, nous assure alors que

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n \geq x, T_n \leq y) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 X_1 + \dots + \varepsilon_n X_n \geq x, T_n \leq y).$$

Nous conditionnons ensuite par X_1, \dots, X_n :

$$\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\varepsilon_1 X_1 + \dots + \varepsilon_n X_n \geq x} \mathbb{1}_{T_n \leq y}) = \mathbb{E}\left(\mathbb{P}(\varepsilon_1 X_1 + \dots + \varepsilon_n X_n \geq x \mid X_1, \dots, X_n) \mathbb{1}_{T_n \leq y}\right).$$

L'inégalité de Hoeffding appliquée à $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ nous donne

$$\mathbb{P}(\varepsilon_1 X_1 + \dots + \varepsilon_n X_n \geq x \mid X_1, \dots, X_n) \leq \exp\left(-\frac{x^2}{2(X_1^2 + \dots + X_n^2)}\right) = \exp\left(-\frac{x^2}{2T_n}\right).$$

En insérant cette inégalité dans l'espérance conditionnelle ci-dessus et en utilisant la condition $T_n \leq y$, nous obtenons l'inégalité du théorème IV.13, sauf qu'elle est large et non stricte.

Nous terminons ce paragraphe par une application au cas non-symétrique.

Corollaire IV.14. *Soit $n \geq 1$. Supposons que $X_1, \dots, X_n, X'_1, \dots, X'_n$ sont $2n$ variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi. Alors, pour tous $x, y > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} - \frac{X'_1 + \dots + X'_n}{n} \geq x \mid \frac{X_1^2 + \dots + X_n^2}{n} + \frac{X_1'^2 + \dots + X_n'^2}{n} \leq y\right) < \exp\left(-\frac{nx^2}{4y}\right).$$

Démonstration. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous posons $Y_i = X_i - X'_i$. En utilisant le fait que $(x - y)^2 \leq 2(x^2 + y^2)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nous remarquons que la probabilité dans l'énoncé du corollaire est majorée par

$$\mathbb{P}(Y_1 + \dots + Y_n \geq nx, Y_1^2 + \dots + Y_n^2 \leq 2ny).$$

Nous terminons la preuve en appliquant le théorème IV.13 aux variables aléatoires indépendantes et symétriques Y_1, \dots, Y_n . \square

13 Développement de $I - F$ au voisinage de $(0, \sigma^2)$

Si ρ est une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} dont le support comporte au moins trois points et si $(0, 0) \in \mathring{D}_L$ alors $(0, \sigma^2) = \nabla\Lambda(0, 0) \in \nabla\Lambda(\mathring{D}_\Lambda) = A_I$, le domaine admissible de I . Nous avons vu dans le paragraphe 11.a) que I est de classe C^∞ au voisinage de $(0, \sigma^2)$ et que

$$\nabla I(0, \sigma^2) = (u(0, \sigma^2), v(0, \sigma^2)) = (\nabla\Lambda)^{-1}(0, \sigma^2) = (0, 0),$$

$$D_{(0, \sigma^2)}^2 I = \left(D_{(0, 0)}^2 \Lambda \right)^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \mu_4 - \sigma^4 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma^2 & 0 \\ 0 & 1/(\mu_4 - \sigma^4) \end{pmatrix},$$

puisque $D_{(0, 0)}^2 \Lambda$ est la matrice de covariance de ν_ρ (cf. la démonstration du théorème III.16). A l'ordre 2, le développement limité de I au voisinage de $(0, \sigma^2)$ est donc

$$I(x, y) = \frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{(y - \sigma^2)^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)} + o(\|x, y - \sigma^2\|^2).$$

Et le développement limité de F à l'ordre 2 au voisinage de $(0, \sigma^2)$ est

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2y} = \frac{x^2}{2\sigma^2} \frac{1}{1 + (y - \sigma^2)/\sigma^2} = \frac{x^2}{2\sigma^2} + o(\|x, y - \sigma^2\|^2).$$

Ainsi le développement limité de $I - F$ à l'ordre 2 au voisinage de $(0, \sigma^2)$ est

$$I(x, y) - F(x, y) = \frac{(y - \sigma^2)^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)} + o(\|x, y - \sigma^2\|^2).$$

Il nous faut donc pousser le développement limité de $I - F$ plus loin.

Regardons un exemple, celui de la gaussienne centrée de variance σ^2 . Une étude de fonction nous permet d'obtenir que

$$\forall (x, y) \in \Delta^* \quad I(x, y) = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sigma^2} - 1 - \ln \left(\frac{y - x^2}{\sigma^2} \right) \right).$$

Et donc, si ψ désigne la fonction définie dans la proposition II.9, alors

$$I(x, y) - F(x, y) = \psi \left(\frac{x}{\sigma}, \frac{y}{\sigma^2} \right) - \frac{1}{2}.$$

Le lemme II.10 entraîne alors qu'au voisinage de $(0, \sigma^2)$,

$$I(x, y) - F(x, y) \sim \frac{1}{4} \left(\frac{x^4}{\sigma^4} + \left(\frac{y}{\sigma^2} - 1 \right)^2 \right) = \frac{x^4}{4\sigma^4} + \frac{(y - \sigma^2)^2}{4\sigma^2}.$$

En fait, nous avons une telle équivalence dans un cas plus général :

Proposition IV.15. *Si ρ est une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} dont le support possède au moins trois points et telle que $(0, 0) \in \mathring{D}_\Lambda$ alors I est de classe C^∞ au voisinage de $(0, \sigma^2)$. Si μ_4 désigne le moment d'ordre 4 de ρ (qui est fini) alors, quand (x, y) tend vers $(0, \sigma^2)$,*

$$I(x, y) - \frac{x^2}{2y} \sim \frac{(y - \sigma^2)^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)} + \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8}.$$

Remarquons que, si ρ est la loi Gaussienne $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors $2(\mu_4 - \sigma^4) = 2(3\sigma^4 - \sigma^4) = 4\sigma^4$ et $\mu_4/(12\sigma^8) = 3\sigma^4/(12\sigma^8) = (4\sigma^4)^{-1}$ (ce que nous avons obtenu ci-dessus).

Afin d'éviter certains calculs et ainsi de simplifier la démonstration, regardons d'abord quels sont les termes dans le développement de $I - F$ qui sont négligeables devant $Ax^4 + Bx^2$ pour $A, B > 0$:

Lemme IV.16. Soient A et B des réels strictement positifs. Alors, au voisinage de $(0, 0)$,

$$\|x, y\|^4 = O(Ax^4 + Bx^2).$$

Pour tout couple d'entiers (α, β) , nous avons

$$\frac{\alpha}{2} + \beta > 2 \implies \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^\alpha y^\beta}{Ax^4 + Bx^2} = 0.$$

Démonstration. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, il existe un unique couple (r, θ) appartenant à $]0, +\infty[\times]-\pi/2, \pi/2[$ et tel que $(x^2, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. Ainsi

$$Ax^4 + Bx^2 = Ar^2 \cos^2 \theta + Br^2 \sin^2 \theta \geq \min(A, B) r^2.$$

Nous obtenons alors

$$\frac{\|x, y\|^4}{Ax^4 + Bx^2} = \frac{(x^2 + y^2)^2}{Ax^4 + Bx^2} \leq \frac{(r \cos \theta + r^2 \sin^2 \theta)^2}{\min(A, B) r^2} = \frac{(\cos \theta + r \sin^2 \theta)^2}{\min(A, B)}.$$

Il s'agit bien d'une quantité bornée quand r tend vers 0. Ensuite

$$\left| \frac{x^\alpha y^\beta}{Ax^4 + Bx^2} \right| \leq \frac{|r \cos \theta|^{\alpha/2} |r \sin \theta|^\beta}{\min(A, B) r^2} = O(r^{\alpha/2 + \beta - 2}).$$

Or la convergence de (x, y) vers $(0, 0)$ est équivalente à la convergence de r vers 0. D'où le lemme. \square

Démonstration de la proposition IV.15. Si $(0, 0) \in \mathring{D}_\Lambda$ alors

$$(0, \sigma^2) = \nabla \Lambda(0, 0) \in \nabla \Lambda(\mathring{D}_\Lambda) = A_I.$$

Nous avons vu dans le paragraphe 11.a) que I est de classe C^∞ sur A_I (et donc en particulier au voisinage de $(0, \sigma^2)$). De plus, si $(x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ désigne la réciproque de $\nabla \Lambda$ alors, pour tout $(x, y) \in A_I$,

$$\nabla I(x, y) = (\nabla \Lambda)^{-1}(x, y) = (u(x, y), v(x, y)) \quad \text{et} \quad D_{(x,y)}^2 I = \left(D_{(u(x,y), v(x,y))}^2 \Lambda \right)^{-1}.$$

Notons aussi que l'hypothèse $(0, 0) \in \mathring{D}_\Lambda$ entraîne que ρ admet des moments de tout ordre.

Le développement limité de F à l'ordre 4 au voisinage de $(0, \sigma^2)$ est

$$F(x, y) = \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{x^2(y - \sigma^2)}{2\sigma^4} + \frac{x^2(y - \sigma^2)^2}{2\sigma^6} + o(\|x, y - \sigma^2\|^4).$$

Par conséquent, au voisinage de $(0, 0)$,

$$\begin{aligned} I(x, h + \sigma^2) - F(x, h + \sigma^2) &= \frac{h^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)} + a_{3,0}x^3 + a_{2,1}x^2h + a_{1,2}xh^2 + a_{0,3}h^3 \\ &\quad + a_{4,0}x^4 + a_{3,1}x^3h + a_{2,2}x^2h^2 + a_{1,3}xh^3 + a_{0,4}h^4 + o(\|x, h\|^4), \end{aligned}$$

avec, pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}$ tel que $i + j \in \{3, 4\}$,

$$a_{i,j} = \frac{1}{i!j!} \frac{\partial^{i+j} I}{\partial x^i \partial y^j}(0, \sigma^2)$$

sauf

$$a_{2,1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^3 I}{\partial x^2 \partial y} (0, \sigma^2) + \frac{1}{\sigma^4} \right) \quad \text{et} \quad a_{2,2} = \frac{1}{4} \frac{\partial^4 I}{\partial x^2 \partial y^2} (0, \sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^4}.$$

Si nous montrons que $a_{4,0} > 0$ alors, d'après le lemme précédent, les termes en xh^2 , h^3 , x^3h , x^2h^2 , xh^3 et h^4 sont négligeables devant $a_{4,0}x^4 + a_{0,2}h^2$ quand (x, h) tend vers $(0, 0)$. Ensuite la parité de $I - F$ en la première variable entraîne que $a_{3,0} = 0$. Si nous montrons que $a_{2,1} = 0$, alors nous obtenons

$$I(x, y) - F(x, y) = \left(\frac{(y - \sigma^2)^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)} + a_{4,0}x^4 \right) (1 + o(1))$$

quand (x, y) tend vers $(0, \sigma^2)$. D'où l'équivalence annoncée.

Pour conclure il faut montrer à présent que $a_{2,1} = 0$ et $a_{4,0} = \mu_4/(12\sigma^8)$, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^3 I}{\partial x^2 \partial y} (0, \sigma^2) = -\frac{1}{\sigma^4} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^4 I}{\partial x^4} (0, \sigma^2) = \frac{2\mu_4}{\sigma^8}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous introduisons la fonction f_j définie sur \mathring{D}_Λ par

$$\forall (u, v) \in \mathring{D}_\Lambda \quad f_j(u, v) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x^j e^{ux+vx^2} d\rho(x)}{\int_{\mathbb{R}} e^{ux+vx^2} d\rho(x)}.$$

Ces fonctions sont de classe C^∞ sur \mathring{D}_Λ et vérifient les propriétés suivantes :

★ f_0 est la fonction identité sur \mathbb{R}^2 .

★ Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f_j(0, 0) = \mu_j$ le moment d'ordre j de ρ . Il est nul quand j est impair puisque ρ est symétrique. De plus

$$f_1 = \frac{\partial \Lambda}{\partial u} \quad \text{et} \quad f_2 = \frac{\partial \Lambda}{\partial v}.$$

★ Pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial f_j}{\partial u} = f_{j+1} - f_j f_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_j}{\partial v} = f_{j+2} - f_j f_2.$$

Par conséquent, pour tout $(x, y) \in A_I$,

$$D_{(x,y)}^2 I = \left(D_{(u(x,y), v(x,y))}^2 \Lambda \right)^{-1} = \begin{pmatrix} f_2 - f_1^2 & f_3 - f_1 f_2 \\ f_3 - f_1 f_2 & f_4 - f_2^2 \end{pmatrix}^{-1} (u(x, y), v(x, y)).$$

En notant $g = (f_2 - f_1^2)(f_4 - f_2^2) - (f_3 - f_1 f_2)^2$, le déterminant de la matrice symétrique définie positive $D^2 \Lambda$, nous obtenons que, pour tout $(x, y) \in A_I$,

$$D_{(x,y)}^2 I = \frac{1}{g(u(x, y), v(x, y))} \begin{pmatrix} f_4 - f_2^2 & f_1 f_2 - f_3 \\ f_1 f_2 - f_3 & f_2 - f_1^2 \end{pmatrix} (u(x, y), v(x, y)).$$

De plus $(u(0, \sigma^2), v(0, \sigma^2)) = (0, 0)$ donc

$$\frac{\partial u}{\partial x} (0, \sigma^2) = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2} (0, \sigma^2) = \frac{f_4 - f_2^2}{g} (0, 0) = \frac{\mu_4 - \sigma^4}{\sigma^2(\mu_4 - \sigma^4)} = \frac{1}{\sigma^2},$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} (0, \sigma^2) = \frac{\partial^2 I}{\partial y^2} (0, \sigma^2) = \frac{f_2 - f_1^2}{g} (0, 0) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2(\mu_4 - \sigma^4)} = \frac{1}{\mu_4 - \sigma^4},$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} (0, \sigma^2) = \frac{\partial v}{\partial x} (0, \sigma^2) = \frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} (0, \sigma^2) = \frac{f_1 f_2 - f_3}{g} (0, 0) = 0.$$

En dérivant selon y , nous obtenons

$$\frac{\partial^3 I}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (u, v) + \frac{\partial v}{\partial y} \times \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (u, v).$$

Le premier terme de l'addition est nul quand on l'évalue en $(0, \sigma^2)$. Pour le deuxième, il nous faut calculer la dérivée partielle de $(f_4 - f_2^2)/g$ en v :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) = \frac{1}{g} \times \frac{\partial}{\partial v} (f_4 - f_2^2) - \frac{f_4 - f_2^2}{g^2} \times \frac{\partial g}{\partial v} = \frac{f_6 - 3f_2 f_4 + 2f_2^3}{g} - \frac{f_4 - f_2^2}{g^2} \times \frac{\partial g}{\partial v}.$$

En développant l'expression de g , nous obtenons que

$$g = f_2 f_4 - f_1^2 f_4 - f_2^3 - f_3^2 + 2f_1 f_2 f_3.$$

Dérivons-la selon v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial v} &= f_2(f_6 - f_4 f_2) + f_4(f_4 - f_2^2) - f_1^2(f_6 - f_4 f_2) - 2f_4 f_1(f_3 - f_1 f_2) - 3f_2^2(f_4 - f_2^2) \\ &\quad - 2f_3(f_5 - f_3 f_2) + 2f_1 f_2(f_5 - f_3 f_2) + 2f_2 f_3(f_3 - f_1 f_2) + 2f_1 f_3(f_4 - f_2^2). \end{aligned}$$

En l'évaluant en $(0, 0)$, tous les termes d'indice impair s'annulent et nous avons

$$\frac{\partial g}{\partial v}(0, 0) = \sigma^2(\mu_6 - \mu_4 \sigma^2) + \mu_4(\mu_4 - \sigma^4) - 3\sigma^4(\mu_4 - \sigma^4) = \sigma^2 \mu_6 - 3\mu_4 \sigma^4 + 2\sigma^8 + (\mu_4 - \sigma^4)^2.$$

Finalement

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (0, 0) = \frac{\mu_6 - 3\sigma^2 \mu_4 + 2\sigma^6}{\sigma^2(\mu_4 - \sigma^4)} - \frac{\sigma^2 \mu_6 - 3\mu_4 \sigma^4 + 2\sigma^8 + (\mu_4 - \sigma^4)^2}{\sigma^4(\mu_4 - \sigma^4)} = \frac{\sigma^4 - \mu_4}{\sigma^4}.$$

Et donc

$$\frac{\partial^3 I}{\partial y \partial x^2}(0, \sigma^2) = 0 + \frac{\partial v}{\partial y}(0, \sigma^2) \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (0, 0) = \frac{1}{\mu_4 - \sigma^4} \times \frac{\sigma^4 - \mu_4}{\sigma^4} = -\frac{1}{\sigma^4}.$$

C'est ce que nous voulions démontrer. Calculons maintenant la dérivée partielle quatrième de I en x . Pour cela nous devons au préalable obtenir une expression de la dérivée partielle troisième en x :

$$\frac{\partial^3 I}{\partial x^3} = \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (u, v) + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (u, v).$$

La seule quantité que nous ne connaissons pas est la dérivée partielle en u de $(f_4 - f_2^2)/g$. Nous avons

$$\frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) = \frac{1}{g} \times \frac{\partial}{\partial u} (f_4 - f_2^2) - \frac{f_4 - f_2^2}{g^2} \times \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{f_5 - f_4 f_1 - 2f_2 f_3 + 2f_2^2 f_1}{g} - \frac{f_4 - f_2^2}{g^2} \times \frac{\partial g}{\partial u},$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial u} &= f_2(f_5 - f_4 f_1) + f_4(f_3 - f_2 f_1) - f_1^2(f_5 - f_4 f_1) - 2f_4 f_1(f_2 - f_1^2) - 3f_2^2(f_3 - f_2 f_1) \\ &\quad - 2f_3(f_4 - f_3 f_1) + 2f_1 f_2(f_4 - f_3 f_1) + 2f_2 f_3(f_2 - f_1^2) + 2f_1 f_3(f_3 - f_2 f_1). \end{aligned}$$

Notons que cette quantité est nulle en $(0, 0)$. Par conséquent la dérivée partielle en u de $(f_4 - f_2^2)/g$ aussi et donc nous retrouvons que

$$\frac{\partial^3 I}{\partial x^3}(0, \sigma^2) = 0.$$

En dérivant à nouveau, nous obtenons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 I}{\partial x^4} &= \frac{\partial u}{\partial x} \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (u, v) + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial^2}{\partial v \partial u} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (u, v) \right) \\ &\quad + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \times \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (u, v) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \times \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (u, v) \\ &\quad + \frac{\partial v}{\partial x} \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (u, v) + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (u, v) \right). \end{aligned}$$

Evaluons en $(0, \sigma^2)$:

$$\frac{\partial^4 I}{\partial x^4}(0, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{\sigma^2} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (0, 0) + 0 \right) + 0 + \frac{\sigma^4 - \mu_4}{\sigma^4} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, \sigma^2) + 0,$$

avec

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, \sigma^2) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial y} \right) (0, \sigma^2) = \frac{\partial^3 I}{\partial x^2 \partial y}(0, \sigma^2) = -\frac{1}{\sigma^4}$$

et

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) = \frac{1}{g} \frac{\partial^2}{\partial u^2} (f_4 - f_2^2) - \frac{2}{g^2} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial}{\partial u} (f_4 - f_2^2) - \frac{f_4 - f_2^2}{g^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{2}{g^3} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right)^2 (f_4 - f_2^2).$$

D'où

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (0, 0) = \frac{1}{\sigma^4(\mu_4 - \sigma^4)} \left(\sigma^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2} (f_4 - f_2^2)(0, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0) \right).$$

Pour ces deux termes restant à calculer, il s'agit de dérivées de quantités que nous avons déjà calculées. Nous les évaluons directement en $(0, 0)$, ce qui est assez simple puisque $f_j(0, 0)$ est nulle dès que j est impair :

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} (f_4 - f_2^2)(0, 0) = \frac{\partial}{\partial u} (f_5 - f_4 f_1 - 2f_2 f_3 + 2f_2^2 f_1)(0, 0) = \mu_6 - 3\sigma^2 \mu_4 + 2\sigma^6$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0) &= \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial g}{\partial u} \right) (0, 0) = \sigma^2(\mu_6 - \mu_4 \sigma^2) + \mu_4(\mu_4 - \sigma^4) - 0 - 2\mu_4 \sigma^4 \\ &\quad - 3\sigma^4(\mu_4 - \sigma^4) - 2\mu_4^2 + 2\sigma^4 \mu_4 + 2\sigma^4 \mu_4 + 0. \end{aligned}$$

Cela est égal à $\sigma^2 \mu_6 - \mu_4^2 + 3\sigma^8 - 3\mu_4 \sigma^4$ après simplification. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial u^2} \left(\frac{f_4 - f_2^2}{g} \right) (0, 0) &= \frac{\sigma^2 \mu_6 - 3\sigma^4 \mu_4 + 2\sigma^8 - \sigma^2 \mu_6 + \mu_4^2 - 3\sigma^8 + 3\mu_4 \sigma^4}{\sigma^4(\mu_4 - \sigma^4)} \\ &= \frac{\mu_4^2 - \sigma^8}{\sigma^4(\mu_4 - \sigma^4)} = \frac{\mu_4 + \sigma^4}{\sigma^4}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\frac{\partial^4 I}{\partial x^4}(0, \sigma^2) = \frac{\mu_4 + \sigma^4}{\sigma^8} - \frac{\sigma^4 - \mu_4}{\sigma^8} = \frac{2\mu_4}{\sigma^8}.$$

Nous obtenons bien le terme annoncé. \square

Chapitre V

Théorèmes limites pour le modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC

Sommaire

14	La loi des grands nombres sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	83
a)	Autour du lemme de Varadhan	83
b)	Preuve du théorème I.2	89
15	Convergence de $S_n/n^{3/4}$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ dans le cas des mesures à densité	89
a)	Application du théorème III.17 à la loi ν_ρ	89
b)	Preuve du théorème I.3 dans le cas des lois à densité	91

Dans le chapitre précédent, nous avons montré que, si $\rho \neq \delta_0$ est symétrique et si Λ est finie au voisinage de $(0, 0)$, alors $I - F$ admet un unique minimum sur Δ^* en $(0, \sigma^2)$. Une heuristique usuelle (cf. paragraphe 9.b)) nous suggère donc que, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \sigma^2)$. Seulement Δ^* n'est pas un fermé de \mathbb{R}^2 donc le lemme de Varadhan ne peut s'appliquer directement. Nous contournons ce problème dans le paragraphe 14.a) et nous prouvons cette convergence en probabilité dans le paragraphe 14.b). Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous utilisons le théorème III.17 pour montrer la convergence de $S_n/n^{3/4}$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ dans le cas des mesures à densité.

14 La loi des grands nombres sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$

a) Autour du lemme de Varadhan

Notons $\tilde{\nu}_{n,\rho}$ la loi de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\rho^{\otimes n}$ et $\theta_{n,\rho}$ la loi de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$. Nous avons vu dans la partie 9.b) que, si $(0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$, alors $(\tilde{\nu}_{n,\rho})_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la bonne fonction de taux I . De plus

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \quad \theta_{n,\rho}(A) = \frac{\int_{A \cap \Delta^*} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y)}{\int_{\Delta^*} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y)}.$$

Nous avons le théorème suivant :

Proposition V.1. *Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} , de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que $(0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$. Si A est un fermé ne contenant pas $(0, \sigma^2)$ alors*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap A} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) < 0.$$

Nous consacrons le reste de ce paragraphe à la démonstration de ce théorème. Nous allons naturellement faire appel au lemme B.7 de l'annexe qui nous fournit une extension de la borne supérieure du lemme de Varadhan. Nous aurons aussi besoin du lemme suivant :

Lemme V.2. *Soit E un espace métrique et A un fermé de E . Soient J et f des fonctions définies sur E et à valeurs réelles. Nous supposons que J est une bonne fonction de taux et que f est bornée et semi-continue supérieurement. Alors $f - J$ atteint son maximum sur A .*

De plus, si $f - J$ admet un unique maximum sur E en x_0 et si A ne contient pas x_0 , alors

$$\sup_{x \in A} (f(x) - J(x)) < f(x_0) - J(x_0).$$

Démonstration. La fonction $\psi = f - J$ est majorée donc elle admet une borne supérieure sur tout fermé de A . Il existe une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \psi(x_k) = \sup_A \psi.$$

Pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, nous avons $2\psi(x_k) \geq \sup_A \psi$ donc

$$J(x_k) = -\psi(x_k) + f(x_k) \leq -\frac{1}{2} \sup_A \psi + \|f\|_\infty,$$

c'est-à-dire x_k appartient au compact

$$\{x \in E : J(x) \leq -\frac{1}{2} \sup_A \psi + \|f\|_\infty\}.$$

Quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ converge vers un certain $x^* \in A$. De plus ψ est semi-continue supérieurement, donc

$$\sup_A \psi = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \psi(x_k) \leq \psi(x^*).$$

Ceci nous assure que ψ atteint son maximum sur A .

Supposons que ψ admette un unique minimum sur E en un point x_0 et que A ne contient pas x_0 . Alors l'inégalité précédente montre que

$$\sup_A \psi \leq \psi(x^*) < \sup_E \psi = \psi(x_0).$$

D'où le lemme. □

Pour pouvoir appliquer le lemme B.7 de l'annexe, nous définissons la fonction \tilde{F} sur Δ par

$$\forall (x, y) \in \Delta \quad \tilde{F}(x, y) = \frac{x^2}{2y} \mathbf{1}_{(x,y) \in \Delta^*} + \frac{1}{2} \mathbf{1}_{x=y=0}.$$

Il s'agit d'une fonction semi-continue supérieurement et bornée sur le fermé Δ . Elle est aussi supérieure ou égale à F sur Δ . Ainsi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap A} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) \leq \sup_{\Delta \cap A} (\tilde{F} - I).$$

Comme $\tilde{F} = F$ sur Δ^* , d'après la proposition IV.1, la fonction $I - \tilde{F}$ admet un unique minimum en $(0, \sigma^2)$ sur Δ^* et y vaut 0. Afin que ceci reste vrai sur tout Δ , il convient d'imposer que

$$-\ln \rho(\{0\}) - \frac{1}{2} = I(0, 0) - \frac{1}{2} > 0,$$

c'est-à-dire $\rho(\{0\}) < 1/\sqrt{e}$. Nous pouvons alors conclure avec le lemme V.2 :

Corollaire V.3. Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} symétrique et de variance $\sigma^2 > 0$. Supposons que $\rho(\{0\}) < 1/\sqrt{e}$ et $(0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$. Alors, pour tout fermé A ne contenant pas $(0, \sigma^2)$, nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap A} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) < 0.$$

Nous allons maintenant étendre ce résultat autour de $(0, 0)$ afin de nous affranchir de l'hypothèse sur la masse de ρ en 0. Pour cela nous allons opérer un conditionnement afin de nous ramener aux cas de lois ne chargeant pas 0 et utiliser ainsi le résultat précédent.

Proposition V.4. Si ρ est une mesure de probabilité symétrique, de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que $(0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$, alors il existe $\gamma > 0$ tel que, pour $\delta \in]0, \sigma^2[$ assez petit et pour n assez grand,

$$\int_{\Delta^*} e^{nx^2/(2y)} \mathbb{1}_{0 < y \leq \delta} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) \leq e^{-n\gamma}.$$

Nous insistons bien sur le fait que la constante $\gamma > 0$ ne dépend que de ρ et pas de δ . Cet argument nous sera utile dans la suite.

Démonstration. Si $\rho(\{0\}) = 0$ (ou même $\rho(\{0\}) < e^{-1/2}$) alors le corollaire V.3 nous assure déjà que la constante

$$\gamma = -\frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^*} e^{nx^2/(2y)} \mathbb{1}_{0 < y \leq \sigma^2/2} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y)$$

est strictement positive puisque $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq \sigma^2/2\}$ est un fermé ne contenant pas $(0, \sigma^2)$. Pour $\delta \in]0, \sigma^2/2[$, nous avons alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^*} e^{nx^2/(2y)} \mathbb{1}_{0 < y \leq \delta} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) \leq -2\gamma < -\gamma.$$

Ceci implique la proposition pour les mesures de probabilité ne chargeant pas 0.

Supposons maintenant que $\rho(\{0\}) > 0$. Soient $n \geq 1$ et X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes de même loi ρ . Nous notons

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i \quad \text{et} \quad T_n = \sum_{i=1}^n X_i^2.$$

Pour $\delta \in]0, \sigma^2[$ assez petit, notons

$$E_{n,\delta} = \int_{\Delta^*} e^{nx^2/(2y)} \mathbb{1}_{0 < y \leq \delta} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y).$$

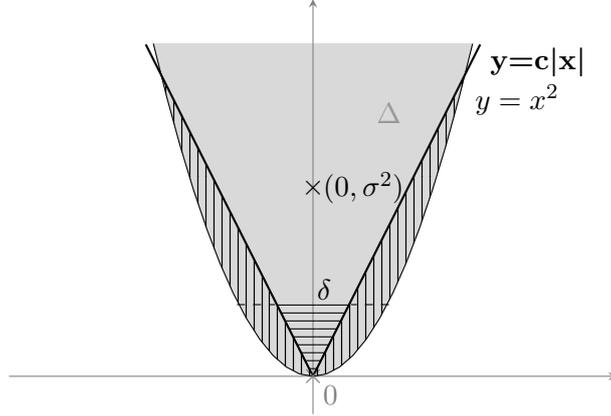
Comme $\tilde{\nu}_{n,\rho}(\Delta) = 1$, nous avons

$$E_{n,\delta} = \mathbb{E} \left(e^{S_n^2/(2T_n)} \mathbb{1}_{0 < T_n \leq n\delta} \right).$$

Pour tout $c > 0$, nous avons

$$E_{n,\delta} \leq \mathbb{E} \left(e^{S_n^2/(2T_n)} \mathbb{1}_{T_n > 0} \mathbb{1}_{T_n/n \leq c|S_n/n|} \right) + \mathbb{E} \left(e^{S_n^2/(2T_n)} \mathbb{1}_{c|S_n/n| < T_n/n \leq \delta} \right).$$

que nous écrivons $I_{n,1} + I_{n,2}$.



Sur la figure, l'espérance $I_{n,1}$ est une intégrale sur l'aire hachurée verticalement, et l'espérance $I_{n,2}$ est une intégrale sur l'aire hachurée horizontalement.

Remarquons que si $c|S_n/n| < T_n/n \leq \delta$ alors

$$\frac{S_n^2}{2T_n} \leq \frac{T_n^2}{2c^2 T_n} \leq \frac{T_n}{2c^2} \leq \frac{n\delta}{2c^2}.$$

Nous avons donc

$$I_{n,2} \leq \exp\left(\frac{n\delta}{2c^2}\right) \mathbb{P}\left(c\left|\frac{S_n}{n}\right| < \frac{T_n}{n} \leq \delta\right).$$

Notons $\alpha = -\ln \rho(\{0\})/2 > 0$. La fonction I est semi-continue inférieurement donc il existe un voisinage $\bar{\mathcal{U}}$ de $(0, 0)$ tel que

$$\forall (x, y) \in \bar{\mathcal{U}} \quad I(x, y) \geq I(0, 0) - \frac{\alpha}{2} = -\left(\ln \rho(\{0\}) + \frac{\alpha}{2}\right).$$

Quitte à diminuer δ , nous supposons que

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : c|x| < y \leq \delta\} \subset \bar{\mathcal{U}}.$$

Prenons ensuite $c = \sigma/\sqrt{\alpha}$ (qui ne dépend donc que de ρ). Le théorème de Cramér (cf. théorème B.10 de l'annexe) entraîne que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln I_{n,2} \leq \frac{\delta}{2c^2} - \inf_{\bar{\mathcal{U}}} I \leq \frac{\delta}{2c^2} + \ln \rho(\{0\}) + \frac{\alpha}{2} = \ln \rho(\{0\}) + \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\delta}{\sigma^2}\right).$$

Comme $\delta < \sigma^2$, cette dernière quantité est inférieure à

$$\ln \rho(\{0\}) + \alpha = -2\alpha + \alpha = -\alpha.$$

Ainsi, pour n assez grand,

$$I_{n,2} \leq \exp\left(-\frac{n\alpha}{2}\right).$$

Occupons-nous maintenant de $I_{n,1}$. Nous définissons la variable aléatoire N_n par

$$N_n = \text{card} \{k \in \{0, \dots, n\} : X_k = 0\}.$$

Nous avons

$$I_{n,1} = \mathbb{E} \left(e^{S_n^2/(2T_n)} \mathbf{1}_{T_n > 0} \mathbf{1}_{T_n \leq c|S_n|} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} \left(e^{S_n^2/(2T_n)} \mathbf{1}_{T_n \leq c|S_n|} \mathbf{1}_{N_n=k} \right)$$

et, pour tout $k \in \{0, \dots, n-1\}$,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{S_n^2/(2T_n)} \mathbf{1}_{T_n \leq c|S_n|} \mathbf{1}_{N_n=k} \right) \\ &= \mathbb{E} \left(e^{S_n^2/(2T_n)} \mathbf{1}_{T_n \leq c|S_n|} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbf{1}_{X_{i_1}=0} \dots \mathbf{1}_{X_{i_k}=0} \mathbf{1}_{\forall j \notin \{i_1, \dots, i_k\} X_j \neq 0} \right) \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} \mathbb{E} \left(e^{S_n^2/(2T_n)} \mathbf{1}_{T_n \leq c|S_n|} \mathbf{1}_{X_{i_1}=0} \dots \mathbf{1}_{X_{i_k}=0} \mathbf{1}_{\forall j \notin \{i_1, \dots, i_k\} X_j \neq 0} \right). \end{aligned}$$

Les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes et de même loi donc leur place dans les sommes S_n et T_n n'a pas d'importance. Ainsi les espérances dans la somme ci-dessus sont égales :

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{S_n^2/(2T_n)} \mathbf{1}_{T_n \leq c|S_n|} \mathbf{1}_{N_n=k} \right) \\ &= \binom{n}{k} \mathbb{E} \left(e^{S_n^2/(2T_n)} \mathbf{1}_{T_n \leq c|S_n|} \mathbf{1}_{X_1 \neq 0} \dots \mathbf{1}_{X_{n-k} \neq 0} \mathbf{1}_{X_{n-k+1}=0} \dots \mathbf{1}_{X_n=0} \right) \\ &= \binom{n}{k} \mathbb{E} \left(e^{S_{n-k}^2/(2T_{n-k})} \mathbf{1}_{T_{n-k} \leq c|S_{n-k}|} \mathbf{1}_{X_1 \neq 0} \dots \mathbf{1}_{X_{n-k} \neq 0} \mathbf{1}_{X_{n-k+1}=0} \dots \mathbf{1}_{X_n=0} \right). \end{aligned}$$

Par indépendance de X_1, \dots, X_n , nous avons

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left(e^{S_n^2/(2T_n)} \mathbf{1}_{T_n \leq c|S_n|} \mathbf{1}_{N_n=k} \right) \\ &= \binom{n}{k} \prod_{j=n-k+1}^n \mathbb{P}(X_j = 0) \mathbb{E} \left(e^{S_{n-k}^2/(2T_{n-k})} \mathbf{1}_{T_{n-k} \leq c|S_{n-k}|} \mathbf{1}_{X_1 \neq 0} \dots \mathbf{1}_{X_{n-k} \neq 0} \right) \\ &= \binom{n}{k} \rho(\{0\})^k (1 - \rho(\{0\}))^{n-k} \mathbb{E} \left(e^{S_{n-k}^2/(2T_{n-k})} \mathbf{1}_{T_{n-k} \leq c|S_{n-k}|} \prod_{j=1}^{n-k} \frac{\mathbf{1}_{X_j \neq 0}}{\mathbb{P}(X_j \neq 0)} \right). \end{aligned}$$

Pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, notons

$$\bar{u}_k = \mathbb{E} \left(e^{S_k^2/(2T_k)} \mathbf{1}_{T_k \leq c|S_k|} \prod_{j=1}^k \frac{\mathbf{1}_{X_j \neq 0}}{\mathbb{P}(X_j \neq 0)} \right).$$

Nous avons alors

$$I_{n,1} = \sum_{k=0}^{n-1} \bar{u}_{n-k} \binom{n}{k} \rho(\{0\})^k (1 - \rho(\{0\}))^{n-k} = \sum_{k=1}^n \bar{u}_k \binom{n}{k} \rho(\{0\})^{n-k} (1 - \rho(\{0\}))^k.$$

Notons $\bar{\rho}$ la mesure de probabilité conditionnée à $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, c'est-à-dire,

$$\bar{\rho} = \rho(\cdot | \mathbb{R} \setminus \{0\}) = \frac{\rho(\cdot \cap \mathbb{R} \setminus \{0\})}{1 - \rho(\{0\})}.$$

Ainsi

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad \bar{u}_k = \int_{\Delta^*} e^{kx^2/(2y)} \mathbf{1}_{y \leq c|x|} d\bar{\nu}_{k,\bar{\rho}}(x, y).$$

La mesure $\bar{\rho}$ est symétrique, ne charge pas 0 et

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \bar{\Lambda}(u, v) = \ln \int_{\mathbb{R}} e^{uz+uz^2} d\bar{\rho}(z) \leq \Lambda(u, v) - \ln(1 - \rho(\{0\}))$$

donc $(0, 0) \in \bar{D}_\Delta$. De plus la variance de $\bar{\rho}$ est égale à $\bar{\sigma}^2 = \sigma^2(1 - \rho(\{0\}))^{-1}$ et $(0, \bar{\sigma}^2)$ n'appartient pas au fermé $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \leq c|x|\}$ donc le corollaire V.3 entraîne que

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} \frac{1}{k} \ln \int_{\Delta^*} e^{kx^2/(2y)} \mathbb{1}_{y \leq c|x|} d\tilde{\nu}_{k, \bar{\rho}}(x, y) < 0.$$

Ainsi il existe $\varepsilon_0 > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que

$$\forall k \geq n_0 \quad \bar{u}_k \leq \exp(-k\varepsilon_0).$$

Prenons $n > n_0$ et découpons la somme : $I_{n,1} = A_n + B_n$ avec

$$A_n = \sum_{k=1}^{n_0} \bar{u}_k \binom{n}{k} \rho(\{0\})^{n-k} (1 - \rho(\{0\}))^k \quad \text{et} \quad B_n = \sum_{k=n_0+1}^n \bar{u}_k \binom{n}{k} \rho(\{0\})^{n-k} (1 - \rho(\{0\}))^k.$$

Pour tout $k \geq 1$, nous avons $\tilde{\nu}_{k, \bar{\rho}}(\Delta) = 1$ donc $\bar{u}_k \leq \exp(k/2)$ et

$$A_n \leq \rho(\{0\})^n \sum_{k=1}^{n_0} e^{k/2} n^k (\rho(\{0\})^{-1} - 1)^k \leq \rho(\{0\})^n n_0 e^{n_0/2} n^{n_0} \max(1, (\rho(\{0\})^{-1} - 1)^{n_0}).$$

De plus

$$B_n \leq \sum_{k=n_0+1}^n e^{-k\varepsilon_0} \binom{n}{k} \rho(\{0\})^{n-k} (1 - \rho(\{0\}))^k \leq (\rho(\{0\}) + e^{-\varepsilon_0}(1 - \rho(\{0\})))^n.$$

Ainsi, en notant

$$\beta = -\ln(\rho(\{0\}) + e^{-\varepsilon_0}(1 - \rho(\{0\}))) > 0,$$

nous avons que, pour n assez grand,

$$I_{n,1} = A_n + B_n \leq \exp(-n\alpha) + \exp(-n\beta).$$

Remarquons que ε_0 ne dépend que de ρ , c'est donc aussi le cas de β . Notons enfin $\gamma = \min(\alpha/4, \beta/2)$ (qui ne dépend donc que de ρ). Pour $\delta \in]0, \sigma^2[$ assez petit et pour n assez grand, nous avons

$$E_{n,\delta} \leq I_{n,1} + I_{n,2} \leq \exp(-n\gamma).$$

Ceci démontre la proposition. \square

Démonstration du théorème V.1. La proposition V.4 assure l'existence de $\gamma > 0$ et $\delta > 0$ tels que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^*} e^{nx^2/(2y)} \mathbb{1}_{0 < y \leq \delta} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) \leq -\gamma.$$

Notons $A_\delta = \{(x, y) \in \Delta \cap A : y \geq \delta\}$. Décomposons alors

$$\Delta^* \cap A \subset \{(x, y) \in \Delta^* : 0 < y \leq \delta\} \cup A_\delta.$$

L'ensemble A_δ est un fermé ne contenant pas $(0, \sigma^2)$ sur lequel F est continue bornée. Ainsi les lemmes B.7 et V.2 entraînent que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{A_\delta} e^{nx^2/(2y)} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) < 0.$$

Le lemme B.6 de l'annexe implique alors que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap A} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) \\ \leq \max\left(-\gamma, \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{A_\delta} e^{nx^2/(2y)} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y)\right) < 0. \end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du théorème. \square

b) Preuve du théorème I.2

Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} , de variance $\sigma^2 > 0$ et telle

$$\int_{\mathbb{R}} e^{v_0 z^2} d\rho(z) < +\infty$$

pour un certain $v_0 > 0$. Nous avons

$$\forall v < v_0 \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad e^{-v_0 z^2} e^{uz+uz^2} = e^{uz-(v_0-v)z^2} \xrightarrow{|z| \rightarrow +\infty} 0$$

et donc $\mathbb{R} \times]-\infty, v_0[\subset D_\Lambda$ si bien que $(0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$.

Notons $\theta_{n,\rho}$ la loi de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$. D'après la proposition III.2, nous avons

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \quad \theta_{n,\rho}(A) = \frac{\int_{A \cap \Delta^*} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y)}{\int_{\Delta^*} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y)}.$$

Le principe de grandes déviations satisfait par $(\tilde{\nu}_{n,\rho})_{n \geq 1}$ nous assure que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^*} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{\nu}_{n,\rho}(\overset{\circ}{\Delta}^*) \\ &\geq -\inf \left\{ I(x, y) : (x, y) \in \overset{\circ}{\Delta} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Ensuite, donnons-nous \mathcal{U} un voisinage ouvert de $(0, \sigma^2)$ dans \mathbb{R}^2 . La proposition V.1 entraîne que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \theta_{n,\rho}(\mathcal{U}^c) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap \mathcal{U}^c} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) \\ &\quad - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^*} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) < 0. \end{aligned}$$

Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que, pour tout $n > n_0$,

$$\theta_{n,\rho}(\mathcal{U}^c) \leq e^{-n\varepsilon} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nous avons montré que, pour tout voisinage \mathcal{U} de $(0, \sigma^2)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{n,\rho} \left(\left(\frac{S_n}{n}, \frac{T_n}{n} \right) \in \mathcal{U}^c \right) = 0.$$

C'est-à-dire, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \sigma^2)$.

15 Convergence de $S_n/n^{3/4}$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ dans le cas des mesures à densité**a) Application du théorème III.17 à la loi ν_ρ**

Supposons que ρ admette une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Nous allons chercher des conditions sur f pour pouvoir appliquer le théorème III.17 à la loi ν_ρ . Rappelons que ce théorème assure que, pour n assez grand, $\tilde{\nu}_{n,\rho}$ admet une densité g_n par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 telle que, pour tout compact K_I de A_I , le domaine admissible de I , quand n tend vers $+\infty$, uniformément en $(x, y) \in K_I$,

$$g_n(x, y) \sim \frac{n}{2\pi} \left(\det D_{(x,y)}^2 I \right)^{1/2} e^{-nI(x,y)}.$$

Ceci nous permettra de démontrer le théorème limite grâce à la méthode de Laplace (comme dans le cas des lois gaussiennes).

Lemme V.5. Si ρ admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} alors ν_ρ^{*2} admet pour densité

$$f_2 : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{1}{\sqrt{2y - x^2}} f\left(\frac{x + \sqrt{2y - x^2}}{2}\right) f\left(\frac{x - \sqrt{2y - x^2}}{2}\right) \mathbb{1}_{x^2 < 2y}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Soit h une fonction continue bornée de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} h(x, y) d\nu_\rho^{*2}(x, y) &= \int_{\mathbb{R}^2} h((z, z^2) + (t, t^2)) d\rho(z) d\rho(t) = \int_{\mathbb{R}^2} h((z, z^2) + (t, t^2)) f(z) f(t) dz dt \\ &= \int_{D^+} h(z + t, z^2 + t^2) f(z) f(t) dz dt + \int_{D^-} h(z + t, z^2 + t^2) f(z) f(t) dz dt \\ &= I_+ + I_-, \end{aligned}$$

avec $D^+ = \{(z, t) \in \mathbb{R}^2 : z > t\}$ et $D^- = \{(z, t) \in \mathbb{R}^2 : z < t\}$. En effet l'ensemble $\{(z, t) \in \mathbb{R}^2 : z = t\}$ est de mesure de Lebesgue nulle.

Posons $\varphi : (z, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto (u, v) = (z + t, z^2 + t^2)$. Si $(z, t) \in D^+$ alors

$$\frac{u^2}{4} = \left(\frac{z + t}{2}\right)^2 < \frac{z^2 + t^2}{2} = \frac{v}{2}$$

donc

$$\varphi(D^+) \subset \Delta_2 = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : u^2 < 2v\}.$$

De même $\varphi(D^-) \subset \Delta_2$. Réciproquement, si $(u, v) \in \Delta_2$ et $u = z + t$, $v = z^2 + t^2$ alors $t = u - z$ et $2z^2 - 2uz + (u^2 - v) = 0$. Cette dernière équation du second degré en z est de discriminant $4(2v - u^2) > 0$ donc possède deux racines réelles. Ainsi

$$(z, t) = \frac{1}{2}(u + \sqrt{2v - u^2}, u - \sqrt{2v - u^2}) \in D^+$$

ou bien

$$(z, t) = \frac{1}{2}(u - \sqrt{2v - u^2}, u + \sqrt{2v - u^2}) \in D^-.$$

Ceci montre que φ est une bijection de D^+ (resp. de D^-) sur Δ_2 . Et φ est de classe C^1 sur $D^+ \cup D^-$ dont le jacobien en (z, t) est

$$\left| \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2z & 2t \end{pmatrix} \right| = 2|z - t| = 2\sqrt{2v - u^2} \neq 0.$$

Le changement de variable donné par ψ entraîne donc que

$$I_+ = I_- = \int_{\Delta_2} h(u, v) \frac{1}{2\sqrt{2v - u^2}} f\left(\frac{u + \sqrt{2v - u^2}}{2}\right) f\left(\frac{u - \sqrt{2v - u^2}}{2}\right) du dv$$

d'où le lemme en additionnant ces deux termes. \square

Remarquons que si $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$ alors, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned} f_2(x, y) &= \frac{1}{2\pi\sqrt{2y - x^2}} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \mathbb{1}_{x^2 < 2y} \\ &= \left(\sqrt{2^2\pi^2} \Gamma\left(\frac{2-1}{2}\right)\right)^{-1} \exp\left(-\frac{y}{2}\right) \left(y - \frac{x^2}{2}\right)^{(2-3)/2} \mathbb{1}_{x^2 < 2y}. \end{aligned}$$

Ceci est précisément la formule de la proposition II.7 pour $n = 2$.

D'après le théorème III.17, pour que l'équivalent

$$g_n(x, y) \sim \frac{n}{2\pi} \left(\det D_{(x,y)}^2 I \right)^{1/2} e^{-nI(x,y)}$$

soit vrai, il suffit qu'il existe $q \in [1, +\infty[$ tel que $\widehat{f}_2 \in L^q$. Mais le calcul de \widehat{f}_2 n'est pas envisageable en général. Cependant la proposition III.23 assure qu'il suffit qu'il existe $p \in]1, 2]$ tel que $f_2 \in L^p$ pour que l'équivalent soit vrai. Examinons cela :

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f_2(u, v)|^p du dv = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f^p\left(\frac{u + \sqrt{2v - u^2}}{2}\right) f^p\left(\frac{u - \sqrt{2v - u^2}}{2}\right)}{(2v - u^2)^{p/2}} \mathbf{1}_{u^2 < 2v} du dv.$$

Effectuons le changement de variable

$$\psi : (u, v) \mapsto (x, y) = \frac{1}{2}(u + \sqrt{2v - u^2}, u + \sqrt{2v - u^2})$$

qui est un C^1 -difféomorphisme de Δ_2 sur D^+ (cf. la démonstration du lemme précédent) dont le jacobien en (u, v) est $2\sqrt{2v - u^2} = 2(y - x) > 0$:

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f_2(u, v)|^p du dv = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f^p(x)f^p(y)}{(y - x)^p} 2(y - x)\mathbf{1}_{y > x} dx dy.$$

Par symétrie en x et y nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^2} |f_2(u, v)|^p du dv = \int_{\mathbb{R}^2} f^p(x)f^p(y)|y - x|^{1-p} dx dy.$$

La proposition suivante découle du théorème III.17, de la proposition III.23 et de l'étude qui précède :

Proposition V.6. *Supposons que ρ admette une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} telle que*

$$(x, y) \mapsto f^p(x + y)f^p(y)|x|^{1-p}$$

est intégrable pour un certain $p \in]1, 2]$. Alors, pour n assez grand, $\tilde{\nu}_{n,\rho}$ admet une densité g_n par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 telle que, pour tout compact $K_I \subset A_I$, quand n tend vers $+\infty$, uniformément en $(x, y) \in K_I$.

$$g_n(x, y) \sim \frac{n}{2\pi} \left(\det D_{(x,y)}^2 I \right)^{1/2} e^{-nI(x,y)}.$$

b) Preuve du théorème I.3 dans le cas des lois à densité

Dans ce paragraphe, nous montrons le théorème I.3 dans le cas où ρ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} qui est paire et vérifie certaines conditions d'intégrabilité :

Théorème V.7. *Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} admettant une densité f telle que :*

(a) *f est paire.*

(b) *Il existe $v_0 > 0$ tel que*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{v_0 z^2} f(z) dz < +\infty.$$

(c) Il existe $p \in]1, 2]$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^2} f^p(x+y) f^p(y) |x|^{1-p} dx dy < +\infty.$$

Alors, en notant σ^2 le moment d'ordre 2 et μ_4 le moment d'ordre 4 de ρ ,

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4\mu_4}{3\sigma^8} \right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{\mu_4}{12\sigma^8} s^4\right) ds$$

ou encore

$$\frac{\mu_4^{1/4} S_n}{\sigma^2 n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{s^4}{12}\right) ds.$$

Démonstration. La mesure de probabilité ρ est symétrique (car f est paire) et son support possède au moins trois points (car ρ est à densité). De plus, comme nous l'avons vu dans le paragraphe 14.b), le point (b) entraîne que $(0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$. Ainsi la proposition IV.15 implique que I est de classe C^∞ au voisinage de $(0, \sigma^2)$ et, quand (x, y) tend vers $(0, \sigma^2)$,

$$I(x, y) - \frac{x^2}{2y} \sim \frac{(y - \sigma^2)^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)} + \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8},$$

où μ_4 est le moment d'ordre 4 de ρ . Nous déduisons de cet équivalent qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in B_\delta$, la boule ouverte de rayon δ centrée en $(0, \sigma^2)$,

$$G(x, y) = I(x, y) - \frac{x^2}{2y} \geq \frac{(y - \sigma^2)^2}{4(\mu_4 - \sigma^4)} + \frac{\mu_4 x^4}{24\sigma^8}. \quad (*)$$

Quitte à réduire δ , nous supposons que $B_\delta \subset K_I$ où K_I est un compact de A_I . Or $A_I \subset \overset{\circ}{D}_I \subset \Delta^*$ donc $B_\delta \cap \Delta^* = B_\delta$.

Soient $n \in \mathbb{N}$ et f une fonction continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Nous avons

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mu}_{n,\rho}} \left(f \left(\frac{S_n}{n^{3/4}} \right) \right) = \frac{1}{Z_n} \int_{\Delta^*} f(xn^{1/4}) \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) = \frac{A_n + B_n}{Z_n},$$

avec

$$A_n = \int_{B_\delta} f(xn^{1/4}) \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y),$$

$$B_n = \int_{\Delta^* \cap B_\delta^c} f(xn^{1/4}) \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y).$$

Le point (c) et la proposition V.6 entraînent que, pour n assez grand, $\tilde{\nu}_{n,\rho}$ admet une densité g_n par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 vérifiant, quand $n \rightarrow +\infty$, uniformément en $(x, y) \in K_I$,

$$g_n(x, y) \sim \frac{n}{2\pi} \left(\det D_{(x,y)}^2 I \right)^{1/2} e^{-nI(x,y)}.$$

Faisons apparaître $e^{-nI(x,y)}$ dans l'expression de A_n :

$$A_n = \int_{B_\delta} f(xn^{1/4}) e^{-n(I(x,y) - x^2/2y)} e^{nI(x,y)} g_n(x, y) dx dy$$

$$= n \int_{B_\delta} f(xn^{1/4}) e^{-nG(x,y)} H_n(x, y) dx dy,$$

où nous avons posé $H_n(x, y) = e^{nI(x,y)} g_n(x, y)/n$ pour tout $(x, y) \in B_\delta$. Notons

$$B_{\delta,n} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2/\sqrt{n} + y^2/n \leq \delta^2 \}.$$

Effectuons le changement de variable $(x, y) \mapsto (xn^{-1/4}, yn^{-1/2} + \sigma^2)$, de jacobien $n^{-3/4}$:

$$A_n = n^{1/4} \int_{B_{\delta,n}} f(x) \exp\left(-nG\left(\frac{x}{n^{1/4}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2\right)\right) H_n\left(\frac{x}{n^{1/4}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2\right) dx dy.$$

Nous allons vérifier que nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée à l'intégrale ci-dessus. L'équivalent uniforme de g_n signifie que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$(x, y) \in K_I \quad \text{et} \quad n \geq n_0 \quad \implies \quad \left| H_n(x, y) 2\pi \left(\det D_{(x,y)}^2 I\right)^{-1/2} - 1 \right| \leq \alpha.$$

Or si $(x, y) \in B_{\delta,n}$ alors $(x_n, y_n) = (xn^{-1/4}, yn^{-1/2} + \sigma^2) \in B_\delta \subset K_I$ donc, pour tous $n \geq n_0$ et $(x, y) \in B_{\delta,n}$,

$$\left| H_n\left(\frac{x}{n^{1/4}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2\right) 2\pi \left(\det D_{(x_n, y_n)}^2 I\right)^{-1/2} - 1 \right| \leq \alpha.$$

De plus (x_n, y_n) tend vers $(0, \sigma^2)$ quand n tend vers $+\infty$ donc, par continuité,

$$\left(D_{(x_n, y_n)}^2 I\right)^{-1/2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left(D_{(0, \sigma^2)}^2 I\right)^{-1/2} = \left(D_{(0,0)}^2 \Lambda\right)^{1/2},$$

dont le déterminant est égal à $\sqrt{\sigma^2(\mu_4 - \sigma^4)}$. Par conséquent

$$\mathbb{1}_{B_{\delta,n}}(x, y) H_n\left(\frac{x}{n^{1/4}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} (4\pi^2 \sigma^2 (\mu_4 - \sigma^4))^{-1/2}.$$

Le développement de G au voisinage de $(0, \sigma^2)$ entraîne que

$$\exp\left(-nG\left(\frac{x}{n^{1/4}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)} - \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8}\right).$$

Il reste maintenant à s'assurer que le terme dans l'intégrale est bien dominé par une fonction intégrable indépendante de n . La fonction

$$(x, y) \mapsto \left(D_{(x,y)}^2 I\right)^{-1/2}$$

est continue et bornée sur B_δ par un certain réel $M_\delta > 0$. L'équivalent uniforme de g_n entraîne donc qu'il existe une constante $C_d > 0$ telle que $H_n(x, y) \leq C_\delta$ pour tout $(x, y) \in B_\delta$. Enfin l'inégalité (*) ci-dessus assure que

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{B_{\delta,n}}(x, y) f(x) \exp\left(-nG\left(\frac{x}{n^{1/4}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2\right)\right) H_n\left(\frac{x}{n^{1/4}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2\right) \\ \leq \|f\|_\infty C_\delta \exp\left(-\frac{y^2}{4(\mu_4 - \sigma^4)} - \frac{\mu_4 x^4}{24\sigma^8}\right) \end{aligned}$$

et le terme de droite définit bien une fonction intégrable sur \mathbb{R}^2 . Par conséquent le théorème de convergence dominée entraîne que

$$A_n \underset{+\infty}{\sim} n^{1/4} \int_{\mathbb{R}^2} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2} \sqrt{2\pi(\mu_4 - \sigma^4)}} \exp\left(-\frac{y^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)} - \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8}\right) dx dy.$$

D'après le théorème de Fubini nous obtenons

$$A_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1/4}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\left(-\frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8}\right) dx.$$

Occupons nous maintenant de B_n . La loi ρ est symétrique, à densité et $(0,0)$ appartient à l'intérieur de D_Λ donc le corollaire V.3 implique que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap B_\delta^c} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x,y) < 0.$$

Par conséquent il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que

$$\forall n \geq n_0 \quad \int_{\Delta^* \cap B_\delta^c} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x,y) \leq e^{-n\varepsilon}$$

et donc $B_n \leq \|f\|_\infty e^{-n\varepsilon}$ si bien que $B_n = o(n^{1/4})$. Ainsi

$$A_n + B_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{1/4}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\left(-\frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8}\right) dx.$$

En appliquant ce dernier résultat à $f = 1$, nous obtenons

$$Z_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n^{1/4}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8}\right) dx = \frac{n^{1/4}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \frac{1}{2} \left(\frac{12\sigma^8}{\mu_4}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right),$$

où nous avons effectué le changement de variable $y = \mu_4 x^4 / (12\sigma^8)$. Finalement

$$\mathbb{E}_{\tilde{\mu}_{n,\rho}} \left(f\left(\frac{S_n}{n^{3/4}}\right) \right) \underset{+\infty}{\sim} \left(\frac{4\mu_4}{3\sigma^4}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(x) \exp\left(-\frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8}\right) dx.$$

L'ultime changement de variable $s = \mu_4^{1/4} x / \sigma^2$ donne

$$\mathbb{E}_{\mu_{n,\rho}} \left(f\left(\frac{\mu_4^{1/4} S_n}{\sigma^2 n^{3/4}}\right) \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4\mu_4}{3\sigma^4}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \int_{\mathbb{R}} f(s) \exp\left(-\frac{s^4}{12}\right) ds$$

d'où le théorème. □

La condition (c) du théorème V.7 n'est pas pratique à vérifier en général. Le corollaire suivant la « remplace » par l'hypothèse que la densité de ρ est bornée.

Corollaire V.8. *Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} admettant une densité f paire, bornée et telle que*

$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{v_0 z^2} d\rho(z) < +\infty.$$

Alors, en notant σ^2 le moment d'ordre 2 et μ_4 le moment d'ordre 4 de ρ ,

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4\mu_4}{3\sigma^4}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{\mu_4}{12\sigma^8} s^4\right) ds$$

ou encore

$$\frac{\mu_4^{1/4} S_n}{\sigma^2 n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{s^4}{12}\right) ds.$$

Démonstration. Il s'agit de s'assurer que, si f est bornée, alors l'hypothèse (c) du théorème V.7 est vérifiée. Nous avons

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^2} f^{3/2}(x+y)f^{3/2}(y)|x|^{-1/2} dx dy \\ &= \int_{[-1,1] \times \mathbb{R}} \frac{f^{3/2}(x+y)f^{3/2}(y)}{|x|^{1/2}} dx dy + \int_{[-1,1]^c \times \mathbb{R}} \frac{f^{3/2}(x+y)f^{3/2}(y)}{|x|^{1/2}} dx dy \\ &\leq \|f\|_\infty^{3/2} \int_{[-1,1] \times \mathbb{R}} \frac{f^{3/2}(y)}{|x|^{1/2}} dx dy + \int_{[-1,1]^c \times \mathbb{R}} f^{3/2}(x+y)f^{3/2}(y) dx dy \\ &\leq \|f\|_\infty^{3/2} \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{3/2} dx \right) \left(\int_{-1}^1 \frac{dx}{|x|^{1/2}} \right) + \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{3/2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

La seconde inégalité est obtenue en appliquant le théorème de Fubini. Ces termes sont finis puisque

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^{3/2} dx \leq \|f\|_\infty^{1/2} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \|f\|_\infty^{1/2} < +\infty.$$

Ainsi, avec $p = 3/2 \in]1, 2]$, la fonction $(x, y) \mapsto f^p(x+y)f^p(y)|x|^{1-p}$ est intégrable. \square

Chapitre VI

Approximation de Laplace et condition de Cramér

Sommaire

16	La condition de Cramér	98
17	Un théorème central limite général	104
a)	Enoncé	104
b)	Démonstration	106
c)	Autour des hypothèses VI.5	111
i)	Autour de la condition de Cramér (C)	111
ii)	Autour de la condition de Varadhan (V)	111
18	Application au modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC	112
a)	Preuve du théorème I.3 dans le cas où ρ satisfait la condition de Cramér	112
b)	Preuve du théorème I.6	114
c)	Condition suffisante pour que ρ vérifie la condition de Cramér	116

Dans ce chapitre nous étudions la méthode de Laplace en dimension d , $d \geq 1$, dans le but de montrer les théorèmes de fluctuations associés à notre modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC et à ses extensions, quand la condition de Cramér est satisfaite. Nous nous plaçons dans le cadre général suivant :

Donnons-nous ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathbb{R}^d à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Nous nous intéressons ici au comportement asymptotique de l'intégrale

$$Z_n = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \exp\left(n\psi_n\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)\right) \prod_{i=1}^n d\nu(x_i) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(n\psi_n\left(\frac{x}{n}\right)\right) d\nu^{*n}(x)$$

lorsqu'elle est bien définie. Nous regarderons aussi la convergence de S_n/n quand

$$S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n,$$

où X_n^1, \dots, X_n^n sont des vecteurs aléatoires de \mathbb{R}^d dont la loi jointe est donnée par la mesure de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_n} \exp\left(n\psi_n\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)\right)$$

par rapport à $\nu^{\otimes n}$. Dans ce chapitre, nous noterons ν_n la loi de S_n/n quand S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi ν . Nous notons L la Log-Laplace de ν et

J sa transformée de Cramér. Notons respectivement D_L et D_J les domaines de \mathbb{R}^d sur lesquels les fonctions L et J sont finies.

Soit $d \geq 1$. Pour tous $z = (a_1 + ib_1, \dots, a_d + ib_d) \in \mathbb{C}^d$ et $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, nous notons

$$\langle z, x \rangle = \sum_{k=1}^d a_k x_k + i \sum_{k=1}^d b_k x_k.$$

Notons que, si $z \in \mathbb{R}^d$, alors $\langle z, x \rangle$ est le produit scalaire euclidien de z et x . Nous introduisons

$$D_M = \{ z = a + ib \in \mathbb{C}^d : a \in D_L \}$$

et nous définissons la fonction M par

$$\forall z \in D_M \quad M(z) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle z, x \rangle} d\nu(x).$$

Remarquons que

$$\forall s \in \mathbb{R}^d \quad L(s) = \ln M(s) \quad \text{et} \quad \widehat{\nu}(s) = M(is).$$

Nous avons vu dans le chapitre III que, si ν admet une densité vérifiant certaines conditions, alors il existe une relation entre f_n , la densité de ν^{*n} , et J . De plus, sous la condition

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|s\| \geq \alpha} |M(is)| < 1, \tag{C}$$

nous obtenons une relations asymptotique (cf. la preuve du théorème III.17) qui nous a permis d'effectuer une méthode de Laplace sur l'intégrale définissant Z_n . La condition (C) est appelée la condition de Cramér pour ν . Dans [44], Anders Martin-Löf utilise une approximation de l'unité pour obtenir une relation asymptotique similaire pour des lois plus générales sur \mathbb{R} qui satisfont la condition (C), sans avoir nécessairement l'existence d'une densité. Dans les deux premiers paragraphes de ce chapitre, nous démontrons des analogues d -dimensionnels des résultats de [44] pour obtenir un théorème de fluctuations associé à ce modèle général.

Enfin, dans le paragraphe 18, nous utilisons ce théorème de fluctuations pour prouver le théorème I.3 dans le cas où ν_ρ satisfait la condition de Cramér, et pour prouver les théorèmes I.5 et I.6.

16 La condition de Cramér

Définition VI.1. Une mesure de probabilité ν sur \mathbb{R}^d satisfait la condition de Cramér si

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|s\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle s, x \rangle} d\nu(s) \right| < 1. \tag{C}$$

Nous verrons dans le paragraphe 17.c) que, si ν admet une composante absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, alors elle satisfait la condition de Cramér. Ici nous allons établir une relation asymptotique entre ν^{*n} et la transformée de Cramér J . Pour cela nous allons faire apparaître une approximation de l'unité et utiliser la condition de Cramér (C). Nous définissons la fonction k par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad k(x) = \prod_{j=1}^d \max(1 - |x_j|, 0)$$

et, pour tout $c > 0$, la fonction k_c par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad k_c(x) = \frac{1}{c^d} k\left(\frac{x}{c}\right).$$

Il s'agit d'une approximation de l'unité sur \mathbb{R}^d puisque k est intégrable et d'intégrale 1. Enfin, pour tous $n \geq 1$ et $c > 0$, nous introduisons

$$\varphi_{n,c} : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto \int_{\mathbb{R}^d} k_c(s - nx) d\nu^{*n}(s).$$

Notons que $\varphi_{n,c}(x) = (k_c * \nu^{*n})(nx)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$. Les résultats classiques sur les approximations de l'unité nous assurent que, si ν^{*n} admet une densité f_n , alors

$$\lim_{c \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} |\varphi_{n,c}(x) - f_n(nx)| dx = 0.$$

Ce résultat suggère que le comportement asymptotique de $\varphi_{n,c}$ se rapproche de celui de ν^{*n} , même dans le cas général où ν^{*n} n'admet pas de densité.

Théorème VI.2. *Soit ν une mesure de probabilité non-dégénérée sur \mathbb{R}^d telle que D_L est d'intérieur non vide. Soit K_J un compact inclus dans A_J , le domaine admissible de J . Si ν vérifie la condition de Cramér (C), alors il existe $\gamma > 0$ tel que, quand n tend vers $+\infty$ et c tend vers 0, uniformément en $x \in K_J$,*

$$\varphi_{n,c}(x) = (2\pi n)^{-d/2} (\det D_x^2 J)^{1/2} e^{-nJ(x)} \left(1 + o(1) + O\left(n^{d/2} e^{-\gamma n} c^{-d}\right) \right).$$

Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

Lemme VI.3. *Pour tous $c > 0$ et $z \in \mathbb{C}$,*

$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle x, z \rangle} k_c(x) dx = \prod_{j=1}^d \frac{2(\cosh(cz_j) - 1)}{(cz_j)^2}.$$

De plus, pour tout compact K de \mathbb{R} , il existe $M > 0$ tel que

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \sup_{u \in K} \left| \frac{2(\cosh(u + is) - 1)}{(u + is)^2} \right| \leq \frac{M}{1 + s^2}.$$

Démonstration. Pour tout $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} e^{\zeta s} \max(1 - |s|, 0) ds &= \int_{-1}^1 e^{\zeta s} (1 - |s|) ds \\ &= \int_{-1}^1 e^{\zeta s} ds - 2 \int_0^1 s \cosh(\zeta s) ds \\ &= \frac{2\sinh(\zeta)}{\zeta} - 2 \left(\frac{\sinh(\zeta)}{\zeta} - \frac{\cosh(\zeta) - 1}{(\zeta)^2} \right) \\ &= \frac{2(\cosh(\zeta) - 1)}{\zeta^2} \end{aligned}$$

et cette dernière fonction se prolonge par continuité en $\zeta = 0$. D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \forall c > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}^d \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle x, z \rangle} k_c(x) dx &= \prod_{j=1}^d \frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}} e^{x_j z_j} \max\left(1 - \left|\frac{x_j}{c}\right|, 0\right) dx_j \\ &= \prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}} e^{x_j c z_j} \max(1 - |x_j|, 0) dx_j \\ &= \prod_{j=1}^d \frac{2(\cosh(cz_j) - 1)}{(cz_j)^2}. \end{aligned}$$

Ensuite nous définissons

$$f : (s, u) \in \mathbb{R} \times K \longmapsto \frac{2(1+s^2)(\cosh(u+is) - 1)}{(u+is)^2}.$$

Il s'agit d'une fonction continue sur $\mathbb{R} \times K$ (elle se prolonge par continuité en posant $f(0,0) = 1$). Il s'ensuit que f est bornée sur le compact $[-1, 1] \times K$. De plus, si $|s| > 1$ et $u \in K$, alors

$$|f(s, u)| = \frac{2(1+s^2)}{u^2+s^2} |\cosh(u+is) - 1| \leq 2 \left(\frac{1}{s^2} + 1 \right) (\cosh(u) + 1) \leq 4 \sup_{u \in K} (\cosh(u) + 1).$$

Ainsi f est bornée sur $\mathbb{R} \times K$ par une certaine constante $M > 0$. Ceci termine la démonstration du lemme. \square

Lemme VI.4. *Si ν_2 est une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d qui satisfait la condition de Cramér et qui est absolument continue par rapport à une mesure de probabilité ν_1 sur \mathbb{R}^d , alors ν_1 satisfait la condition de Cramér.*

Nous donnons une preuve issue de [3] :

Démonstration. Si μ est une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d , nous notons μ^* la loi de $X - Y$, où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de même loi μ . Pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, nous avons

$$\widehat{\mu^*}(t) = \mathbb{E} \left(e^{i\langle t, X-Y \rangle} \right) = \mathbb{E} \left(e^{i\langle t, X \rangle} \right) \mathbb{E} \left(e^{-i\langle t, Y \rangle} \right) = |\widehat{\mu}(t)|^2.$$

Ainsi $\widehat{\mu^*}(t)$ est un nombre réel et donc

$$\widehat{\mu^*}(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos \langle t, x \rangle d\mu^*(x).$$

Supposons que ν_1 ne satisfait pas la condition de Cramér. Alors il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\sup_{\|t\| \geq \alpha} |\widehat{\nu}_1(t)| = 1$$

et donc, il existe une suite $(t_n)_{n \geq 1}$ dans \mathbb{R}^d telle que $\|t_n\| \geq \alpha$ pour $n \geq 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{\nu}_1(t_n)| = 1.$$

Par conséquent

$$\widehat{\nu}_1^*(t_n) = \int_{\mathbb{R}^d} \cos \langle t_n, x \rangle d\nu_1^*(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Cela implique que la suite de fonctions $(x \mapsto 1 - \cos \langle t_n, x \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la fonction nulle dans $L^1(\nu_1^*)$. Ainsi il existe une sous-suite $(t_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ telle que, pour ν_1^* -presque tout x , la suite $(\cos \langle t_{\varphi(n)}, x \rangle)_{n \geq 1}$ tend vers 1. De plus ν_2 est absolument continue par rapport à ν_1 , donc $\nu_2^{\otimes 2}$ est absolument continue par rapport à $\nu_1^{\otimes 2}$. Soit A un borélien de \mathbb{R}^d tel que $\nu_1^*(A) = 0$. Notons

$$A^* = \{ (x, y) \in (\mathbb{R}^d)^2 : x - y \in A \}.$$

Il s'agit d'un borélien de $(\mathbb{R}^d)^2$ et $\nu_1^{\otimes 2}(A^*) = \nu_1^*(A) = 0$. Par conséquent $\nu_2^*(A) = \nu_2^{\otimes 2}(A^*) = 0$. Ceci entraîne que ν_2^* est absolument continue par rapport à ν_1^* . En particulier, pour ν_2^* -presque tout x , $(\cos \langle t_{\varphi(n)}, x \rangle)_{n \geq 1}$ tend vers 1. Enfin, le théorème de convergence dominée implique que

$$|\widehat{\nu}_2(t_{\varphi(n)})|^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \cos \langle t_{\varphi(n)}, x \rangle d\nu_2^*(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Mais ν_2 satisfait la condition de Cramér donc il existe $\varepsilon \in]0, 1[$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad |\widehat{\nu}_2(t_{\varphi(n)})| \leq \sup_{\|t\| \geq \alpha} |\widehat{\nu}_2(t)| = 1 - \varepsilon.$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, nous obtenons une contradiction. Par conséquent ν_1 satisfait la condition de Cramér. \square

Démonstration du théorème VI.2. Il découle du lemme VI.3 que

$$\forall s \in \mathbb{R}^d \quad \widehat{k}_c(s) = \prod_{j=1}^d \frac{2(1 - \cos(cs_j))}{(cs_j)^2}$$

et, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, la fonction $x \mapsto e^{\langle u, x \rangle} k_c(x)$ a pour transformée de Fourier

$$s \in \mathbb{R}^d \mapsto \prod_{j=1}^d \frac{2(\operatorname{ch}(c(u_j + is_j)) - 1)}{(c(u_j + is_j))^2} = \prod_{j=1}^d \frac{2(1 - \cos(c(s_j - iu_j)))}{(c(s_j - iu_j))^2} = \widehat{k}_c(s - iu).$$

Il s'agit d'une fonction intégrable donc la formule d'inversion de Fourier implique que la transformée de Fourier de $s \mapsto (2\pi)^{-d} \widehat{k}_c(s - iu)$ est $y \mapsto e^{-\langle u, y \rangle} k_c(y)$. Soient $x \in K_J$ et $u \in \mathbb{R}^d$. Un simple calcul nous donne que la fonction

$$s \mapsto \frac{1}{(2\pi)^d} e^{-n\langle x, u+is \rangle} \widehat{k}_c(s - iu)$$

a pour transformée de Fourier la fonction $y \mapsto e^{-\langle u, y \rangle} k_c(y - nx)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \varphi_{n,c}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle u, y \rangle} k_c(y - nx) e^{\langle u, y \rangle} d\nu^{*n}(y) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle s, y \rangle} \frac{e^{-n\langle x, u+is \rangle} \widehat{k}_c(s - iu)}{(2\pi)^d} ds \right) e^{\langle u, y \rangle} d\nu^{*n}(y). \end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini,

$$\begin{aligned} \varphi_{n,c}(x) &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-n\langle x, u+is \rangle} \widehat{k}_c(s - iu)}{(2\pi)^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle s, y \rangle} e^{\langle u, y \rangle} d\nu^{*n}(y) \right) ds \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{e^{-n\langle x, u+is \rangle} \widehat{k}_c(s - iu)}{(2\pi)^d} M(u + is)^n ds. \end{aligned}$$

Or $x \in A_J$ donc, si λ désigne la fonction réciproque de ∇L , alors le théorème III.16 assure que

$$J(x) = \langle \lambda(x), x \rangle - \ln M(\lambda(x)).$$

En remplaçant u par $\lambda(x)$ dans l'intégrale précédente, nous obtenons

$$\varphi_{n,c}(x) = e^{-nJ(x)} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-in\langle x, s \rangle} \frac{M(\lambda(x) + is)^n}{M(\lambda(x))^n} \widehat{k}_c(s - i\lambda(x)) \frac{ds}{(2\pi)^d}.$$

Notons μ_x la mesure sur \mathbb{R}^d telle que

$$d\mu_x(y) = \frac{\exp\langle y + x, \lambda(x) \rangle}{M(\lambda(x))} d\nu(y + x).$$

Sa transformée de Fourier est la fonction

$$s \mapsto e^{-i\langle x, s \rangle} \frac{M(\lambda(x) + is)}{M(\lambda(x))},$$

si bien que

$$\varphi_{n,c}(x) = e^{-nJ(x)} \int_{\mathbb{R}^d} (\widehat{\mu}_x(s))^n \widehat{k}_c(s - i\lambda(x)) \frac{ds}{(2\pi)^d}.$$

Pour tout $x \in K_J$, la loi μ_x admet pour espérance

$$\int_{\mathbb{R}^d} y \frac{e^{\langle x+y, \lambda(x) \rangle}}{M(\lambda(x))} d\nu(y+x) = \int_{\mathbb{R}^d} (z-x) \frac{e^{\langle z, \lambda(x) \rangle}}{M(\lambda(x))} d\nu(z) = \nabla L(\lambda(x)) - x = 0$$

et pour matrice de covariance $\Sigma_x = D_{\lambda(x)}^2 L$ car, pour $1 \leq i, j \leq d$ et $s \in D_L$,

$$\begin{aligned} (\Sigma_x)_{i,j} &= \frac{\int_{\mathbb{R}^d} y_i y_j e^{\langle \lambda(x), y+x \rangle} d\nu(y+x)}{M(\lambda(x))} = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} (z_i - x_i)(z_j - x_j) e^{\langle \lambda(x), z \rangle} d\nu(z)}{M(\lambda(x))} \\ &= \frac{\int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j e^{\langle \lambda(x), z \rangle} d\nu(z)}{M(\lambda(x))} - x_i x_j = \frac{\partial^2 L}{\partial s_i \partial s_j}(\lambda(x)). \end{aligned}$$

Quand t tend vers 0, uniformément en $x \in K_J$,

$$\widehat{\mu}_x(t) = 1 - \frac{1}{2} \langle \Sigma_x t, t \rangle + o(\|t\|^2).$$

En effet

$$(x, t) \mapsto \widehat{\mu}_x(t) = e^{-i\langle t, x \rangle} \frac{M(\lambda(x) + it)}{M(\lambda(x))}$$

est de classe C^∞ sur $A_J \times \mathbb{R}^d$ (cf. théorème III.16) donc la formule de Taylor-Lagrange assure que le terme de reste est uniforme en $x \in K_J$. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, uniformément en $x \in K_J$,

$$\widehat{\mu}_x \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp \left(-\frac{1}{2} \langle \Sigma_x t, t \rangle \right).$$

De plus, pour tous $c > 0$, $n \geq 1$, $t \in \mathbb{R}^d$ et $x \in K_J$, nous avons

$$\widehat{k}_c \left(\frac{t}{\sqrt{n}} - i\lambda(x) \right) = \int_{\mathbb{R}^d} f_{c,n}(x, s) ds,$$

avec

$$\forall s \in \mathbb{R}^d \quad f_{c,n}(x, s) = \exp \left(i \frac{c}{\sqrt{n}} \langle s, t \rangle + c \langle s, \lambda(x) \rangle \right) k(s).$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $(x, y) \rightarrow e^{x+iy}$, nous montrons que

$$\forall s \in \mathbb{R}^d \quad \sup_{x \in K_J} |f_{c,n}(x, s) - k(s)| = k(s) \sup_{x \in K_J} \left| \exp \left(i \frac{c}{\sqrt{n}} \langle s, t \rangle + c \langle s, \lambda(x) \rangle \right) - 1 \right| \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c \rightarrow 0} 0$$

De plus, pour tous $s \in \mathbb{R}^d$, $x \in K_I$, $c \leq 1$ et $n \geq 1$,

$$|f_{c,n}(x, s)| \leq k(s) \sup_{\substack{x \in K_I \\ t \in [-1, 1]^d}} \exp \langle t, \lambda(x) \rangle.$$

Le terme de droite définit une fonction intégrable sur \mathbb{R}^d puisque $k(s) = 0$ pour $s \notin [-1, 1]^d$. Par conséquent le théorème de convergence dominée uniforme (lemme III.18) assure que, pour tout $t \in \mathbb{R}^d$, uniformément en $x \in K_J$,

$$\widehat{k}_c \left(\frac{t}{\sqrt{n}} - i\lambda(x) \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c \rightarrow 0} 1.$$

Notons que les fonctions $x \mapsto \widehat{\mu}_x(t)$ et $x \mapsto \exp(-\langle \Sigma_x t, t \rangle / 2)$, $t \in \mathbb{R}^d$, sont continues sur K_J . Pour appliquer le théorème de convergence dominée (version uniforme), il nous faut encore obtenir une majoration uniforme de la suite de fonctions. Pour tout $x \in A_J$, la matrice Σ_x est symétrique définie positive donc ε_x , sa plus petite valeur propre, est strictement positive et ε_x^{-1} est la plus grande valeur propre de l'inverse de Σ_x . Ainsi, en notant $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$, nous avons

$$\forall x \in A_J \quad \varepsilon_x = (\max\{\alpha : \alpha \text{ est une valeur propre de } \Sigma_x^{-1}\})^{-1} = \|\Sigma_x^{-1}\|^{-1}.$$

De plus $x \mapsto \Sigma_x = D_{\lambda(x)}^2 L$ est continue sur A_J donc c'est aussi le cas de la fonction $x \mapsto \varepsilon_x$. Notons alors ε_0 son minimum sur le compact K_J inclus dans A_J . Il s'agit d'un réel strictement positif. Le développement limité ci-dessus assure donc qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall (t, x) \in B(0, \delta) \times K_J \quad |\widehat{\mu}_x(t)| \leq 1 - \frac{1}{2} \left\langle \left(\Sigma_x - \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{I}_d \right) t, t \right\rangle.$$

Le théorème spectral des matrices symétriques réelles assure que, pour tout $x \in K_J$, la matrice $\Sigma_x - \varepsilon_0 \mathbf{I}_d$ est symétrique positive. Ainsi

$$\forall t \in \mathbb{R}^d \quad \left\langle \left(\Sigma_x - \frac{\varepsilon_0}{2} \mathbf{I}_d \right) t, t \right\rangle - \frac{\varepsilon_0}{2} \|t\|^2 = \langle (\Sigma_x - \varepsilon_0 \mathbf{I}_d) t, t \rangle \geq 0.$$

Nous en déduisons que

$$\forall (t, x) \in B(0, \delta) \times K_J \quad |\widehat{\mu}_x(t)| \leq 1 - \frac{\varepsilon_0}{4} \|t\|^2.$$

En utilisant le fait que $1 - y \leq e^{-y}$ pour tout $y \geq 0$, nous obtenons que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall (t, x) \in B(0, \delta\sqrt{n}) \times K_J \quad \left| \widehat{\mu}_x \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right) \right|^n \leq \exp \left(-\frac{\varepsilon_0}{4} \|t\|^2 \right).$$

Le terme de droite définit une fonction intégrable et indépendante de $x \in K_J$ et de n . De plus $\widehat{k}_c(t) = \widehat{k}(ct)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et le lemme VI.3 assure que la fonction $\widehat{k}_c(\cdot/\sqrt{n} - i\lambda(x))$ est bornée uniformément en $x \in K_J$, $c > 0$ et $n \geq 1$. Le théorème de convergence dominée uniforme (lemme III.18) entraîne donc que, uniformément en $x \in K_J$,

$$\int_{\|t\| < \delta\sqrt{n}} \widehat{\mu}_x \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n \widehat{k}_c \left(\frac{t}{\sqrt{n}} - i\lambda(x) \right) dt \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{c \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left(-\frac{1}{2} \left\langle \left(D_{\lambda(x)}^2 L \right) t, t \right\rangle \right) dt.$$

De plus cette deuxième intégrale est égale à $(2\pi)^{d/2} \left(\det D_{\lambda(x)}^2 L \right)^{-1/2}$ et le théorème III.16 assure que, pour $x \in A_J$, $D_{\lambda(x)}^2 L$ est la matrice inverse de $D_x^2 J$. Ainsi, quand n tend vers $+\infty$ et c tend vers 0, uniformément en $x \in K_J$,

$$\begin{aligned} \int_{\|t\| < \delta} \widehat{\mu}_x(t)^n \widehat{k}_c(s - i\lambda(x)) ds &= n^{-d/2} \int_{\|t\| < \delta\sqrt{n}} \widehat{\mu}_x \left(\frac{t}{\sqrt{n}} \right)^n \widehat{k}_c \left(\frac{t}{\sqrt{n}} - i\lambda(x) \right) dt \\ &\sim \left(\frac{2\pi}{n} \right)^{d/2} (\det D_x^2 J)^{1/2}. \end{aligned}$$

Regardons maintenant la convergence du reste de l'intégrale. La mesure ν vérifie la condition de Cramér (C) et ν est absolument continue par rapport à μ_x . Il découle du lemme VI.4 que μ_x satisfait aussi la condition de Cramér :

$$\sup_{\|s\| \geq \delta} |\widehat{\mu}_x(s)| < 1.$$

Ainsi, par compacité de K_J , il existe $\gamma > 0$ tel que

$$\sup_{x \in K_J} \sup_{\|s\| \geq \delta} |\widehat{\mu}_x(s)| = e^{-\gamma} < 1.$$

Il s'ensuit que

$$\sup_{x \in K_J} \left| \int_{\|s\| \geq \delta} \widehat{\mu}_x(s)^n \widehat{k}_c(s - i\lambda(x)) ds \right| \leq e^{-n\gamma} \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{x \in K_J} |\widehat{k}_c(s - i\lambda(x))| ds.$$

D'après le lemme VI.3, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{x \in K_J} |\widehat{k}_c(s - i\lambda(x))| ds &= \int_{\mathbb{R}^d} \sup_{x \in K_J} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle t, \lambda(x) + is \rangle} k_c(t) dt \right| ds \\ &= O \left(\prod_{j=1}^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1 + (cs_j)^2} ds_j \right) = O \left(\frac{1}{c^d} \right). \end{aligned}$$

Finalement, quand n tend vers $+\infty$ et c tend vers 0,

$$\begin{aligned} \varphi_{n,c}(x) &= \frac{e^{-nJ(x)}}{(2\pi)^d} \left(\left(\frac{2\pi}{n} \right)^{d/2} (\det D_x^2 J)^{1/2} (1 + o(1)) + O(e^{-n\gamma} c^{-d}) \right) \\ &= (2\pi n)^{-d/2} (\det D_x^2 J)^{1/2} e^{-nJ(x)} \left(1 + o(1) + O(n^{d/2} e^{-\gamma n} c^{-d}) \right). \end{aligned}$$

Le développement est uniforme en $x \in K_J$ d'après l'étude qui précède car $x \mapsto (\det D_x^2 J)^{1/2}$ est une fonction continue donc bornée sur K_J . Ceci termine la démonstration du théorème VI.2. \square

17 Un théorème central limite général

Dans ce paragraphe, nous montrons un théorème de fluctuations dans le cadre très général introduit au début du chapitre. Il s'agit d'un résultat dont la preuve est très technique (elle est inspiré de l'article [44] de Anders Martin-Löf et de la preuve du théorème III.17) avec des hypothèses larges permettant ainsi de traiter des cas très généraux. Ce théorème nous permettra notamment de prouver le théorème I.3 dans le cas où ν_ρ satisfait la condition de Cramér, ainsi que les théorèmes I.5 et I.6.

a) Enoncé

Nous commençons par lister les hypothèses requises sur ν et $(\psi_n)_{n \geq 1}$.

Hypothèses VI.5. Soit ν une mesure de probabilité non-dégénérée sur \mathbb{R}^d telle que $0 \in \overset{\circ}{D}_L$. Notons A_J le domaine admissible de sa transformée de Cramér J . Soit $(\psi_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions de \mathbb{R}^d à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Supposons qu'il existe une fonction ψ définie sur \mathbb{R}^d et à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \int_{\mathbb{R}^d} \exp \left(n\psi \left(\frac{x}{n} \right) \right) d\nu^{*n}(x) < +\infty$$

et, pour n assez grand,

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \psi_n(x) \leq \psi(x).$$

Supposons que ν et $(\psi_n)_{n \geq 1}$ vérifient :

(a) ν satisfait la condition de Cramér

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|s\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle z, s \rangle} d\nu(z) \right| < 1. \quad (C)$$

(b) Il existe $x^* = (x_1^*, \dots, x_d^*) \in A_J$, $t^* \in \mathbb{R}$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ des entiers strictement positifs tels que

$$\forall (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d \quad n(J - \psi_n) \left(\frac{x_1}{n^{1/\alpha_1}} + x_1^*, \dots, \frac{x_d}{n^{1/\alpha_d}} + x_d^* \right) - nt^* \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} p(x_1, \dots, x_d)$$

et, au voisinage de x^* ,

$$(J - \psi)(x) - t^* \sim p(x_1 - x_1^*, \dots, x_d - x_d^*),$$

où p est une application polynomiale en d variables, différente de l'application nulle sur \mathbb{R}^d et vérifiant

$$\forall a > 0 \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ap(x_1, \dots, x_d)} dx_1 dx_2 \cdots dx_d < +\infty.$$

(c) Il existe $r > 0$ et m un entier strictement positif tels que

$$\forall \eta > 0 \quad \sup_{\substack{\|x - x^*\| \leq r \\ \|y\| \leq \eta}} \left| \psi_n \left(x + \frac{y}{n^m} \right) - \psi_n(x) \right| \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right).$$

(d) ψ et ν_n vérifient la condition de Varadhan en x^* :

$$\forall \delta > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\|x - x^*\| \geq \delta} e^{n\psi(x)} d\nu_n(x) < -t^*. \quad (V)$$

Si $\psi_n = \psi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et si la fonction $G = J - \psi$ admet un unique minimum en x^* avec $G(x^*) = t^*$ alors la fonction polynomiale p de l'hypothèse (b) est telle que $t^* + p(x_1 - x_1^*, \dots, x_d - x_d^*)$ est le développement de $G(x)$ quand x est dans un voisinage de x^* . Il reste alors à s'assurer qu'elle vérifie bien les autres conditions de l'hypothèse (b). De plus, si il existe $r > 0$, $M > 0$ et $a > 0$ tels que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^{2d} \quad \|x - x^*\| \leq r, \|y\| \leq r \implies |\psi(x + y) - \psi(x)| \leq M\|y\|^a,$$

alors la condition (c) est satisfaite pour m assez grand. En particulier c'est le cas si ψ est différentiable au voisinage de x^* (d'après l'inégalité des accroissements finis). Nous discuterons des hypothèses (a) et (d) dans le paragraphe 17.c).

Supposons que ν et $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient les hypothèses VI.5. Rappelons le cadre introduit au début du chapitre. Nous posons

$$Z_n = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \exp \left(n\psi_n \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) \right) \prod_{i=1}^n d\nu(x_i) < +\infty.$$

Soit $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d et tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi la mesure de probabilité de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_n} \exp \left(n\psi_n \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right) \right)$$

par rapport à $\nu^{\otimes n}$. Posons $S_n = X_n^1 + \cdots + X_n^n$ et notons $S_n(1), \dots, S_n(d)$ les coordonnées du vecteur S_n dans \mathbb{R}^d . Nous avons le théorème suivant :

Théorème VI.6. Soit ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d de matrice de covariance Σ et soit $(\psi_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions sur \mathbb{R}^d . Si ν et $(\psi_n)_{n \geq 1}$ vérifient les hypothèses VI.5 alors, quand n tend vers $+\infty$,

$$Z_n \sim n^{d/2} e^{-nt^*} \prod_{j=1}^d n^{-1/\alpha_j} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp(-p(x_1, \dots, x_d))}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} dx_1 \dots dx_d$$

et le vecteur

$$\left(\frac{S_n(1) - nx_1^*}{n^{1-1/\alpha_1}}, \dots, \frac{S_n(d) - nx_d^*}{n^{1-1/\alpha_d}} \right)$$

converge en loi vers la mesure de probabilité de densité

$$(x_1, \dots, x_d) \mapsto \frac{\exp(-p(x_1, \dots, x_d))}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-p(y_1, \dots, y_d)) dy_1 \dots dy_d}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d .

b) Démonstration

Fixons $y \in \mathbb{R}^d$. Posons $f = \exp(i\langle \cdot, y \rangle)$ et

$$E_n(y) = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{S_n(1) - nx_1^*}{n^{1-1/\alpha_1}}, \dots, \frac{S_n(d) - nx_d^*}{n^{1-1/\alpha_d}} \right) \exp \left(n\psi_n \left(\frac{S_n}{n} \right) \right) \right].$$

Nous avons $Z_n = E_n(0)$. Nous allons étudier la convergence de $E_n(y)/Z_n$ et conclure avec le théorème de Paul Levy.

Soit $\delta > 0$. Notons B_δ^* la boule ouverte dans \mathbb{R}^d de rayon δ et centrée en x^* . Pour tout $n \geq 1$, nous écrivons $E_n(y) = A_n + B_n$ avec

$$A_n = \int_{B_\delta^*} f \left((x_1 - x_1^*)n^{1/\alpha_1}, \dots, (x_d - x_d^*)n^{1/\alpha_d} \right) \exp(n\psi_n(x_1, \dots, x_n)) d\nu_n(x_1, \dots, x_d)$$

et

$$B_n = \int_{(B_\delta^*)^c} f \left((x_1 - x_1^*)n^{1/\alpha_1}, \dots, (x_d - x_d^*)n^{1/\alpha_d} \right) \exp(n\psi_n(x_1, \dots, x_n)) d\nu_n(x_1, \dots, x_d).$$

D'après l'hypothèse (d), il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que, pour n assez grand,

$$B_n \leq e^{-n\varepsilon_0 - nt^*}.$$

Nous calculons ensuite le développement de A_n . Pour tous $n \geq 1$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, notons

$$f_n(x) = f \left((x_1 - x_1^*)n^{1/\alpha_1}, \dots, (x_d - x_d^*)n^{1/\alpha_d} \right) = \exp \left(i \sum_{j=1}^d y_j (x_j - x_j^*)n^{1/\alpha_j} \right).$$

Posons

$$A_{n,c,1} = \int_{\mathbb{R}^d} k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \mathbf{1}_{B_\delta^*} \right) (s) d\nu_n(s)$$

et $A_{n,c,2} = A_n - A_{n,c,1}$. Le théorème de Fubini entraîne que

$$\begin{aligned} A_{n,c,1} &= \int_{\mathbb{R}^d} k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \mathbf{1}_{B_\delta^*} \right) \left(\frac{s}{n} \right) d\nu^{*n}(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} k_{c/n} \left(\frac{s}{n} - x \right) f_n(x) e^{n\psi_n(x)} \mathbf{1}_{B_\delta^*}(x) dx \right) d\nu^{*n}(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} f_n(x) e^{n\psi_n(x)} \mathbf{1}_{B_\delta^*}(x) \left(\int_{\mathbb{R}^d} n^d k_c(s - nx) d\nu^{*n}(s) \right) dx \\ &= n^d \int_{B_\delta^*} f_n(x) e^{n\psi_n(x)} \varphi_{n,c}(x) dx. \end{aligned}$$

Quitte à réduire δ , nous supposons que B_δ^* est inclus dans un compact K_J de A_J . Posons

$$H_{n,c} : x \in \mathbb{R}^d \longmapsto n^{d/2} e^{nJ(x)} \varphi_{n,c}(x)$$

et $G_n = J - \psi_n$. Alors

$$A_{n,c,1} = n^{d/2} \int_{B_\delta^*} f_n(x) e^{-nG_n(x)} H_{n,c}(x) dx.$$

Supposons que

$$\varepsilon_{n,c} = n^{d/2} e^{-\gamma n} c^{-d} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c \rightarrow 0} 0.$$

Alors le théorème VI.2 implique que, uniformément en $x \in K_J$,

$$H_{n,c}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c \rightarrow 0} (2\pi)^{-d/2} (\det D_x^2 J)^{1/2}.$$

Notons

$$B_{\delta,n}^* = \{ x \in \mathbb{R}^d : \|x_1 n^{-1/\alpha_1}, \dots, x_d n^{-1/\alpha_d}\| \leq \delta \}$$

et

$$\tau = \sum_{i=1}^d \frac{1}{\alpha_i}.$$

Effectuons le changement de variable

$$v_n : (x_1, \dots, x_d) \longmapsto (x_1 n^{-1/\alpha_1} + x_1^*, \dots, x_d n^{-1/\alpha_d} + x_d^*)$$

de jacobien $n^{-\tau}$:

$$\begin{aligned} A_{n,c,1} &= n^{-\tau+d/2} \int_{B_{\delta,n}^*} f(x) \exp \left(-nG_n \left(x_1 n^{-1/\alpha_1} + x_1^*, \dots, x_d n^{-1/\alpha_d} + x_d^* \right) \right) \\ &\quad \times H_{n,c} \left(x_1 n^{-1/\alpha_1} + x_1^*, \dots, x_d n^{-1/\alpha_d} + x_d^* \right) dx. \end{aligned}$$

Nous allons vérifier que nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée à l'intégrale ci-dessus. L'équivalent uniforme de g_n signifie que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ et $c_0 > 0$ tels que

$$\forall x \in K_J \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall c \leq c_0 \quad \left| H_{n,c}(x) 2\pi (\det D_x^2 J)^{-1/2} - 1 \right| \leq \alpha.$$

Si $x \in B_{\delta,n}^*$ alors $v_n(x) \in B_\delta^* \subset K_J$ et donc

$$\forall x \in B_{\delta,n}^* \quad \forall n \geq n_0 \quad \forall c \leq c_0 \quad \left| H_{n,c}(v_n(x)) (2\pi)^{d/2} \left(\det D_{v_n(x)}^2 J \right)^{-1/2} - 1 \right| \leq \alpha.$$

De plus $v_n(x)$ tend vers x^* quand n tend vers $+\infty$ donc, par continuité,

$$\left(D_{v_n(x)}^2 J \right)^{-1/2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c \rightarrow 0} \left(D_{x^*}^2 J \right)^{-1/2} = \left(D_0^2 L \right)^{1/2} = \Sigma^{1/2},$$

où Σ désigne la matrice de covariance de ν (qui est inversible). Par conséquent

$$\mathbb{1}_{B_{\delta,n}^*}(x) H_{n,c}(v_n(x)) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \left((2\pi)^d \det(\Sigma) \right)^{-1/2}.$$

Le développement de G_n au voisinage de x^* de l'hypothèse (b) entraîne que

$$\exp(-nG_n(v_n(x)) + nt^*) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \exp(-p(x_1, \dots, x_n)).$$

Il reste maintenant à s'assurer que le terme dans l'intégrale est bien dominé par une fonction intégrable indépendante de n . La fonction

$$x \mapsto \left(D_x^2 J \right)^{-1/2}$$

est continue et bornée sur B_δ^* par un certain réel $M_\delta > 0$. L'équivalent uniforme de $H_{n,c}$ entraîne donc qu'il existe une constante $C_\delta > 0$ telle que $H_{n,c}(x) \leq C_\delta$ pour tout $x \in B_\delta^*$. Enfin l'hypothèse (b) nous assure que

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \forall x \in B_\delta^* \quad G_n(x) - t^* \geq J(x) - \psi(x) - t^* \geq \frac{1}{2} p(x_1 - x_1^*, \dots, x_d - x_d^*)$$

et donc

$$\mathbb{1}_{B_{\delta,n}^*}(x) f(x) e^{-nG_n(v_n(x)) + nt^*} H_{n,c}(v_n(x)) \leq \|f\|_\infty C_\delta e^{-p(x_1, \dots, x_d)/2}.$$

Par hypothèse, le terme de droite définit une fonction intégrable sur \mathbb{R}^d . Par conséquent le théorème de convergence dominée entraîne que, quand n tend vers $+\infty$ et c vers 0,

$$A_{n,c,1} \sim n^{-\tau+d/2} e^{-nt^*} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} e^{-p(x)} dx.$$

Occupons-nous maintenant de $A_{n,c,2}$. Nous allons introduire une indicatrice pour simplifier l'écriture de $A_{n,c,2}$. Posons $\alpha = \delta/(2\sqrt{d})$ et

$$A_{n,c,3} = \int_{B_\alpha^*} \left[f_n(s) e^{n\psi_n(s)} \mathbb{1}_{B_\delta^*}(s) - k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \mathbb{1}_{B_\delta^*} \right) (s) \right] d\nu_n(s),$$

$$A_{n,c,4} = \int_{(B_\alpha^*)^c} f_n(s) e^{n\psi_n(s)} \mathbb{1}_{B_\delta^*}(s) d\nu_n(s),$$

$$A_{n,c,5} = \int_{(B_\alpha^*)^c} k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \mathbb{1}_{B_\delta^*} \right) (s) d\nu_n(s),$$

si bien que $A_{n,c,2} = A_{n,c,3} + A_{n,c,4} - A_{n,c,5}$. Nous avons

$$|A_{n,c,4}| \leq \int_{(B_\alpha^*)^c} e^{n\psi_n} d\nu_n \leq \int_{(B_\alpha^*)^c} e^{n\psi} d\nu_n$$

et l'hypothèse (d) assure qu'il existe $\varepsilon_1 > 0$ tel que pour n assez grand,

$$A_{n,c,4} \underset[n \rightarrow \infty]{c \rightarrow 0} O \left(e^{-n\varepsilon_1 - nt^*} \right).$$

Jusqu'ici nous avons utilisé les techniques classiques de la méthode de Laplace (cf. la preuve du théorème I.3) avec l'ajout d'une approximation de l'unité. Le calcul des développements de $A_{n,c,3}$ et $A_{n,c,5}$ constitue la partie technique de la démonstration.

Lemme VI.7. Si δ , c/n , cn sont assez petits et si $c = O(1/n^{m-1})$ (où m est l'entier de la condition (c) des hypothèses VI.5) alors

$$A_{n,c,3} \underset{\substack{n \rightarrow \infty \\ c \rightarrow 0}}{=} o(E_n(0)).$$

$$A_{n,c,5} \underset{\substack{n \rightarrow \infty \\ c \rightarrow 0}}{=} O\left(\int_{\|s-x^*\| \geq \alpha} e^{n\psi(s)} d\nu_n(s)\right).$$

Supposons que le lemme VI.7 est démontré. Alors l'hypothèse (d) assure qu'il existe $\varepsilon_2 > 0$ tel que, pour n assez grand,

$$A_{n,c,5} \underset{\substack{n \rightarrow \infty \\ c \rightarrow 0}}{=} O\left(e^{-n\varepsilon_2 - nt^*}\right).$$

Nous rassemblons les estimations précédentes afin de conclure. Prenons $c = 1/n^\beta$ avec β assez grand pour que $c = O(1/n^{m-1})$ et c , cn et $n^{d/2}e^{-\gamma n}c^{-d}$ tendent vers 0 quand $n \rightarrow +\infty$. Pour δ assez petit, quand n tend vers $+\infty$, nous avons

$$A_n = n^{-\tau+d/2}e^{-nt^*} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp(i\langle y, x \rangle - p(x))}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} dx (1 + o(1))$$

$$+ o(E_n(0)) + O\left(e^{-n\varepsilon_1 - nt^*}\right) + O\left(e^{-n\varepsilon_2 - nt^*}\right).$$

Enfin nous avons

$$e^{-n\varepsilon_0} + e^{-n\varepsilon_1} + e^{-n\varepsilon_2} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(n^{-\tau+d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp(i\langle y, x \rangle - p(x))}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} dx\right)$$

donc

$$E_n(y) = A_n + B_n = n^{-\tau+d/2}e^{-nt^*} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp(i\langle y, x \rangle - p(x))}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} dx (1 + o(1)) + o(E_n(0)).$$

Ainsi

$$E_n(0) \sim n^{-\tau+d/2}e^{-nt^*} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\exp(-p(x))}{\sqrt{(2\pi)^d \det(\Sigma)}} dx$$

et par conséquent

$$\frac{E_n(y)}{E_n(0)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(i\langle y, x \rangle - p(x)) dx}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-p(x)) dx}.$$

Nous concluons avec le théorème de Paul Levy.

Il nous reste encore à calculer les développements de $A_{n,c,3}$ et $A_{n,c,5}$ annoncés dans le lemme VI.7.

Démonstration du lemme VI.7. Supposons que $c/n < \alpha$. Pour $s \in B_\alpha^*$, si $k(n(x-s)/c) \neq 0$, alors

$$\forall j \in \{1, \dots, d\} \quad 1 - |n(x_j - s_j)/c| > 0$$

et donc

$$|x_j - x_j^*| \leq |x_j - s_j| + |s_j - x_j^*| < \frac{c}{n} + \frac{\delta}{2\sqrt{d}} < \frac{\delta}{\sqrt{d}}.$$

Ainsi

$$\forall x \in B_\delta^* \quad \forall s \in B_\alpha^* \quad k(n(x-s)/c) = k(n(x-s)/c) \mathbf{1}_{B_\delta^*}(x).$$

Ceci entraîne que

$$\mathbb{1}_{B_\alpha^*} \times \left(k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \mathbb{1}_{B_\delta^*} \right) \right) = \mathbb{1}_{B_\alpha^*} \times \left(k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \right) \right).$$

Nous avons donc montré que, pour $c/n < \alpha$,

$$A_{n,c,3} = \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{B_\alpha^*}(s) \left[f_n(s) e^{n\psi_n(s)} - k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \right) (s) \right] d\nu_n(s).$$

Soit $s \in B_\alpha^*$. Nous avons

$$\begin{aligned} \left[f_n e^{n\psi_n} - k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \right) \right] (s) &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(f_n(s) e^{n\psi_n(s)} - f_n(s-x) e^{n\psi_n(s-x)} \right) k_{c/n}(x) dx \\ &= e^{n\psi_n(s)} f_n(s) \int_{\mathbb{R}^d} \left(1 - e^{n\tilde{F}_{s,n}(cx/n)} \right) k(x) dx \\ &= e^{n\psi_n(s)} f_n(s) \int_{[-1,1]^d} \left(1 - e^{n\tilde{F}_{s,n}(cx/n)} \right) k(x) dx, \end{aligned}$$

avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad F_{s,n}(x) = \psi_n(s-x) - \psi_n(s) - i \sum_{j=1}^d y_j x_j n^{1/\alpha_j}.$$

L'hypothèse (c) assure que, pour δ assez petit (afin que $\alpha \leq r$)

$$u_{n,c} = n \sup_{\substack{s \in B_\alpha^* \\ x \in [-1,1]^d}} \left| \psi_n \left(s + \frac{cx}{n} \right) - \psi_n(s) \right| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{c \rightarrow 0} 0$$

et donc, pour $c = O(1/n^{m-1})$,

$$\forall s \in B_\alpha^* \quad \forall x \in [-1,1]^d \quad \left| n\tilde{F}_{s,n} \left(\frac{x}{n} \right) \right| \leq u_{n,c} + n \sum_{j=1}^d |y_j| \left| \frac{cx_j}{n} \right| n^{1/\alpha_j} \leq u_{n,c} + c \|y\| \sum_{j=1}^d n^{1/\alpha_j}.$$

En appliquant l'inégalité des accroissements finis à la fonction $(x, y) \rightarrow e^{x+iy}$, nous montrons que, si $z \in \mathbb{C}$ est de partie réelle assez petite alors $|1 - e^z| \leq 2|z|$. Ainsi, si $cn^{-1+1/a}$ est assez petit, alors

$$\forall s \in B_\alpha^* \quad \forall x \in [-1,1]^d \quad \left| 1 - e^{n\tilde{F}_{s,n}(cx/n)} \right| \leq 2u_{n,c} + 2c \|y\| dn = o(1).$$

Par conséquent, si $c = O(1/n^{m-1})$ et si $\delta, c/n, cn$ sont assez petits, alors $A_{n,c,3} = o(E_n(0))$ quand n tend vers $+\infty$ et c vers 0.

Ensuite nous avons

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \mathbb{1}_{B_\delta^*} \right) (s) = \int_{[-c/n, c/n]^d} k_{c/n}(x) f_n(s-x) e^{n\psi_n(s-x)} \mathbb{1}_{B_\delta^*}(s-x) dx.$$

Supposons que $\|s - x^*\| > \delta + \sqrt{dc}/n$. Alors

$$\forall x \in [-c/n, c/n]^d \quad \|(s-x) - x^*\| \geq \|s - x^*\| - \|x\| > \delta$$

si bien que $\mathbb{1}_{B_\delta^*}(s-x) = 0$ et donc

$$k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \mathbb{1}_{B_\delta^*} \right) (s) = 0.$$

Si c/n est assez petit pour que $\delta + \sqrt{dc}/n \leq 2\delta$ alors

$$k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \mathbb{1}_{B_\delta^*} \right) = \left(k_{c/n} * \left(f_n e^{n\psi_n} \mathbb{1}_{B_\delta^*} \right) \right) \times \mathbb{1}_{B_{2\delta}^*}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} |A_{n,c,5}| &\leq \int_{\|s-x^*\| \geq \alpha} \mathbb{1}_{B_{2\delta}^*}(s) \int_{\mathbb{R}^d} \left| k_{c/n}(s-x) f_n(x) e^{n\psi_n(x)} \mathbb{1}_{B_\delta^*}(x) \right| dx d\nu_n(s) \\ &\leq \int_{\|s-x^*\| \geq \alpha} \mathbb{1}_{B_{2\delta}^*}(s) \left(k_{c/n} * e^{n\psi_n} \right)(s) d\nu_n(s). \end{aligned}$$

Notons que, pour δ assez petit, sur $B_{2\delta}^*$,

$$\left| k_{c/n} * e^{n\psi_n} \right| \leq e^{n\psi_n} + \left| e^{n\psi_n} - k_{c/n} * e^{n\psi_n} \right| \leq e^{n\psi_n} (1 + 2u_{n,c})$$

si $c = O(1/n^{m-1})$ et c/n est assez petit (nous utilisons ici le même argument que dans la majoration de $A_{n,c,3}$, avec $y = 0$). Finalement

$$A_{n,c,5} \underset{\substack{n \rightarrow \infty \\ c \rightarrow 0}}{=} O \left(\int_{\|s-x^*\| \geq \alpha} e^{n\psi(s)} d\nu_n(s) \right).$$

Ceci termine la démonstration du lemme. □

c) Autour des hypothèses VI.5

i) Autour de la condition de Cramér (C)

Supposons que ν admet une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d mais qu'elle ne satisfait pas (C). Le lemme de Riemann-Lebesgue entraîne que

$$|M(is)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{i\langle s, x \rangle} d\nu(x) \right| \xrightarrow{\|s\| \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent il existe $s_0 \neq 0$ tel que $|M(is_0)| = 1$ et donc, d'après le lemme III.22, ν est arithmétique. C'est absurde. Nous en déduisons que toute mesure admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d satisfait (C). De plus, le théorème de décomposition de Lebesgue (cf. [56]) nous assure que ν peut être représenté comme somme de trois composantes :

$$\nu = a\nu_{ac} + b\nu_d + c\nu_s,$$

où ν_{ac} est une mesure de probabilité absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue (et donc ayant une densité), ν_d est une mesure de probabilité discrète, ν_s est une mesure de probabilité singulière et a, b, c sont trois réels positifs tels que $a + b + c = 1$. Si $a > 0$, nous disons que ν admet une composante absolument continue. Nous déduisons de cette décomposition que :

Proposition VI.8. *Si ν admet une composante absolument continue alors elle satisfait la condition de Cramér (C).*

ii) Autour de la condition de Varadhan (V)

Dans le paragraphe B.3) de l'annexe, nous donnons des résultats sur la borne supérieure du lemme de Varadhan et des conditions suffisantes pour qu'elle soit vérifiée. Notamment, si $0 \in \overset{\circ}{D}_L$, alors la suite de mesures $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait un principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la bonne fonction de taux J (c'est le théorème de Cramér en dimension d). Supposons que ψ

est finie sur un ensemble fermé A sur lequel elle est aussi semi-continue supérieurement. Si ψ vérifie de plus la relation

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\{\psi(x) \geq M\} \cap A} e^{n\psi(x)} d\nu_n(x) = -\infty \quad (*)$$

alors, pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{A \cap \{\|x - x^*\| \geq \delta\}} e^{n\psi(y)} d\nu_n(y) \leq \sup_{\substack{x \in A \\ \|x - x^*\| \geq \delta}} (\psi(x) - J(x)).$$

La condition (*) est satisfaite en particulier si ψ est bornée. La proposition B.9 assure qu'elle est aussi satisfaite si ψ est majorée par une fonction convexe h telle que

$$\forall \alpha > 0 \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha h(x)} d\nu(x) < +\infty.$$

Enfin notons $G = J - \psi$. Si la fonction G admet un unique minimum en $x^* \in \mathbb{R}^d$ avec $G(x^*) = t^*$ et si ψ est bornée, alors, d'après le lemme V.2,

$$\sup \{ \psi(x) - J(x) : x \in A \text{ et } \|x - x^*\| \geq \delta \} < -G(x^*) = -t^*$$

et ψ et ν_n vérifient la condition de Varadhan (V) en x^* .

18 Application au modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC

a) Preuve du théorème I.3 dans le cas où ρ satisfait la condition de Cramér

Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} , de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que

$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{v_0 z^2} d\rho(z) < +\infty.$$

Nous notons $\Delta^* = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[: x^2 \leq y\}$ et nous définissons ψ par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \psi(x, y) = \frac{x^2}{2y} \mathbb{1}_{\Delta^*}(x, y) - \infty \mathbb{1}_{(\Delta^*)^c}(x, y).$$

Nous avons, pour tout f mesurable bornée de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}\right) d\tilde{\mu}_{n,\rho}(x_1, \dots, x_n) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{nx^2}{2y}\right) \mathbb{1}_{\{y>0\}} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) \frac{1}{Z_n} e^{n\psi(x,y)} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y). \end{aligned}$$

Le théorème I.3 est déjà montré pour la loi de Bernoulli. Supposons que le support de ρ possède au moins trois points. Nous allons appliquer le théorème VI.6 à la mesure ν_ρ et la suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\psi_n = \psi$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Supposons que ν_ρ vérifie la condition de Cramér :

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|(s,t)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz + itz^2} d\rho(z) \right| < 1.$$

Il reste à nous assurer que les autres hypothèses VI.5 sont satisfaites :

La proposition IV.15 entraîne que l'hypothèse (b) est vérifiée avec $x^* = (0, \sigma^2)$, $t^* = 0$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$ et l'application polynomiale p donnée par le polynôme

$$\frac{\mu_4 X_1^4}{12\sigma^8} + \frac{X_2^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)}.$$

L'hypothèse (c) est automatiquement vérifiée avec $m = 1$ d'après l'inégalité des accroissements finis, puisque ψ est de classe C^1 au voisinage de $(0, \sigma^2)$. Enfin la proposition V.1 implique que

$$\forall \delta > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\|(x, y - \sigma^2)\| \geq \delta} e^{n\psi(x, y)} d\tilde{\nu}_{n, \rho}(x, y) < 0$$

car $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y - \sigma^2)\| \geq \delta\}$ est un fermé ne contenant pas $(0, \sigma^2)$. Ainsi l'hypothèse (d) est vérifiée. Le théorème VI.6 implique donc que, sous $\tilde{\mu}_{n, \rho}$, le vecteur $(S_n/n^{3/4}, (T_n - n\sigma^2)/\sqrt{n})$ converge en loi vers la mesure de probabilité de densité

$$(x, y) \mapsto \frac{\exp\left(-\frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8} - \frac{y^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)}\right)}{\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{\mu_4 s^4}{12\sigma^8} - \frac{t^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)}\right) ds dt}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . Ceci termine la preuve du théorème I.3 dans le cas où ρ satisfait la condition de Cramér. Remarquons que nous avons aussi montré que

$$\frac{T_n - n\sigma^2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mu_4 - \sigma^4).$$

La démonstration précédente s'adapte très bien au modèle alternatif présenté au paragraphe 3.d). Il suffit de considérer cette fois la suite $(\psi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \psi_n(x, y) = \frac{x^2}{2(y + 1/n)} \mathbf{1}_{\Delta}(x, y) - \infty \mathbf{1}_{\Delta^c}(x, y).$$

Elle est majorée par $\tilde{\psi}$, la fonction qui est égale à ψ sauf en 0 où elle vaut 0. La condition (b) des hypothèses VI.5 est satisfaite puisque

$$\forall n \geq 1 \quad \forall (x, y) \in \Delta^* \quad (I - \psi_n)(x, y) = (I - F)(x, y) + \frac{x^2}{2ny(y + 1/n)}$$

et, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$n(I - F)\left(\frac{x}{n^{1/4}}, \frac{x}{\sqrt{n}} + \sigma^2\right) + n \frac{(x/n^{1/4})^2}{2n(y/\sqrt{n} + \sigma^2)(y/\sqrt{n} + \sigma^2 + 1/n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8} + \frac{y^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)} + 0.$$

Pour $r > 0$, notons B_r la boule dans \mathbb{R}^2 centrée en $(0, \sigma^2)$ et de rayon r . Si $r < \sigma^2$ alors

$$\forall (x, y) \in B_r \quad \|\nabla \psi_n(x, y)\| = \left\| \left(\frac{x}{y + 1/n}, -\frac{x^2}{2(y + 1/n)^2} \right) \right\| \leq \sqrt{\frac{r^2}{(\sigma^2 - r)^2} + \frac{r^4}{4(\sigma^2 - r)^4}}.$$

L'inégalité des accroissements finis entraîne alors que la condition (c) des hypothèses VI.5 est satisfaite avec r assez petit et $m = 2$. Enfin

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{\nu}_{n, \rho}(\{(0, 0)\}) = \ln \rho(\{0\})$$

et le lemme B.6 nous assure que, pour tout $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\|(x,y-\sigma^2)\| \geq \delta} e^{n\tilde{\psi}(x,y)} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x,y) \\ \leq \max \left(\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{B_\delta^c \cap \Delta^*} e^{nx^2/(2y)} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x,y), \ln \rho(\{0\}) \right). \end{aligned}$$

Cette quantité est strictement négative d'après la proposition V.1 et car ρ est non dégénérée. Ainsi la condition (d) des hypothèses VI.5 est satisfaite. Par conséquent le théorème VI.6 entraîne le théorème I.5.

b) Preuve du théorème I.6

Soit g une fonction mesurable telle que $g(u) \sim u^2/2$ au voisinage de 0 et $g(u) \leq u^2/2$ pour tout $u \in \mathbb{R}$. Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} , de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que

$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{v_0 z^2} d\rho(z) < +\infty.$$

Nous définissons ψ_g par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \quad \psi_g(x,y) = g\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right) \mathbb{1}_{\Delta^*}(x,y) - \infty \mathbb{1}_{(\Delta^*)^c}(x,y).$$

Nous avons, pour tout f mesurable bornée de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}\right) d\tilde{\mu}_{n,\rho,g}^{(1)}(x_1, \dots, x_n) \\ = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \frac{1}{Z_{n,g}} \exp\left(ng\left(\frac{x}{\sqrt{y}}\right)\right) \mathbb{1}_{\{y>0\}} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x,y) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x,y) \frac{1}{Z_{n,g}} e^{n\psi_g(x,y)} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x,y). \end{aligned}$$

Le fait que $g(u) \sim u^2/2$ au voisinage de 0 nous assure que ψ_g est positive sur un certain voisinage ouvert \mathcal{V} de $(0, \sigma^2)$, inclus dans Δ^* . Ainsi

$$Z_{n,g} = \int_{\Delta^*} \exp(n\psi_g(x,y)) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x,y) \geq \tilde{\nu}_{n,\rho}(\mathcal{V}).$$

Le principe de grandes déviations satisfait par $(\tilde{\nu}_{n,\rho})_{n \geq 1}$ entraîne que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_{n,g} \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{\nu}_{n,\rho}(\mathcal{V}) \geq - \inf_{(x,y) \in \mathcal{V}} I(x,y) = 0.$$

Notons $\theta_{n,\rho,g}$ la loi de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho,g}$. Soit \mathcal{U} un voisinage ouvert de $(0, \sigma^2)$ dans \mathbb{R}^2 . Comme $\psi_g \leq F$ sur Δ^* , il découle de la proposition V.1 que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \theta_{n,\rho,g}(\mathcal{U}^c) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap \mathcal{U}^c} \exp(n\psi_g(x,y)) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x,y) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_{n,g} < 0.$$

Par conséquent il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que

$$\forall n > n_0 \quad \theta_{n,\rho}(\mathcal{U}^c) \leq \exp(-n\varepsilon).$$

Ceci entraîne que, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho,g}$, $(S_n/n, T_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \sigma^2)$.

Supposons de plus que ν_ρ vérifie la condition de Cramér :

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|(s,t)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz+itz^2} d\rho(z) \right| < 1.$$

Il reste à nous assurer que les autres hypothèses VI.5 sont satisfaites : la proposition IV.15 entraîne que, quand (x, y) tend vers $(0, \sigma^2)$,

$$I(x, y) - F(x, y) \sim \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8} + \frac{(y - \sigma^2)^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)}.$$

Supposons enfin que g admette une dérivée d'ordre 4 en 0, la formule de Taylor-Young implique que

$$g(u) = \frac{u^2}{2} + g^{(3)}(0)\frac{u^3}{6} - m_4\frac{u^4}{12} + o(u^4).$$

Nous avons $g(u) \leq u^2/2$ pour tout $u \in \mathbb{R}$ donc $g^{(3)}(0) = 0$ et $m_4 \geq 0$. Ainsi, quand (x, y) tend vers $(0, \sigma^2)$,

$$F(x, y) - \psi_g(x, y) = \frac{m_4 x^4}{12y^2}(1 + o(1)) = \frac{m_4 x^4}{12\sigma^4} + o(\|(x, y)\|^4).$$

Nous en déduisons que

$$I(x, y) - \psi_g(x, y) \sim \frac{(\mu_4 + m_4\sigma^4)x^4}{12\sigma^8} + \frac{(y - \sigma^2)^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)}.$$

L'hypothèse (b) de VI.5 est ainsi vérifiée avec $x^* = (0, \sigma^2)$, $t^* = 0$, $\alpha_1 = 4$, $\alpha_2 = 2$ et l'application polynomiale p donnée par le polynôme

$$\frac{(\mu_4 + m_4\sigma^4)X_1^4}{12\sigma^8} + \frac{X_2^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)}.$$

Ensuite g admet une dérivée d'ordre 4 en 0 donc ψ_g est de classe C^1 au voisinage de $(0, \sigma^2)$. L'hypothèse (c) est donc vérifiée avec $m = 1$ d'après l'inégalité des accroissements finis. Enfin la proposition V.1 nous assure que

$$\forall \delta > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\|(x, y - \sigma^2)\| \geq \delta} e^{n\psi_g(x, y)} d\tilde{\nu}_{n, \rho}(x, y) < 0$$

car $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \|(x, y - \sigma^2)\| \geq \delta\}$ est un fermé ne contenant pas $(0, \sigma^2)$. Par conséquent l'hypothèse (d) est vérifiée. Le théorème VI.6 implique donc que, sous $\tilde{\mu}_{n, \rho, g}$, le vecteur $(S_n/n^{3/4}, (T_n - n\sigma^2)/\sqrt{n})$ converge en loi vers la mesure de probabilité de densité

$$(x, y) \mapsto \frac{\exp\left(-\frac{(\mu_4 + m_4\sigma^4)x^4}{12\sigma^8} - \frac{y^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)}\right)}{\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(\mu_4 + m_4\sigma^4)s^4}{12\sigma^8} - \frac{t^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)}\right) ds dt}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 .

Dans le cas du modèle donné par la loi $\tilde{\mu}_{n, \rho, g}^*$, nous remplaçons ψ_g par la fonction

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \frac{g(x)}{y} \mathbf{1}_{\Delta^*}(x, y) - \infty \mathbf{1}_{(\Delta^*)^c}(x, y)$$

dans ce qui précède. La seule différence est que, quand (x, y) tend vers $(0, \sigma^2)$,

$$I(x, y) - \psi_g(x, y) \sim \frac{(\mu_4 + m_4\sigma^6)x^4}{12\sigma^8} + \frac{(y - \sigma^2)^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)}.$$

Dans ce cas, sous $\tilde{\mu}_{n, \rho, g}^*$, le vecteur $(S_n/n^{3/4}, (T_n - n\sigma^2)/\sqrt{n})$ converge en loi vers la mesure de probabilité de densité

$$(x, y) \mapsto \frac{\exp\left(-\frac{(\mu_4 + m_4\sigma^6)x^4}{12\sigma^8} - \frac{y^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)}\right)}{\int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{(\mu_4 + m_4\sigma^6)s^4}{12\sigma^8} - \frac{t^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)}\right) ds dt}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . Nous en déduisons le théorème I.6.

c) Condition suffisante pour que ρ vérifie la condition de Cramér

Proposition VI.9. *Si ρ possède une composante absolument continue alors*

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|(s,t)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz+itz^2} d\rho(z) \right| < 1.$$

Démonstration. Supposons que $\rho = a\rho_{ac} + b\rho_d + c\rho_s$, où $a > 0$ et ρ_{ac} est une mesure de probabilité sur \mathbb{R} admettant une densité f . Nous ne pouvons pas appliquer la proposition VI.8 directement car ν_ρ n'admet pas de densité. Cependant, le lemme V.5 entraîne que, si $\nu_{\rho_{ac}}$ désigne la loi de (Z, Z^2) quand Z est une variable aléatoire de loi ρ_{ac} , alors $\nu_{\rho_{ac}}^{*2}$ admet la densité

$$f_2 : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2y-x^2}} f\left(\frac{x+\sqrt{2y-x^2}}{2}\right) f\left(\frac{x-\sqrt{2y-x^2}}{2}\right) \mathbb{1}_{x^2 < 2y}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^2 . Nous pouvons écrire $\rho^{*2} = a^2\rho_{ac}^{*2} + (1-a^2)\eta$, où η est la mesure de probabilité sur \mathbb{R}^2 définie par

$$\eta = \frac{1}{1-a^2} (b^2\rho_d^{*2} + c^2\rho_s^{*2} + 2ab\rho_{ac} * \rho_d + 2ac\rho_{ac} * \rho_s + 2bc\rho_d * \rho_s).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz+itz^2} d\rho(z) \right|^2 &= \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{is(x+y)+it(x^2+y^2)} d\rho(x) d\rho(y) \right|^2 \\ &\leq a^2 \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{is(x+y)+it(x^2+y^2)} d\rho_{ac}^{*2}(x, y) \right|^2 + (1-a^2) \left| \int_{\mathbb{R}^2} d\eta(x, y) \right|^2 \\ &\leq a^2 \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{isu+itv} d\nu_{\rho_{ac}}^{*2}(u, v) \right|^2 + 1 - a^2 \\ &= a^2 \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{isu+itv} f_2(u, v) du dv \right|^2 + 1 - a^2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sup_{\|(s,t)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz+itz^2} d\rho(z) \right|^2 \leq a^2 \sup_{\|(s,t)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{isu+itv} f_2(u, v) du dv \right|^2 + 1 - a^2.$$

La proposition VI.8 implique que le supremum dans le terme de droite de l'inégalité ci-dessus est strictement inférieur à 1. Nous en déduisons la proposition VI.9. \square

Chapitre VII

Convergence en loi de $S_n / (n^{1/4} \sqrt{T_n})$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$

Dans le but de prouver le théorème I.3 dans le cas général, S. R. Srinivasa Varadhan nous a suggéré d'étudier la convergence en loi de $S_n / (n^{1/4} \sqrt{T_n})$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, en utilisant la transformation de Hubbard-Stratonovich et une décomposition des variables aléatoires symétriques. Nous le remercions pour l'aide précieuse qu'il nous a apportée pour démontrer le théorème suivant :

Théorème VII.1. *Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0 et qui admet un moment d'ordre 5. Notons σ^2 la variance de ρ et μ_4 son moment d'ordre 4. Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$,*

$$\frac{S_n}{n^{1/4} \sqrt{T_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4\mu_4}{3\sigma^4} \right)^{1/4} \Gamma \left(\frac{1}{4} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{\mu_4}{12\sigma^4} s^4 \right) ds.$$

Il existe une littérature importante sur les sommes auto-normalisées (self-normalized sums) qui fournit des résultats précis sur les quotients du type $S_n / \sqrt{T_n}$ dans le cas indépendant (cf. par exemple [21] et [59]). Dans ce chapitre, nous montrons le théorème VII.1 sans aucun résultat préliminaire sur les sommes auto-normalisées :

Soit $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) est un n -uplet de loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}$. Rappelons que

$$\forall n \geq 1 \quad S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n \quad \text{et} \quad T_n = (X_n^1)^2 + \dots + (X_n^n)^2,$$

et que $T_n > 0$ presque sûrement. Nous allons utiliser la transformation de Hubbard-Stratonovich (comme dans le lemme 3.3 de [26]) : donnons-nous une variable aléatoire W de loi Normale centrée réduite et indépendante de $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$. Soient $n \geq 1$ et f une fonction continue bornée sur \mathbb{R} . Nous posons

$$E_n = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{W}{n^{1/4}} + \frac{S_n}{n^{1/4} \sqrt{T_n}} \right) \right].$$

Nous introduisons $(Y_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi ρ . Nous avons

$$E_n = \frac{1}{Z_n} \mathbb{E} \left[f \left(\frac{W}{n^{1/4}} + \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n^{1/4} \sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}} \right) \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(Y_1 + \dots + Y_n)^2}{Y_1^2 + \dots + Y_n^2} \right) \mathbb{1}_{\{Y_1^2 + \dots + Y_n^2 > 0\}} \right],$$

ou encore

$$E_n = \frac{1}{Z_n \sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{Y_1^2 + \dots + Y_n^2 > 0\}} \times \int_{\mathbb{R}} f \left(\frac{w}{n^{1/4}} + \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n^{1/4} \sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}} \right) \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(Y_1 + \dots + Y_n)^2}{Y_1^2 + \dots + Y_n^2} - \frac{w^2}{2} \right) dw \right].$$

Nous faisons le changement de variable

$$z = \frac{w}{n^{1/4}} + \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{n^{1/4} \sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}}$$

dans l'intégrale et nous obtenons

$$E_n = \frac{n^{1/4}}{Z_n \sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{Y_1^2 + \dots + Y_n^2 > 0\}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp \left(-\frac{\sqrt{n}z^2}{2} + zn^{1/4} \frac{Y_1 + \dots + Y_n}{\sqrt{Y_1^2 + \dots + Y_n^2}} \right) dz \right].$$

Notons ρ_+ la loi de $|Z|$ quand Z est une variable aléatoire de loi ρ . Nous utilisons à présent la représentation suivante : pour tout $i \geq 1$, nous écrivons $Y_i = \varepsilon_i U_i$, où ε_i et U_i sont deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$ et ρ_+ . Ainsi

$$E_n = \frac{n^{1/4}}{Z_n \sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{U_1^2 + \dots + U_n^2 > 0\}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp \left(-\frac{\sqrt{n}z^2}{2} + \sum_{i=1}^n \frac{zn^{1/4} \varepsilon_i U_i}{\sqrt{U_1^2 + \dots + U_n^2}} \right) dz \right].$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous posons (dans le cas où $U_1^2 + \dots + U_n^2 > 0$)

$$a_{i,n} = \frac{U_i}{\sqrt{U_1^2 + \dots + U_n^2}}.$$

En utilisant le théorème de Fubini et l'indépendance des $\varepsilon_i, U_i, i \geq 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{n^{1/4}}{Z_n \sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{U_1^2 + \dots + U_n^2 > 0\}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp \left(-\frac{\sqrt{n}z^2}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. \times \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n \exp \left(zn^{1/4} \varepsilon_i a_{i,n} \right) \middle| (U_1, \dots, U_n) \right) dz \right]. \\ &= \frac{n^{1/4}}{Z_n \sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{U_1^2 + \dots + U_n^2 > 0\}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp \left(-\frac{\sqrt{n}z^2}{2} + \sum_{i=1}^n \ln \operatorname{ch} (zn^{1/4} a_{i,n}) \right) dz \right]. \end{aligned}$$

Nous définissons la fonction g par

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad g(y) = \ln \operatorname{ch} y - \frac{y^2}{2}.$$

Nous montrons facilement que $g(y) < 0$ pour tout $y \neq 0$. En remarquant que $a_{1,n}^2 + \dots + a_{n,n}^2 = 1$, nous avons

$$E_n = \frac{n^{1/4}}{Z_n \sqrt{2\pi}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{U_1^2 + \dots + U_n^2 > 0\}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp \left(\sum_{i=1}^n g(zn^{1/4} a_{i,n}) \right) dz \right].$$

Nous allons maintenant appliquer la méthode de Laplace. Examinons la convergence du terme dans l'exponentielle : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la formule de Taylor-Lagrange nous assure l'existence d'une variable aléatoire réelle ξ_i telle que

$$g(zn^{1/4} a_{i,n}) = -\frac{(zn^{1/4} a_{i,n})^4}{12} + \frac{(zn^{1/4} a_{i,n})^5}{5!} g^{(5)}(\xi_i).$$

Un calcul simple nous permet de montrer que $g^{(5)}$ est uniformément bornée sur \mathbb{R} , si bien que

$$\sum_{i=1}^n g(zn^{1/4} a_{i,n}) = -\frac{z^4}{12} \frac{(Y_1^4 + \dots + Y_n^4)/n}{((Y_1^2 + \dots + Y_n^2)/n)^2} + z^5 \frac{(Y_1^5 + \dots + Y_n^5)/n}{((Y_1^2 + \dots + Y_n^2)/n)^{5/2}} O\left(\frac{1}{n^{1/4}}\right).$$

Par hypothèse, ρ admet un moment d'ordre 5 donc la loi forte des grands nombres entraîne que

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \sum_{i=1}^n g(zn^{1/4} a_{i,n}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\frac{\mu_4 z^4}{12\sigma^4} \quad \text{p.s.}$$

Lemme VII.2. *Il existe $c > 0$ tel que*

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq 1 \quad \sum_{i=1}^n g(zn^{1/4}a_{i,n}) \leq -\frac{cz^4}{1+z^2/\sqrt{n}}.$$

Démonstration. Nous définissons h par

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad h(y) = \frac{1+y^2}{y^4}g(y).$$

Il s'agit d'une fonction continue et strictement négative sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Puisque $g(y) \sim -y^4/12$ au voisinage de 0, nous en déduisons que h se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = -1/12$. Ensuite, en écrivant

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad h(y) = \frac{1+y^2}{y^2} \times \left(\frac{\ln \operatorname{ch} y}{y^2} - \frac{1}{2} \right),$$

nous voyons que $h(y)$ tend vers $-1/2$ quand $|y|$ tend vers $+\infty$. Par conséquent h est majorée par une certaine constante $-c$ avec $c > 0$. Ensuite nous vérifions aisément que la fonction $x \mapsto x^2/(1+x)$ est convexe sur $[0, +\infty[$ si bien que, pour tous $z \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n g(zn^{1/4}a_{i,n}) \leq -nc \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(zn^{1/4}a_{i,n})^4}{1+(zn^{1/4}a_{i,n})^2} \leq -nc \frac{(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (zn^{1/4}a_{i,n})^2)^2}{1+\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (zn^{1/4}a_{i,n})^2} = -\frac{cz^4}{1+z^2/\sqrt{n}},$$

puisque $a_{1,n}^2 + \dots + a_{n,n}^2 = 1$. □

Si $|z| \leq n^{1/4}$ alors $1+z^2/\sqrt{n} \leq 2$ et donc, d'après le lemme,

$$\left| \mathbb{1}_{\{U_1^2+\dots+U_n^2>0\}} \mathbb{1}_{|z|\leq n^{1/4}} f(z) \exp\left(\sum_{i=1}^n g(zn^{1/4}a_{i,n})\right) \right| \leq \|f\|_\infty \exp\left(-\frac{cz^4}{2}\right).$$

Puisque

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}} \|f\|_\infty \exp\left(-\frac{cz^4}{2}\right) dz \right] < +\infty,$$

le théorème de convergence dominée implique que

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{U_1^2+\dots+U_n^2>0\}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{|z|\leq n^{1/4}} f(z) \exp\left(\sum_{i=1}^n g(zn^{1/4}a_{i,n})\right) dz \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp\left(-\frac{\mu_4 z^4}{12\sigma^4}\right) dz.$$

Si $|z| > n^{1/4}$ alors $1+z^2/\sqrt{n} \leq 2z^2/\sqrt{n}$ et donc, d'après le lemme,

$$\left| \mathbb{1}_{\{U_1^2+\dots+U_n^2>0\}} \mathbb{1}_{|z|>n^{1/4}} f(z) \exp\left(\sum_{i=1}^n g(zn^{1/4}a_{i,n})\right) \right| \leq \|f\|_\infty \exp\left(-\frac{c\sqrt{n}z^2}{2}\right).$$

Ainsi

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{U_1^2+\dots+U_n^2>0\}} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{|z|>n^{1/4}} f(z) \exp\left(\sum_{i=1}^n g(zn^{1/4}a_{i,n})\right) dz \right] \leq \frac{\|f\|_\infty \sqrt{2\pi}}{n^{1/4} \sqrt{c}},$$

et donc

$$\mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{U_1^2+\dots+U_n^2>0\}} \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp\left(\sum_{i=1}^n g(zn^{1/4}a_{i,n})\right) dz \right] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} f(z) \exp\left(-\frac{\mu_4 z^2}{12\sigma^4}\right) dz.$$

En appliquant cela avec $f = 1$, nous obtenons

$$\frac{Z_n \sqrt{2\pi}}{n^{1/4}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\mu_4 z^4}{12\sigma^4}\right) dz.$$

Nous avons montré que

$$\frac{W}{n^{1/4}} + \frac{S_n}{n^{1/4}\sqrt{T_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\mu_4 z^4}{12\sigma^4}\right) dz \right)^{-1} \exp\left(-\frac{\mu_4}{12\sigma^4} s^4\right) ds.$$

Puisque $(Wn^{-1/4})_{n \geq 1}$ converge en loi vers 0, le lemme de Slutsky (théorème 3.9 de [8]) entraîne que

$$\frac{S_n}{n^{1/4}\sqrt{T_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp\left(-\frac{\mu_4 z^4}{12\sigma^4}\right) dz \right)^{-1} \exp\left(-\frac{\mu_4}{12\sigma^4} s^4\right) ds.$$

Ceci termine la preuve du théorème VII.1.

Notons que l'hypothèse que ρ admet un moment d'ordre 5 peut certainement être affaiblie en supposant plutôt que

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} |z|^{4+\varepsilon} d\rho(z) < +\infty.$$

Nous sommes à présent en mesure de montrer le cas général du théorème I.3 :

Démonstration du théorème I.3. Supposons que ρ est symétrique, non-dégénérée et que

$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{v_0 z^2} d\rho(z) < +\infty.$$

Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, T_n/n converge en probabilité vers σ^2 (cf. théorème I.2). De plus ρ admet des moments de tout ordre donc le théorème VII.1 et le lemme de Slutsky nous assurent que

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} = \sqrt{\frac{T_n}{n}} \times \frac{S_n}{n^{1/4}\sqrt{T_n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4\mu_4}{3\sigma^8}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{\mu_4}{12\sigma^8} s^4\right) ds.$$

Cette convergence en loi est équivalente à celle du théorème I.3. □

Remarque : l'existence de moments exponentiels pour ρ n'est qu'une hypothèse technique et nous pensons que le résultat du théorème I.3 devrait être vrai dès que $\rho \neq \delta_0$ est symétrique et possède un moment d'ordre 4. Par contre, nous avons vu dans le paragraphe 11.f) que l'hypothèse de symétrie est essentielle.

Chapitre VIII

Etude de la mesure empirique

Sommaire

19	Etude des mesures empiriques	121
	a) Mesure empirique associée au modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé	122
	b) Mesure empirique associée au modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC	124
20	Une inégalité pour l'entropie relative	125
21	Preuve de la convergence de M_n sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	126
	a) Prolongement de \mathcal{F} à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et inégalité $H(\cdot \rho) \geq \mathcal{F}$	126
	b) Semi-continuité supérieure de \mathcal{F} sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$	127
	c) Convergence en probabilité de M_n sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	131

Dans ce chapitre, nous étudions la convergence de la suite des mesures empiriques

$$M_n = \frac{1}{n} (\delta_{X_n^1} + \dots + \delta_{X_n^n}), \quad n \geq 1,$$

quand $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ est tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, avec ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0.

Dans le paragraphe 19, afin de poser le cadre d'étude de $(M_n)_{n \geq 1}$, nous regardons d'abord le cas du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé. Ensuite, dans le paragraphe 20, nous montrons une inégalité concernant l'entropie relative par rapport à une mesure symétrique. Il s'agit de l'ingrédient clé pour la preuve de la convergence en probabilité de $(M_n)_{n \geq 1}$ faisant l'objet du paragraphe 21.

19 Etude des mesures empiriques

Soit (E, d) un espace métrique séparable muni de sa tribu borélienne \mathcal{B}_E . Notons $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E et $C_b(E)$ l'ensemble des fonctions continues bornées sur E . Pour tous $\varepsilon > 0$ et $A \in \mathcal{B}_E$, nous notons A^ε l'ensemble

$$A^\varepsilon = \{x \in E : \exists y \in A \quad d(x, y) < \varepsilon\}.$$

L'application d_P , définie pour tout $(\nu, \mu) \in \mathcal{M}_1(E)^2$ par

$$d_P(\nu, \mu) = \inf \{ \varepsilon > 0 : \forall A \in \mathcal{B}_E \quad \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon \quad \text{et} \quad \nu(A) \leq \mu(A^\varepsilon) + \varepsilon \},$$

est une distance sur $\mathcal{M}_1(E)$, appelée distance de Prohorov. De plus elle coïncide avec la convergence étroite, c'est-à-dire, si ν et ν_n , $n \geq 1$, sont des mesures de probabilité sur E , alors

$$d_P(\nu_n, \nu) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad \iff \quad \forall f \in C_b(E) \quad \int_E f(z) d\nu_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_E f(z) d\nu(z).$$

Nous renvoyons par exemple au théorème 6.8 de [8] pour une preuve de ce résultat.

Pour $\rho \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et $n \geq 1$, nous notons $\tilde{\theta}_{n,\rho}$ la loi de

$$\frac{1}{n} (\delta_{Y_1} + \cdots + \delta_{Y_n}) \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$$

quand Y_1, \dots, Y_n sont n variables aléatoires indépendantes et de même loi ρ .

a) Mesure empirique associée au modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé

Soient $\beta > 0$ et ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . Etudions dans un premier temps la convergence de la suite des mesures empiriques

$$M_{n,\beta} = \frac{1}{n} (\delta_{X_n^1} + \cdots + \delta_{X_n^n}), \quad n \geq 1,$$

quand $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ est tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi

$$d\mu_{n,\rho,\beta}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n(\beta)} \exp\left(\frac{\beta(x_1 + \cdots + x_n)^2}{2n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i),$$

où $Z_n(\beta)$ est la constante de normalisation. Il s'agit du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé associé à ρ et à la température inverse $\beta > 0$. Les principaux résultats sur ce modèle sont rappelés dans le paragraphe 2.b).

Supposons que $\rho \neq \delta_0$ est symétrique, que son support est compact et qu'elle vérifie

$$\forall \lambda \neq 0 \quad \ln \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\rho(x) < \frac{\lambda^2}{2\beta}.$$

Nous définissons la fonction \mathcal{G}_β sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ par

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \quad \mathcal{G}_\beta = \frac{\beta}{2} \left(\int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) \right)^2.$$

Pour f continue bornée de $(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), d_P)$ dans \mathbb{R} , nous avons, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(M_{n,\beta})) &= \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n}}{n}\right) \frac{1}{Z_n(\beta)} \exp\left(\frac{\beta(x_1 + \cdots + x_n)^2}{2n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f\left(\frac{\delta_{x_1} + \cdots + \delta_{x_n}}{n}\right) \frac{1}{Z_n(\beta)} \exp\left(\frac{n\beta}{2} \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} z \delta_{x_i}(z)\right)^2\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) \end{aligned}$$

Le support de ρ est $[-L, L]$ pour un certain $L > 0$, si bien que l'intégrale ci-dessus est une intégrale sur l'ensemble

$$\left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n} \leq L^2 \right\} = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} z^2 \delta_{x_i}(z) \leq L^2 \right\}.$$

Nous introduisons alors

$$\mathcal{Y}_L = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z) \leq L^2 \right\}.$$

D'après le théorème 3.4 de [8], \mathcal{Y}_L est un sous-ensemble fermé de $(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), d_P)$ et il contient la mesure ρ . Il découle de la formule de transfert que, pour tout $n \geq 1$, la loi de $M_{n,\beta}$ sous $\mu_{n,\rho,\beta}$ est

$$\frac{1}{Z_n(\beta)} \exp(n\mathcal{G}_\beta(\mu)) \mathbb{1}_{\mathcal{Y}_L}(\mu) d\tilde{\theta}_{n,\rho}(\mu).$$

Le théorème de Sanov (théorème B.11 de l'annexe) nous assure que la suite $(\tilde{\theta}_{n,\rho})_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations sur $(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), d_P)$, de vitesse n et gouverné par la bonne fonction de taux $H(\cdot|\rho)$, l'entropie relative par rapport à ρ , définie par

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \quad H(\mu|\rho) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(z) \ln f(z) d\rho(z) & \text{si } \mu \ll \rho \text{ et } f = \frac{d\mu}{d\rho}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $d\mu/d\rho$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à ρ quand elle existe.

La fonction \mathcal{G}_β est bornée par $\beta L^2/2$ sur \mathcal{Y}_L . Montrons qu'elle y est continue : si $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est une suite du fermé \mathcal{Y}_L qui converge étroitement vers μ , alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \sup_{n \geq 1} \int_{|x| \geq \alpha} |x| d\mu_n(x) \leq \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1}{\alpha} \sup_{n \geq 1} \int_{|x| \geq \alpha} x^2 d\mu_n(x) \leq \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{L^2}{\alpha} = 0,$$

si bien que la suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable. Nous déduisons du théorème 3.5 de [8] que $\mathcal{G}_\beta(\mu_n)$ tend vers $\mathcal{G}_\beta(\mu)$ quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent la fonction \mathcal{G}_β est continue sur le fermé \mathcal{Y}_L au sens de la distance d_P .

Soit \mathcal{U} un ouvert de $(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), d_P)$ contenant ρ . Le lemme B.7 (variante du lemme de Varadhan) entraîne alors que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_{n,\rho,\beta} (M_{n,\beta} \in \mathcal{U}^c) &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\mathcal{U}^c \cap \mathcal{Y}_L} \exp(n\mathcal{G}_\beta(\mu)) d\tilde{\theta}_{n,\rho}(\mu) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(\beta) \\ &\leq \sup_{\mu \in \mathcal{U}^c \cap \mathcal{Y}_L} \{ \mathcal{G}_\beta(\mu) - H(\mu|\rho) \} - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(\beta). \end{aligned}$$

L'inégalité de Jensen nous assure que

$$\forall n \geq 1 \quad \frac{1}{n} \ln \int_{\mathcal{M}_1(\mathbb{R})} \exp(n\mathcal{G}_\beta(\mu)) d\tilde{\theta}_{n,\rho}(\mu) \geq \int_{\mathcal{M}_1(\mathbb{R})} \mathcal{G}_\beta(\mu) d\tilde{\theta}_{n,\rho}(\mu) \geq 0.$$

Ainsi

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(\beta) \geq 0.$$

Par conséquent

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_{n,\rho,\beta} (M_{n,\beta} \in \mathcal{U}^c) \leq \sup_{\mu \in \mathcal{U}^c \cap \mathcal{Y}_L} \{ \mathcal{G}_\beta(\mu) - H(\mu|\rho) \}.$$

Si $\mu = \rho$ alors $\mathcal{G}_\beta(\mu) = 0 = H(\mu|\rho)$. Supposons à présent que $\mu \neq \rho$. Si $\mathcal{G}_\beta(\mu) = 0$, alors $\mathcal{G}_\beta(\mu) < H(\mu|\rho)$ et, si μ est tel que $H(\mu|\rho) = +\infty$, alors $\mathcal{G}_\beta(\mu) \leq \beta L^2/2 < H(\mu|\rho)$. Supposons que

$$\int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad H(\mu|\rho) < +\infty.$$

Dans ce cas $\mu \ll \rho$ et nous posons $f = d\mu/d\rho$. Pour tout $\lambda \neq 0$, l'inégalité de Jensen nous assure que

$$\lambda \int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) - H(\mu|\rho) = \int_{\mathbb{R}} \ln \left(\frac{e^{\lambda z}}{f(z)} \right) d\mu(z) \leq \ln \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{\lambda z}}{f(z)} d\mu(z) = \ln \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda z} d\rho(z).$$

Par conséquent, si $\lambda = \beta \int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) \neq 0$, alors

$$\mathcal{G}_\beta(\mu) = \lambda \int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) - \frac{\lambda^2}{2\beta} < \lambda \int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda z} d\rho(z) \leq H(\mu|\rho).$$

Ainsi la fonction $\mathcal{G}_\beta - H(\cdot|\rho)$ admet un unique maximum en ρ . Le lemme V.2 entraîne alors que

$$\sup_{\mu \in \mathcal{U}^c \cap \mathcal{Y}_L} \{ \mathcal{G}_\beta(\mu) - H(\mu|\rho) \} < \mathcal{G}_\beta(\rho) - H(\rho|\rho) = 0.$$

Par conséquent il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que pour tout $n > n_0$,

$$\mu_{n,\rho,\beta}(M_{n,\beta} \in \mathcal{U}^c) \leq e^{-n\varepsilon}.$$

Ainsi, pour tout voisinage ouvert \mathcal{U} de ρ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{n,\rho,\beta}(M_{n,\beta} \in \mathcal{U}^c) = 0.$$

C'est-à-dire, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$, $M_{n,\beta}$ converge en probabilité vers ρ pour la distance d_P . Donnons-nous enfin $\varepsilon > 0$ et f une fonction continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . En appliquant ce qui précède à l'ouvert

$$\mathcal{U} = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \left| \int_{\mathbb{R}} f d\mu - \int_{\mathbb{R}} f d\rho \right| < \varepsilon \right\},$$

nous obtenons le théorème suivant :

Théorème VIII.1. *Soient $\beta > 0$ et ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0 et telle que son support est compact. Si*

$$\forall \lambda \neq 0 \quad \ln \int_{\mathbb{R}} e^{\lambda x} d\rho(x) < \frac{\lambda^2}{2\beta}$$

alors, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$, la suite des mesures empiriques $(M_{n,\beta})_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers ρ pour la distance d_P , c'est-à-dire, pour toute fonction f continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} ,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{n,\rho,\beta} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_n^k) - \int_{\mathbb{R}} f(z) d\rho(z) \right| \geq \varepsilon \right) = 0.$$

b) Mesure empirique associée au modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC

Supposons que ρ est symétrique et n'est pas la masse de Dirac en 0. Examinons maintenant la loi de

$$M_n = \frac{1}{n} (\delta_{X_n^1} + \cdots + \delta_{X_n^n})$$

sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$. Notons

$$\mathcal{Y} = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z) \in]0, +\infty[\right\}.$$

Remarquons que

$$\tilde{\theta}_{n,\rho} \left(\left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z) < +\infty \right\} \right) = 1.$$

Introduisons \mathcal{F} la fonction définie sur \mathcal{Y} par

$$\forall \mu \in \mathcal{Y} \quad \mathcal{F}(\mu) = \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) \right)^2}{2 \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z)}.$$

L'inégalité de Jensen nous assure que $\mathcal{F}(\mu) \leq 1/2$ pour tout $\mu \in \mathcal{Y}$, et il découle de la formule de transfert que :

Proposition VIII.2. *Pour tout $n \geq 1$, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, la loi de M_n est*

$$\frac{1}{Z_n} \exp(n\mathcal{F}(\mu)) \mathbb{1}_{\mathcal{Y}}(\mu) d\tilde{\theta}_{n,\rho}(\mu).$$

A l'image de ce que nous avons fait dans le paragraphe 19.a), nous allons montrer que, sous certaines conditions, la fonction $\mathcal{H}(\cdot|\rho) - \mathcal{F}$ admet un unique minimum sur \mathcal{Y} en ρ , et que la fonction \mathcal{F} est semi-continue supérieurement (si nous la prolongeons judicieusement à tout $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$). Nous allons obtenir le théorème I.4, dont la démonstration est donnée au paragraphe 21. Elle se base sur une inégalité remarquable entre les moments d'une mesure de probabilité μ et l'entropie relative de μ par rapport à une mesure de probabilité symétrique. La preuve de cette inégalité fait l'objet du paragraphe suivant.

20 Une inégalité pour l'entropie relative

Etant données deux mesures de probabilité sur \mathbb{R} , l'entropie relative (ou la divergence de Kullback-Leibler) de μ par rapport à ρ est

$$H(\mu|\rho) = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} f(z) \ln f(z) d\rho(z) & \text{si } \mu \ll \rho \text{ et } f = \frac{d\mu}{d\rho}, \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où $d\mu/d\rho$ désigne la dérivée de Radon-Nikodym de μ par rapport à ρ quand elle existe.

Théorème VIII.3. *Soient ρ et μ deux mesures de probabilité sur \mathbb{R} qui sont différentes de la masse de Dirac en 0. Supposons que*

$$\int_{\mathbb{R}} |z| d\mu(z) < +\infty.$$

Si ρ est symétrique alors

$$H(\mu|\rho) \geq \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) \right)^2}{2 \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z)},$$

avec égalité si et seulement si $\mu = \rho$.

Une caractéristique remarquable de cette inégalité est que la borne inférieure ne dépend pas de la mesure de probabilité symétrique ρ . Le lemme 3.10 de [10] présente le résultat suivant, en lien avec notre inégalité : si ρ est une mesure de probabilité quelconque sur \mathbb{R} dont le premier moment m existe et telle que

$$\exists v > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(\lambda(z - m)) d\rho(z) \leq \exp\left(\frac{v\lambda^2}{2}\right),$$

alors, pour toute mesure de probabilité μ sur \mathbb{R} ayant un moment d'ordre 1, nous avons

$$H(\mu|\rho) \geq \frac{1}{2v} \left(\int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) - m \right)^2.$$

Notre inégalité ne requiert aucune hypothèse d'intégrabilité. A la place nous supposons que ρ est symétrique.

Démonstration du théorème VIII.3. Supposons que $\rho \neq \delta_0$ est symétrique et que $\mu \neq \delta_0$ admet un moment d'ordre 1. Si $\mu = \rho$ alors $\mathcal{F}(\mu) = 0 = H(\mu|\rho)$. Supposons que $\mu \neq \rho$. Si le moment d'ordre 1 de μ est nul ou bien si son moment d'ordre 2 est infini, alors $\mathcal{F}(\mu) = 0 < H(\mu|\rho)$. Finalement, si μ est tel que $H(\mu|\rho) = +\infty$, alors $\mathcal{F}(\mu) \leq 1/2 < H(\mu|\rho)$. Supposons maintenant que $\mu \notin \{\delta_0, \rho\}$, $H(\mu|\rho) < +\infty$,

$$m_1(\mu) = \int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) \neq 0 \quad \text{et} \quad m_2(\mu) = \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z) < +\infty.$$

Comme $H(\mu|\rho) < +\infty$, nous avons que $\mu \ll \rho$ et nous notons $f = d\mu/d\rho$. Il découle de l'inégalité de Jensen que, pour toute fonction $\Phi \in L^1(\mu)$,

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi d\mu - H(\mu|\rho) = \int_{\mathbb{R}} \ln \left(\frac{e^\Phi}{f} \right) d\mu \leq \ln \int_{\mathbb{R}} \frac{e^\Phi}{f} d\mu = \ln \int_{\mathbb{R}} e^\Phi d\rho.$$

Par conséquent

$$\sup_{\Phi \in L^1(\mu)} \left\{ \int_{\mathbb{R}} \Phi d\mu - \ln \int_{\mathbb{R}} e^\Phi d\rho \right\} \leq H(\mu|\rho).$$

Afin de faire apparaître les moments d'ordre 1 et 2 de ρ , nous considérons des fonctions Φ de la forme $z \mapsto uz + vz^2$, $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Nous obtenons ainsi

$$I \left(\int_{\mathbb{R}} z d\mu(z), \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z) \right) \leq H(\mu|\rho),$$

où

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad I(x, y) = \sup_{(u, v) \in \mathbb{R}^2} \left\{ ux + vy - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{uz+uz^2} d\rho(z) \right\}.$$

D'après la proposition IV.12,

$$\forall (x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2 \quad I(x, y) > \frac{x^2}{2y}.$$

En appliquant cela à $x = m_1(\mu) \neq 0$ et $y = m_2(\mu) \neq 0$, nous obtenons $I(m_1(\mu), m_2(\mu)) > \mathcal{F}(\mu)$. Par conséquent $H(\mu|\rho) > \mathcal{F}(\mu)$ et la preuve est terminée.

21 Preuve de la convergence de M_n sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$

Nous commençons par prolonger la définition de \mathcal{F} , ainsi que l'inégalité $H(\cdot|\rho) \geq \mathcal{F}$, à tout $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Ensuite au paragraphe 21.b), nous montrons que \mathcal{F} est semi-continue supérieurement. Nous pourrions alors utiliser le théorème de Sanov et le lemme de Varadhan pour montrer la convergence de M_n sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ au paragraphe 21.c).

a) Prolongement de \mathcal{F} à $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ et inégalité $H(\cdot|\rho) \geq \mathcal{F}$

Le théorème VIII.3 implique que

$$\forall \mu \in \mathcal{Y} \quad H(\mu|\rho) \geq \mathcal{F}(\mu)$$

avec égalité si et seulement si $\mu = \rho$ (dans le cas où $\rho \in \mathcal{Y}$). Examinons à présent le comportement de $H(\mu|\rho)$ quand $\mu \notin \mathcal{Y}$, afin de savoir comment prolonger \mathcal{F} sur tout $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tout en préservant l'inégalité $H(\cdot|\rho) > \mathcal{F}$ ailleurs qu'en ρ .

Supposons que μ n'admette pas de moment d'ordre 2. Nous souhaitons attribuer une valeur à $\mathcal{F}(\mu)$ afin que \mathcal{F} soit une fonction semi-continue supérieurement (pour la distance de Prohorov d_P). Regardons un exemple : pour tout $n \geq 1$, notons ν_n la mesure de densité

$$f_n : y \mapsto \frac{n}{2\pi} \left(\frac{1}{1 + n^2(y-1)^2} + \frac{1}{1 + n^2(y+1)^2} \right),$$

qui vérifie $\int_{\mathbb{R}} z^2 d\nu_n(z) = +\infty$. La suite $(\nu_n)_{n \geq 1}$ converge étroitement vers $\nu = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$. De plus $\mathcal{F}(\nu) = 0$ et $(\mathcal{F}(\nu_n))_{n \geq 1}$ est une suite constante. Pour que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\nu_n) \leq \mathcal{F}(\nu) = 0,$$

il nous faut donc poser $\mathcal{F}(\mu) = 0$ quand $\int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z) = +\infty$. Dans ce cas nous conservons l'inégalité $H(\mu|\rho) > 0 = \mathcal{F}(\mu)$ si $\mu \neq \rho$.

Si le moment d'ordre 2 de μ est nul alors $\mu = \delta_0$ et $H(\delta_0|\rho) = -\ln \rho(\{0\})$. Regardons un exemple : la suite $(\delta_{1/n})_{n \geq 1}$ converge étroitement vers δ_0 et $\mathcal{F}(\delta_{1/n}) = 1/2$ pour tout $n \geq 1$, donc, pour que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\delta_{1/n}) \leq \mathcal{F}(\delta_0),$$

il nous faut poser $\mathcal{F}(\delta_0) = 1/2$. Dans ce cas,

$$H(\delta_0|\rho) - \mathcal{F}(\delta_0) > 0 \iff \rho(\{0\}) < e^{-1/2}.$$

Nous avons ainsi la proposition :

Proposition VIII.4. *Nous prolongeons \mathcal{F} à tout $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ en posant*

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \setminus \mathcal{Y} \quad \mathcal{F}(\mu) = \begin{cases} 1/2 & \text{si } \mu = \delta_0, \\ 0 & \text{si } \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z) = +\infty. \end{cases}$$

Si ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} telle que $\rho(\{0\}) < 1/\sqrt{e}$, alors la fonction $H(\cdot|\rho) - \mathcal{F}$ admet un unique minimum sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ en ρ .

Nous avons trouvé des conditions nécessaires pour que \mathcal{F} soit semi-continue supérieurement sur \mathcal{Y}^c . Nous allons montrer dans le paragraphe suivant que ces conditions sont suffisantes et que, ainsi prolongée, \mathcal{F} est semi-continue supérieurement sur tout $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.

b) Semi-continuité supérieure de \mathcal{F} sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$

Proposition VIII.5. *Soient μ et μ_n , $n \geq 1$, des mesures de probabilité sur \mathbb{R} . Supposons que $(\mu_n)_{n \geq 1}$ converge étroitement vers μ . Alors*

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) \leq \mathcal{F}(\mu).$$

C'est-à-dire que la fonction \mathcal{F} est semi-continue supérieurement sur $(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), d_P)$.

Commençons par quelques lemmes :

Lemme VIII.6. *Soient ν et ν_n , $n \geq 1$, des mesures de probabilité sur un espace métrique E telles que $(\nu_n)_{n \geq 1}$ converge étroitement vers ν . Si f est une fonction positive et continue de E dans \mathbb{R} alors*

$$\int_E f(z) d\nu(z) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f(z) d\nu_n(z).$$

Démonstration. Nous adaptons ici la preuve du théorème 3.4 de [8]. Comme f est une fonction positive, le théorème de Fubini entraîne que

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E) \quad \int_E f(z) d\mu(z) = \int_0^{+\infty} \mu(f^{-1}(]t, +\infty[)) dt.$$

Soit $t \geq 0$. La continuité de f entraîne que l'ensemble $f^{-1}(]t, +\infty[) = \{z \in E : f(z) \geq t\}$ est un ouvert de E . Le théorème de Portmanteau (théorème 2.1 de [8]) nous assure donc que

$$\nu(f^{-1}(]t, +\infty[)) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \nu_n(f^{-1}(]t, +\infty[))$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_E f(z) d\nu(z) &\leq \int_0^{+\infty} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \nu_n(f^{-1}(]t, +\infty[)) dt \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \nu_n(f^{-1}(]t, +\infty[)) dt = \liminf_{n \rightarrow +\infty} \int_E f(z) d\nu_n(z), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le lemme de Fatou. \square

Lemme VIII.7. Soit $(u_{n,p})_{n,p \geq 1}$ une suite double à valeurs dans \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Nous supposons que, pour tout $p \geq 1$, il existe $u_p \in \mathbb{R}^d$ tel que $u_{n,p}$ tend vers u_p quand n tend vers $+\infty$. Supposons aussi qu'il existe $u_\infty \in \mathbb{R}^d$ tel que u_p tend vers u_∞ quand p tend vers $+\infty$. Alors il existe une suite d'entiers $(p_n)_{n \geq 1}$ qui croît vers $+\infty$ et telle que

$$u_{n,p_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} u_\infty.$$

Démonstration. Pour tout $p \geq 1$, il existe $\varphi(p)$ tel que

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \|u_{\varphi(p)+k,p} - u_p\| \leq \frac{1}{2p}.$$

Nous supposons que $\varphi(1) > 1$ et que φ est strictement croissante de \mathbb{N} dans \mathbb{N} . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $p_\varepsilon \geq 1/\varepsilon$ tel que

$$\forall p \geq p_\varepsilon \quad \|u_p - u_\infty\| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Nous en déduisons que

$$\forall p \geq p_\varepsilon \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \|u_{\varphi(p)+k,p} - u_\infty\| \leq \varepsilon.$$

Pour tout $n \geq \varphi(1)$, posons

$$p_n = \min \{j \in \mathbb{N} : n < \varphi(j+1)\}.$$

Pour tout $n \geq \varphi(1)$, $p_{n+1} - p_n \in \{0, 1\}$ et $\varphi(p_n) \leq n < \varphi(p_n+1)$. En particulier la suite $(p_n)_{n \geq \varphi(1)}$ est croissante et, comme φ est strictement croissante, nous avons que p_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Posons $n_\varepsilon = \min\{n \geq 1 : p_n \geq p_\varepsilon\}$. Pour tout $n \geq n_\varepsilon$, nous avons $p_n \geq p_\varepsilon$ et $k_n = n - \varphi(p_n) \in \mathbb{N}$ donc

$$\|u_{n,p_n} - u_\infty\| = \|u_{\varphi(p_n)+k_n,p_n} - u_\infty\| \leq \varepsilon.$$

D'où la convergence annoncée. \square

Démonstration de la proposition VIII.5. Supposons que $\mu = \delta_0$. Comme \mathcal{F} est bornée par $1/2$, nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) \leq \frac{1}{2} = \mathcal{F}(\mu).$$

Supposons que $\mu \neq \delta_0$. Le lemme VIII.6 nous assure que, pour n assez grand, $\mu_n \neq \delta_0$. De plus, il existe une sous-suite $(\mu_{\varphi(n)})_{n \geq 1}$ telle que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_{\varphi(n)}).$$

Si il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu_{\varphi(n)}(z) = +\infty$ pour tout $n \geq n_0$, alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) = 0 \leq \mathcal{F}(\mu).$$

Sinon il existe une sous-suite $(\mu_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \geq 1}$ telle que $\int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu_{\varphi \circ \psi(n)}(z) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$, et alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} z d\mu_{\varphi \circ \psi(n)}(z) \right)^2}{2 \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu_{\varphi \circ \psi(n)}(z)}.$$

Pour simplifier les notations, nous noterons encore $(\mu_n)_{n \geq 1}$ au lieu de $(\mu_{\varphi \circ \psi(n)})_{n \geq 1}$ dans la suite.

Supposons d'abord que $\mu \in \mathcal{Y}$. Soit $(R_p)_{p \geq 1}$ une suite de réels positifs qui croît strictement vers $+\infty$ et telle que $\mu(\{R_p\}) = 0$ et $\mu(\{-R_p\}) = 0$ pour tout $p \geq 1$. Notons

$$\forall n, p \geq 1 \quad u_{n,p} = \left(\int_{[-R_p, R_p]} z d\mu_n(z), \int_{[-R_p, R_p]} z^2 d\mu_n(z) \right).$$

Les fonctions $z \mapsto z \mathbb{1}_{[-R_p, R_p]}(z)$ et $z \mapsto z^2 \mathbb{1}_{[-R_p, R_p]}(z)$ sont continues μ -presque partout donc le théorème 2.7 de [8] nous assure que

$$\forall p \geq 1 \quad u_p = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,p} = \left(\int_{[-R_p, R_p]} z d\mu(z), \int_{[-R_p, R_p]} z^2 d\mu(z) \right).$$

Enfin $\mu \in \mathcal{Y}$ donc, par convergence dominée, nous avons

$$u_\infty = \lim_{p \rightarrow +\infty} u_p = \left(\int_{\mathbb{R}} z d\mu(z), \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z) \right).$$

Le lemme VIII.7 entraîne l'existence d'une suite d'entiers $(p_n)_{n \geq 1}$ qui croît vers $+\infty$ et telle que

$$u_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n,p_n}.$$

Nous notons $K_n = R_{p_n}$ et $d\eta_n = \mathbb{1}_{[-K_n, K_n]^c} d\mu_n$ pour tout $n \geq 1$. Nous remarquons que $\eta_n(\mathbb{R})$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Posons

$$\forall n \geq 1 \quad A_n = \frac{\left(\left| \int_{[-K_n, K_n]} z d\mu_n(z) \right| + \int_{\mathbb{R}} |z| d\eta_n(z) \right)^2}{\int_{[-K_n, K_n]} z^2 d\mu_n(z) + \int_{\mathbb{R}} z^2 d\eta_n(z)}.$$

Nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) = \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\int_{[-K_n, K_n]} z d\mu_n(z) + \int_{\mathbb{R}} z d\eta_n(z) \right)^2}{\int_{[-K_n, K_n]} z^2 d\mu_n(z) + \int_{\mathbb{R}} z^2 d\eta_n(z)} \leq \frac{1}{2} \limsup_{n \rightarrow +\infty} A_n.$$

Quitte à extraire une sous-suite de $(A_n)_{n \geq 1}$, nous supposons que la limsup du membre de droite de cette inégalité est une limite. Nous observons alors trois cas :

- (A) : $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |z| d\eta_n(z) = +\infty$,
- (B) : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |z| d\eta_n(z) = 0$,
- (C) : $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |z| d\eta_n(z) = C > 0$.

Dans le cas (A), il existe $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |z| d\eta_{\tau(n)}(z) = +\infty$$

et donc

$$A_{\tau(n)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} |z| d\eta_{\tau(n)}(z) \right)^2}{\int_{\mathbb{R}} z^2 d\eta_{\tau(n)}(z)}.$$

De plus, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}} |z| d\eta_{\tau(n)}(z) \right)^2}{\int_{\mathbb{R}} z^2 d\eta_{\tau(n)}(z)} \leq \eta_{\tau(n)}(\mathbb{R}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Par conséquent

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) \leq \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{\tau(n)} = 0 \leq \mathcal{F}(\mu).$$

Dans le cas (B),

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\left| \int_{[-K_n, K_n]} z d\mu_n(z) \right| + \int_{\mathbb{R}} |z| d\eta_n(z) \right)^2}{\int_{[-K_n, K_n]} z^2 d\mu_n(z)} = \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} z d\mu(z) + 0 \right)^2}{\int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z)} = 2\mathcal{F}(\mu).$$

Ainsi

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) \leq \mathcal{F}(\mu).$$

Dans le cas (C), il existe $\tau : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} |z| d\eta_{\tau(n)}(z) = C.$$

De plus, pour n assez grand,

$$\int_{\mathbb{R}} z^2 d\eta_{\tau(n)}(z) \geq K_{\tau(n)} \int_{\mathbb{R}} |z| d\eta_{\tau(n)}(z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \infty.$$

Par conséquent $A_{\tau(n)}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) \leq \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow +\infty} A_{\tau(n)} = 0 \leq \mathcal{F}(\mu).$$

Nous avons donc montré que, si $\mu \in \mathcal{Y}$, alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) \leq \mathcal{F}(\mu).$$

Pour finir, supposons maintenant que $\int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu(z) = +\infty$. Le lemme VIII.6 nous assure que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu_n(z) = +\infty.$$

Rappelons que nous avons supposé, quitte à extraire des sous-suites, que $\int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu_n(z) < +\infty$ pour tout $n \geq 1$. Dans le cas où

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} z d\mu_n(z) \right| < +\infty,$$

nous obtenons que $\mathcal{F}(\mu_n)$ tend vers $0 = \mathcal{F}(\mu)$ quand n tend vers $+\infty$. Dans le cas contraire, nous supposons, quitte à extraire encore une fois une sous-suite, que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \int_{\mathbb{R}} z d\mu_n(z) \right| = +\infty.$$

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $R > 0$ tel que $\mu([-R, R]^c) \leq \varepsilon/2$, $\mu(\{R\}) = 0$ et $\mu(\{-R\}) = 0$. La convergence étroite de $(\mu_n)_{n \geq 1}$ vers μ nous assure alors qu'il existe $n_R > 0$ tel que

$$\forall n \geq n_R \quad \mu_n([-R, R]^c) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mu([-R, R]^c) \leq \varepsilon.$$

Pour $n \geq 1$, décomposons

$$\left| \int_{\mathbb{R}} z d\mu_n(z) \right| = \left| \int_{[-R, R]} z d\mu_n(z) \right| + \left| \int_{[-R, R]^c} z d\mu_n(z) \right| \leq R + \left| \int_{[-R, R]^c} z d\mu_n(z) \right|.$$

Nous en déduisons que

$$\frac{\left(\int_{\mathbb{R}} z d\mu_n(z) \right)^2}{\int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu_n(z)} \underset{+\infty}{\sim} \frac{\left(\int_{[-R, R]^c} z d\mu_n(z) \right)^2}{\int_{[-R, R]^c} z^2 d\mu_n(z)}.$$

Par conséquent, il existe $n_0 \geq n_R$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad \frac{\left(\int_{\mathbb{R}} z d\mu_n(z) \right)^2}{2 \int_{\mathbb{R}} z^2 d\mu_n(z)} \leq \frac{\left(\int_{[-R, R]^c} z d\mu_n(z) \right)^2}{\int_{[-R, R]^c} z^2 d\mu_n(z)} \leq \mu_n([-R, R]^c) \leq \varepsilon,$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ainsi

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{F}(\mu_n) \leq \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0, nous obtenons que $\mathcal{F}(\mu_n)$ tend vers $0 = \mathcal{F}(\mu)$ quand n tend vers $+\infty$. Ceci termine la preuve de la proposition. \square

c) Convergence en probabilité de M_n sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$

Le théorème de Sanov (théorème B.11 de l'annexe) nous assure que la suite $(\tilde{\theta}_{n,\rho})_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations sur $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, muni de la τ -topologie (et donc aussi muni de la distance d_p), de vitesse n et gouverné par la bonne fonction de taux $H(\cdot | \rho)$. Puisque $\{\delta_0\}^c$ est un ouvert de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, nous en déduisons que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_n \geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{\theta}_{n,\rho}(\{\delta_0\}^c) \geq - \inf_{\mu \neq \delta_0} H(\mu | \rho) = 0.$$

Supposons que ρ est symétrique avec $\rho(\{0\}) < 1/\sqrt{e}$. Soit \mathcal{U} un ouvert de $(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), d_P)$ contenant ρ . La proposition VIII.2 nous assure que

$$\forall n \geq 1 \quad \tilde{\mu}_{n,\rho}(M_n \in \mathcal{U}^c) = \frac{1}{Z_n} \int_{\mathcal{Y} \cap \mathcal{U}^c} e^{n\mathcal{F}(\mu)} d\tilde{\theta}_{n,\rho}(\mu) \leq \frac{1}{Z_n} \int_{\mathcal{U}^c} e^{n\mathcal{F}(\mu)} d\tilde{\theta}_{n,\rho}(\mu).$$

Il découle de la proposition VIII.5 que \mathcal{F} est semi-continue supérieurement sur $(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), d_P)$ et, de plus, elle est bornée. Par conséquent le lemme B.7 (variante du lemme de Varadhan) entraîne que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{\mu}_{n,\rho}(M_n \in \mathcal{U}^c) &\leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\mathcal{U}^c} e^{n\mathcal{F}(\mu)} d\tilde{\theta}_{n,\rho}(\mu) - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_n \\ &\leq \sup_{\mu \in \mathcal{U}^c} \{ \mathcal{F}(\mu) - H(\mu|\rho) \}. \end{aligned}$$

La proposition VIII.4 entraîne que la fonction $\mu \mapsto \mathcal{F}(\mu) - H(\mu|\rho)$ admet un unique maximum en ρ et le lemme V.2 nous assure alors que

$$\sup_{\mu \in \mathcal{U}^c} \{ \mathcal{F}(\mu) - H(\mu|\rho) \} < \mathcal{F}(\rho) = 0.$$

Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n > n_0$,

$$\tilde{\mu}_{n,\rho}(M_n \in \mathcal{U}^c) \leq e^{-n\varepsilon}.$$

Par conséquent, pour tout voisinage ouvert \mathcal{U} de ρ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{n,\rho}(M_n \in \mathcal{U}^c) = 0.$$

Nous avons montré le théorème suivant :

Théorème VIII.8. *Soit ρ une mesure de probabilité symétrique telle que $\rho(\{0\}) < 1/\sqrt{e}$. Sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, la suite des mesures empiriques M_n converge en probabilité vers ρ pour la distance d_P , c'est-à-dire,*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{n,\rho}(d_P(M_n, \rho) \geq \varepsilon) = 0.$$

Donnons-nous $\varepsilon > 0$ et f une fonction continue bornée de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . L'ensemble

$$\mathcal{U}_{\varepsilon,f} = \left\{ \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) : \left| \int_{\mathbb{R}} f d\mu - \int_{\mathbb{R}} f d\rho \right| < \varepsilon \right\}$$

est alors un ouvert de $(\mathcal{M}_1(\mathbb{R}), d_P)$ et nous avons ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{n,\rho} \left(\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(X_n^k) - \int_{\mathbb{R}} f(z) d\rho(z) \right| \geq \varepsilon \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{n,\rho}(M_n \in \mathcal{U}_{\varepsilon,f}^c) = 0.$$

Nous en déduisons le théorème I.4.

Notons qu'il n'y a aucune hypothèse d'existence de moments exponentiels de ρ , contrairement aux théorèmes I.2 et I.3. Par contre nous n'avons pas pu utiliser l'argument de conditionnement qui nous avait permis d'enlever l'hypothèse sur la masse de ρ en 0.

Chapitre IX

Généralisation à la dimension supérieure

Sommaire

22	Un premier modèle en dimension supérieure	134
a)	Définition d'un modèle	134
b)	Etude de $I - F$	135
c)	Conclusion	136
23	Modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé en dimension supérieure	137
a)	Définition	137
b)	Transformation de Hubbard-Stratonovich	137
c)	Théorèmes limites dans le cas où $\Sigma^{-1} - B$ est symétrique définie positive	140
d)	Théorèmes limites dans le cas où $B = \Sigma^{-1}$	142
24	Modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC en dimension supérieure	145
a)	Définition du modèle	145
b)	Grandes déviations pour $(S_n/n, T_n/n)$	147
c)	Minimum de $I - F$	148
d)	Convergence de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	150
25	Convergence en loi de $T_n^{-1/2} S_n/n^{1/4}$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$	152
a)	Enoncé	152
b)	Démonstration du théorème IX.15	153
c)	Fluctuations de S_n sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ en dimension $d \geq 2$	157

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié la loi

$$\frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}\right) \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i),$$

avec ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} . Nous souhaitons à présent généraliser ce modèle à des mesures de probabilité sur \mathbb{R}^d , pour $d \geq 2$, et étendre les théorèmes limites que nous avons montrés en dimension 1. Pour cela il nous faut tout d'abord modifier le terme d'interaction.

Dans le paragraphe 22, nous étudions un premier modèle en dimension supérieure mais nous montrons que les fluctuations qui lui sont associées n'ont pas le comportement attendu. Ensuite, dans le paragraphe 23, nous étudions le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé en dimension supérieure. Cela nous permet de comprendre (par analogie au cas unidimensionnel) comment modifier son terme d'interaction pour obtenir un modèle ne dépendant d'aucun paramètre et ayant des fluctuations critiques. Nous construisons ainsi un modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC en dimension supérieure, que nous étudions dans les paragraphes 24 (pour la loi des grands nombres) et 25 (pour les fluctuations).

22 Un premier modèle en dimension supérieure

a) Définition d'un modèle

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, notons $x(1), \dots, x(d)$ les coordonnées de x . Désignons par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^d . Afin de proposer une loi analogue mais pour une mesure ρ sur \mathbb{R}^d , $d \geq 1$, nous pouvons par exemple remplacer

$$(x_1 + \dots + x_n)^2 \quad \text{par} \quad \langle x_1 + \dots + x_n, x_1 + \dots + x_n \rangle$$

et

$$x_1^2 + \dots + x_n^2 \quad \text{par} \quad \langle x_1, x_1 \rangle + \dots + \langle x_n, x_n \rangle.$$

La convexité de $x \mapsto \langle x, x \rangle$ entraîne que

$$\frac{\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i \rangle}{\sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle} \leq n.$$

Nous nous donnons une mesure de probabilité ρ non-dégénérée sur \mathbb{R}^d (cf. paragraphe III.7). Nous regardons ainsi $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires dans \mathbb{R}^d tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ où

$$d\tilde{\mu}_{n,\rho}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i \rangle}{\sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle}\right) \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i),$$

avec

$$Z_n = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{\langle \sum_{i=1}^n x_i, \sum_{i=1}^n x_i \rangle}{\sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle}\right) \mathbb{1}_{\{\sum_{i=1}^n \langle x_i, x_i \rangle > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Posons $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ et $T_n = \langle X_n^1, X_n^1 \rangle + \dots + \langle X_n^n, X_n^n \rangle$.

A l'image de ce que nous avons fait dans le cas unidimensionnel, nous introduisons

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} : \langle x, x \rangle \leq y\} \quad \text{et} \quad \Delta^* = \Delta \setminus \{(0, \dots, 0, 0)\},$$

et nous définissons la fonction F sur Δ^* par

$$\forall (x, y) \in \Delta^* \quad F(x, y) = \frac{\langle x, x \rangle}{2y}.$$

Notons $\tilde{\nu}_{n,\rho}$ la loi de

$$\left(\frac{S_n}{n}, \frac{T_n}{n}\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i(1), \dots, Y_i(d), \langle Y_i, Y_i \rangle),$$

quand Y_1, \dots, Y_n sont indépendantes et de même loi ρ . La loi de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ est alors

$$\frac{\exp(nF(x, y)) \mathbb{1}_{\{(x,y) \in \Delta^*\}} d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y)}{\int_{\Delta^*} \exp(nF(s, t)) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(s, t)}.$$

Supposons que $(0, \dots, 0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$. Le théorème de Cramér (cf. théorème B.10 de l'annexe) entraîne que $(\tilde{\nu}_{n,\rho})_{n \geq 1}$ suit un principe de grandes déviations faible de vitesse n et gouverné par la fonction de taux

$$I : (x_1, \dots, x_n, y) \mapsto \sup_{u \in \mathbb{R}^d, v \in \mathbb{R}} (\langle x, u \rangle + yv - \Lambda(u, v)),$$

où Λ est la Log-Laplace de $(Z, \langle Z, Z \rangle)$ quand Z est une variable aléatoire de loi ρ . Elle est définie par

$$\forall u = (u_1, \dots, u_d) \in \mathbb{R}^d \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad \Lambda(u, v) = \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\langle u, z \rangle + v\|z\|^2) d\rho(z).$$

b) Etude de $I - F$

Supposons que ρ est symétrique et non-dégénérée sur \mathbb{R}^d . Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous avons

$$I(x, y) \geq \left\langle x, \frac{x}{y} \right\rangle + y \times \left(-\frac{\langle x, x \rangle}{2y^2} \right) - \Lambda \left(\frac{x}{y}, -\frac{\langle x, x \rangle}{2y^2} \right).$$

Ainsi

$$I(x, y) - \frac{\langle x, x \rangle}{2y} \geq -\Lambda \left(\frac{x}{y}, -\frac{\langle x, x \rangle}{2y^2} \right).$$

Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. En utilisant la symétrie de ρ , nous obtenons

$$\exp \Lambda(u, v) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\langle u, z \rangle + v\|z\|^2) d\rho(z) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\langle u, z \rangle + v\|z\|^2) d\rho(z),$$

si bien que

$$\begin{aligned} \exp \Lambda(u, v) &= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp(\langle u, z \rangle + v\|z\|^2) d\rho(z) + \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\langle u, z \rangle + v\|z\|^2) d\rho(z) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \operatorname{ch}(\langle u, z \rangle) \exp(v\|z\|^2) d\rho(z). \end{aligned}$$

Soit $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \exp \Lambda \left(\frac{x}{y}, -\frac{\langle x, x \rangle}{2y^2} \right) - 1 &= \int_{\mathbb{R}^d} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\langle x, z \rangle}{y} \right) \exp \left(-\frac{\|x\|^2 \|z\|^2}{2y^2} \right) - 1 \right) d\rho(z) \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \left(\operatorname{ch} \left(\frac{\|x\| \|z\|}{y} \right) \exp \left(-\frac{\|x\|^2 \|z\|^2}{2y^2} \right) - 1 \right) d\rho(z), \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la croissance de ch sur $[0, +\infty[$ à la dernière inégalité. Ainsi

$$\exp \Lambda \left(\frac{x}{y}, -\frac{\langle x, x \rangle}{2y^2} \right) - 1 \leq \int_{\mathbb{R}^d} \varphi \left(\frac{\|x\| \|z\|}{y} \right) d\rho(z),$$

où $\varphi(s) = \operatorname{ch}(s) \exp(-s^2/2) - 1$ pour tout $s \in \mathbb{R}$. La fonction φ est négative sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0 si bien que

$$\exp \Lambda \left(\frac{x}{y}, -\frac{\langle x, x \rangle}{2y^2} \right) - 1 \leq 0,$$

et, comme ρ est non-dégénérée, l'égalité a lieu si et seulement si $x = 0$. En passant au logarithme, nous obtenons

$$\forall x \neq 0 \quad I(x, y) - \frac{\langle x, x \rangle}{2y} > 0,$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$. Si $x = 0$ alors

$$I(x, y) - \frac{\langle x, x \rangle}{2y} = I(0, y).$$

Si nous faisons l'hypothèse que Λ est finie au voisinage de $(0, \dots, 0, 0)$ alors le point (d) de la proposition III.4 nous assure que $I(0, y) > 0$ pour $y \neq \sigma^2$, avec

$$\sigma^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \langle z, z \rangle d\rho(z).$$

Nous avons donc montré que $I - F$ admet un unique minimum sur Δ^* en $(0, \dots, 0, \sigma^2)$.

Regardons maintenant le développement de $I - F$ au voisinage de $(0, \dots, 0, \sigma^2)$ sous l'hypothèse que ρ est symétrique en chacune de ses coordonnées¹, c'est-à-dire, si $Z = (Z_1, \dots, Z_d)$ est un vecteur de loi ρ , alors le vecteur $(Z_1, \dots, Z_{i-1}, -Z_i, Z_{i+1}, \dots, Z_d)$ a la même loi que Z , pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. D'après le théorème III.16,

$$D_{(0, \dots, 0, \sigma^2)} I = (D_{(0, \dots, 0)} \Lambda)^{-1} = \Sigma^{-1},$$

où Σ est la matrice carrée diagonale de taille $d + 1$ telle que

$$\Sigma_{i,i} = \begin{cases} \sigma_i^2 = \int_{\mathbb{R}^d} z_i^2 d\rho(z) & \text{si } i \in \{1, \dots, d\}, \\ \mu_4 - \sigma^4 = \int_{\mathbb{R}^d} \langle z, z \rangle^2 d\rho(z) - \sigma^4 & \text{si } i = d + 1. \end{cases}$$

De plus nous avons, au voisinage de $(0, \dots, 0, \sigma^2)$,

$$F(x_1, \dots, x_d, y) = \sum_{i=1}^d \left(\frac{x_i^2}{2\sigma^2} + \frac{x_i^2(y - \sigma^2)^2}{2\sigma^4} \right) + o(\|x_1, \dots, x_d, y - \sigma^2\|^2)$$

et par conséquent, au voisinage de $(0, \dots, 0, \sigma^2)$,

$$(I - F)(x_1, \dots, x_d, y) = \sum_{i=1}^d \frac{x_i^2}{2} \left(\frac{1}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma^2} \right) + \frac{(y - \sigma^2)^2}{2(\mu_4 - \sigma^4)} + o(\|x_1, \dots, x_d, y - \sigma^2\|^2).$$

L'hypothèse de non-dégénérescence assure que Σ est inversible (cf. lemme III.7), si bien que $\sigma_i^2 \neq 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$. Puisque $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_d^2$, nous obtenons que $1/\sigma_i^2 > 1/\sigma^2$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$.

c) Conclusion

Nous savons que $I - F$ admet un unique minimum et nous connaissons son comportement au voisinage de ce minimum. Ainsi, comme dans le cas unidimensionnel, nous pouvons à présent appliquer le théorème VI.6 : si ρ est une mesure de probabilité centrée sur \mathbb{R}^d admettant une densité paire en chaque coordonnée et telle que Λ est steep (ce qui implique que $(0, \dots, 0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$ comme nous l'avons vu page 51) alors

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0, C),$$

où C est la matrice carrée diagonale de taille d telle que

$$\forall i \in \{1, \dots, d\} \quad C_{i,i} = \frac{1}{\sigma_i^2} - \frac{1}{\sigma^2}.$$

Il ne s'agit donc pas de la loi limite critique à laquelle on s'attend. Ceci suggère que ce n'est pas le bon modèle multidimensionnel. Il nous faut donc définir un autre modèle. Pour nous aider dans cette voie, nous étudions, dans le paragraphe suivant, un modèle d'Ising Curie-Weiss en dimension supérieure.

1. Insistons sur le fait que l'hypothèse « être symétrique en chacune de ses coordonnées » est plus forte que l'hypothèse « chaque coordonnée est symétrique ».

23 Modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé en dimension supérieure

a) Définition

Soit $d \geq 1$. Notons $\mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives de taille d . Pour toute matrice $A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$, l'application $x \mapsto \langle Ax, x \rangle$ est convexe sur \mathbb{R}^d donc

$$\forall n \geq 1 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n \quad \frac{\langle A(x_1 + \dots + x_n), (x_1 + \dots + x_n) \rangle}{n} \leq \sum_{i=1}^n \langle Ax_i, x_i \rangle.$$

Soit ρ une mesure de probabilité centrée sur \mathbb{R}^d et de matrice de covariance Σ inversible. Elle est alors non-dégénérée d'après le lemme III.7. Supposons que

$$\forall t \geq 0 \quad \int_{\mathbb{R}^d} \exp(t\|x\|^2) d\rho(x) < \infty.$$

Nous en déduisons que

$$\forall A \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R}) \quad Z_n(A) = \int_{(\mathbb{R}^d)^n} \exp\left(\frac{\langle A(x_1 + \dots + x_n), (x_1 + \dots + x_n) \rangle}{2n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) < +\infty.$$

Le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé en dimension d associé à ρ et à $B \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ est défini par un tableau triangulaire de variables aléatoires $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ à valeurs dans \mathbb{R}^d tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\mu_{n,\rho,B}$, où

$$d\mu_{n,\rho,B}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n(B)} \exp\left(\frac{\langle B(x_1 + \dots + x_n), (x_1 + \dots + x_n) \rangle}{2n}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Pour tout $n \geq 1$, nous posons $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$. La loi de S_n sous $\mu_{n,\rho,B}$ est

$$\frac{1}{Z_n(B)} \exp\left(\frac{1}{2n} \langle Bx, x \rangle\right) d\rho^{*n}(x).$$

b) Transformation de Hubbard-Stratonovich

Nous définissons la fonction ψ par

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \psi(x) = \frac{\langle Bx, x \rangle}{2} - \Lambda(Bx),$$

où Λ est la Log-Laplace de ρ définie par

$$\forall z \in \mathbb{R}^d \quad \Lambda(z) = \ln \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle z, x \rangle} d\rho(x).$$

La proposition suivante généralise la transformation de Hubbard-Stratonovich¹ (cf. le lemme 3.3 de [26]) en dimension supérieure :

1. La transformation de Hubbard-Stratonovich permet la linéarisation du terme quadratique dans l'Hamiltonien du modèle d'Ising Curie-Weiss. Elle repose sur l'égalité suivante :

$$\forall t > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \exp\left(\frac{tx^2}{2}\right) = \int_{\mathbb{R}} \exp\left(xu - \frac{u^2}{2t}\right) \frac{du}{\sqrt{2\pi t}}.$$

C'est un résultat classique sur la transformée de Laplace d'une Gaussienne.

Proposition IX.1. *Considérons $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ où (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\mu_{n,\rho,B}$. Si W est un vecteur gaussien indépendant centré et de matrice de covariance B^{-1} alors*

$$\forall \gamma > 0 \quad \frac{W}{n^{1/2-\gamma}} + \frac{S_n}{n^{1-\gamma}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-n\psi(xn^{-\gamma})) dx}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-n\psi(zn^{-\gamma})) dz}.$$

Démonstration. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue bornée, nous avons, sous $\mu_{n,\rho,B}$,

$$\begin{aligned} E_n &= \mathbb{E} \left(f \left(\frac{W}{n^{1/2-\gamma}} + \frac{S_n}{n^{1-\gamma}} \right) \right) = \mathbb{E} \left(f \left(\frac{\sqrt{n}W + S_n}{n^{1-\gamma}} \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{\det(B)}}{Z_n \sqrt{(2\pi n)^d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f \left(\frac{w+s}{n^{1-\gamma}} \right) \exp \left(\frac{\langle Bs, s \rangle}{2n} - \frac{\langle Bw, w \rangle}{2n} \right) d\rho^{*n}(s) dw \\ &= \frac{\sqrt{\det(B)}}{Z_n \sqrt{(2\pi n)^d}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} f \left(\frac{z}{n^{1-\gamma}} \right) \exp \left(\frac{\langle Bs, s \rangle}{2n} - \frac{\langle B(z-s), (z-s) \rangle}{2n} \right) d\rho^{*n}(s) dz, \end{aligned}$$

où nous avons effectué le changement de variable $(s, w) \mapsto (s, w+s)$. De plus, comme B est symétrique, nous avons

$$\forall (s, z) \in \mathbb{R}^{2d} \quad \langle Bs, s \rangle - \langle B(z-s), (z-s) \rangle = -\langle Bz, z \rangle + 2\langle Bz, s \rangle.$$

Par conséquent le théorème de Fubini entraîne que

$$E_n = \frac{\sqrt{\det(B)}}{Z_n \sqrt{(2\pi n)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} f \left(\frac{z}{n^{1-\gamma}} \right) \exp \left(-\frac{\langle Bz, z \rangle}{2n} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp \left(\frac{\langle Bz, s \rangle}{n} \right) d\rho^{*n}(s) \right) dz.$$

Ainsi

$$E_n = \frac{\sqrt{\det(B)}}{Z_n \sqrt{(2\pi n)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} f \left(\frac{z}{n^{1-\gamma}} \right) \exp \left(-\frac{\langle Bz, z \rangle}{2n} \right) \exp \left(n\Lambda \left(\frac{Bz}{n} \right) \right) dz.$$

Le changement de variable $x = zn^{\gamma-1}$ donne

$$E_n = \frac{n^{1-\gamma} \sqrt{\det(B)}}{Z_n \sqrt{(2\pi n)^d}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-n\psi(xn^{-\gamma})) dx.$$

Enfin, en prenant $f = 1$, nous évaluons le terme devant l'intégrale. Nous obtenons que

$$\mathbb{E} \left(f \left(\frac{W}{n^{1/2-\gamma}} + \frac{S_n}{n^{1-\gamma}} \right) \right) = \frac{\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \exp(-n\psi(xn^{-\gamma})) dx}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-n\psi(xn^{-\gamma})) dx}.$$

Ceci démontre la proposition. □

Nous donnons quelques propriétés de la fonction ψ dans le lemme suivant :

Lemme IX.2. *La fonction ψ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^d . De plus $\psi(z)$ tend vers $+\infty$ quand $\|z\|$ tend vers $+\infty$ et*

$$\forall n \geq 1 \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{-n\psi(z)} dz < +\infty.$$

Démonstration. Notre hypothèse entraîne que la fonction Λ est définie sur tout \mathbb{R}^d si bien qu'elle est de classe C^∞ . C'est donc aussi le cas de la fonction ψ . Notons $B^{1/2}$ la racine carrée de la matrice symétrique définie positive B (c'est-à-dire l'unique matrice de $\mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$ dont le carré est égal à la matrice B) et λ_1 la plus grande valeur propre de B . Soient $L > 0$ et $z \in \mathbb{R}^d$. Nous avons $\|Bz\| \leq \lambda_1 \|z\|$ et donc, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle Bz, x \rangle} d\rho(x) \right| &\leq \int_{\|x\| \leq L} e^{\lambda_1 \|z\| \|x\|} d\rho(x) + \int_{\|x\| > L} e^{\|B^{1/2}z\| \|B^{1/2}x\|} d\rho(x) \\ &\leq e^{L\lambda_1 \|z\|} + e^{\|B^{1/2}z\|^2/2} \int_{\|x\| > L} e^{\|B^{1/2}x\|^2/2} d\rho(x). \end{aligned}$$

Prenons $L = \sqrt{\|z\|}$:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle Bz, x \rangle} d\rho(x) \right| \leq e^{\|B^{1/2}z\|^2/2} \left(e^{\lambda_1 \|z\|^{3/2} - \|B^{1/2}z\|^2/2} + \int_{\|x\| > \sqrt{\|z\|}} e^{\|B^{1/2}x\|^2/2} d\rho(x) \right).$$

Ainsi

$$e^{-\|B^{1/2}z\|^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle Bz, x \rangle} d\rho(x) \xrightarrow{\|z\| \rightarrow +\infty} 0.$$

Nous en déduisons que

$$\psi(z) = -\ln \left(e^{-\|B^{1/2}z\|^2/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle Bz, x \rangle} d\rho(x) \right) \xrightarrow{\|z\| \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Ensuite si $n = 1$ alors, en utilisant le théorème de Fubini, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\psi(z)} dz &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle Bz, z \rangle/2} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle Bz, x \rangle} d\rho(x) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\langle B(z-x), (z-x) \rangle/2} e^{\langle Bx, x \rangle/2} d\rho(x) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle Bx, x \rangle/2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle B(z-x), (z-x) \rangle/2} dz \right) d\rho(x) \\ &= \sqrt{(2\pi)^d \det(B^{-1})} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\langle Bx, x \rangle/2} d\rho(x) < +\infty. \end{aligned}$$

Supposons que $n \geq 2$. Comme $\psi(z)$ tend vers $+\infty$ quand $\|z\|$ tend vers $+\infty$, il existe $a > 0$ tel que pour tout $\|x\| > a$, $\psi(x) \geq 0$ et donc $-n\psi(x) \leq -\psi(x)$. Et de plus ψ est continue sur \mathbb{R}^d donc elle est bornée sur la boule de centre 0 et de rayon a par un certain $M > 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-n\psi(z)} dz &\leq \int_{\|z\| \leq a} e^{-n\psi(z)} dz + \int_{\|z\| > a} e^{-\psi(z)} dz \\ &\leq \int_{\|z\| \leq a} e^{nM} dz + \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\psi(z)} dz < +\infty. \end{aligned}$$

Ceci montre le lemme. □

Nous faisons maintenant l'hypothèse suivante sur ρ :

$$\forall z \neq 0 \quad \int_{\mathbb{R}^d} \exp\langle z, x \rangle d\rho(x) < \exp\left(\frac{\langle B^{-1}z, z \rangle}{2}\right).$$

Cela est équivalent à dire que ψ admet un unique minimum en $0 \in \mathbb{R}^d$. La fonction ψ est de classe C^∞ et, au voisinage de 0,

$$\Lambda(z) = \frac{\langle \Sigma z, z \rangle}{2} + o(\|z\|^2)$$

donc

$$\begin{aligned}\psi(z) &= \frac{\langle Bz, z \rangle}{2} - \frac{\langle \Sigma Bz, Bz \rangle}{2} + o(\|z\|^2) \\ &= \frac{\langle Bz, z \rangle}{2} - \frac{\langle B\Sigma Bz, z \rangle}{2} + o(\|z\|^2) \\ &= \frac{\langle B(B^{-1} - \Sigma)Bz, z \rangle}{2} + o(\|z\|^2).\end{aligned}$$

La matrice $B^{-1} - \Sigma$ est symétrique donc il existe une matrice orthogonale P telle que

$$B^{-1} - \Sigma = {}^tPDP,$$

où D est une matrice diagonale dont la diagonale est formée des valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ de la matrice $B^{-1} - \Sigma$. Nous en déduisons qu'au voisinage de l'origine,

$$\psi(B^{-1}P^{-1}z) = \frac{1}{2}(\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_d z_d^2) + o(\|z\|^2).$$

Puisque $\psi(B^{-1}P^{-1}z) > 0$ dès que $z \neq 0$, nous en déduisons que les valeurs propres de $B^{-1} - \Sigma$ sont positives, si bien qu'il s'agit d'une matrice positive.

c) Théorèmes limites dans le cas où $\Sigma^{-1} - B$ est symétrique définie positive

Supposons que $\Sigma^{-1} - B$ est symétrique définie positive. Le lemme suivant assure que cette condition est équivalente à dire que $B^{-1} - \Sigma$ est symétrique définie positive.

Lemme IX.3. *Soient M et N deux matrices symétriques définies positives. Alors $M - N$ est définie positive si et seulement si $N^{-1} - M^{-1}$ est définie positive.*

Démonstration. Les matrices $M - N$ et $N^{-1} - M^{-1}$ sont symétriques et la relation $M^{-1}(M - N)N^{-1} = N^{-1} - M^{-1}$ entraîne que si l'une est inversible alors l'autre aussi. Il nous reste à montrer que si l'une est positive alors l'autre également. Supposons que $M - N$ est positive. Nous avons alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad 0 \leq \langle N(M^{-1}x), M^{-1}x \rangle \leq \langle M(M^{-1}x), M^{-1}x \rangle = \langle x, M^{-1}x \rangle.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$. Appliquons l'inégalité de Cauchy-Schwarz aux vecteurs $u = N^{-1}x$ et $v = M^{-1}x$ pour le produit scalaire $(u, v) \mapsto \langle Nu, v \rangle$, puis l'inégalité précédente :

$$\begin{aligned}\langle N(N^{-1}x), M^{-1}x \rangle^2 &\leq \langle N(N^{-1}x), N^{-1}x \rangle \times \langle N(M^{-1}x), M^{-1}x \rangle \\ &\leq \langle N(N^{-1}x), N^{-1}x \rangle \times \langle x, M^{-1}x \rangle,\end{aligned}$$

soit encore

$$\langle x, M^{-1}x \rangle^2 \leq \langle x, N^{-1}x \rangle \times \langle x, M^{-1}x \rangle.$$

En simplifiant par $\langle x, M^{-1}x \rangle > 0$, nous obtenons que

$$\langle x, (N^{-1} - M^{-1})x \rangle \geq 0.$$

Ainsi $N^{-1} - M^{-1}$ est symétrique positive. Nous obtenons la réciproque en remplaçant M par N^{-1} et N par M^{-1} dans la démonstration. \square

Nous avons le théorème suivant :

Théorème IX.4. Si $\Sigma^{-1} - B$ est inversible et ρ vérifie

$$\forall z \neq 0 \quad \int_{\mathbb{R}^d} \exp\langle z, x \rangle d\rho(x) < \exp\left(\frac{\langle B^{-1}z, z \rangle}{2}\right)$$

alors $\Sigma^{-1} - B$ est symétrique définie positive et, sous $\mu_{n,\rho,B}$,

$$\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}_d(0, (\Sigma^{-1} - B)^{-1}).$$

Démonstration. Le développement limité de ψ au voisinage de 0,

$$\psi(z) = \frac{\langle B(B^{-1} - \Sigma)Bz, z \rangle}{2} + o(\|z\|^2),$$

assure que

$$-n\psi\left(\frac{z}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\frac{\langle B(B^{-1} - \Sigma)Bz, z \rangle}{2}$$

et qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall z \in B_d(0, \delta) \quad -\psi(z) < -\frac{\langle B(B^{-1} - \Sigma)Bz, z \rangle}{4}.$$

Comme $B^{-1} - \Sigma$ est symétrique définie positive, l'exponentielle du terme de droite définit une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . Par conséquent, pour toute fonction h continue bornée de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , le théorème de convergence dominée implique que

$$A_n = \int_{\|z\| < \delta\sqrt{n}} h(z) \exp(-n\psi(z/\sqrt{n})) dz \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} h(z) \exp(-\langle B(B^{-1} - \Sigma)Bz, z \rangle/2) dz.$$

Pour $n \geq 1$, posons

$$B_n = \int_{\|z\| \geq \delta\sqrt{n}} h(z) \exp(-n\psi(z/\sqrt{n})) dz.$$

La fonction ψ est continue et $\psi(z)$ converge vers $+\infty$ quand $\|z\|$ tend vers $+\infty$ (cf. lemme IX.2), par conséquent

$$\varepsilon = \inf \{ \psi(x) : \|x\| \geq \delta \} > 0.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} B_n &\leq e^{-(n-1)\varepsilon} \|h\|_\infty \int_{\|z\| \geq \delta\sqrt{n}} \exp(-\psi(z/\sqrt{n})) dz \\ &\leq e^{-(n-1)\varepsilon} \|h\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\psi(z/\sqrt{n})) dz \\ &= e^{-(n-1)\varepsilon} \|h\|_\infty \sqrt{(2\pi n)^d \det(B^{-1})} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(\langle Bx, x \rangle/2) dx. \end{aligned}$$

Donc B_n converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et

$$A_n + B_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \int_{\mathbb{R}^d} h(z) \exp(-\langle B(B^{-1} - \Sigma)Bz, z \rangle/2) dz.$$

En prenant $h = 1$ nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-n\psi(x/\sqrt{n})) dx \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{\sqrt{(2\pi)^d}}{\det(B) \sqrt{\det(B^{-1} - \Sigma)}}.$$

Nous déduisons de la proposition IX.1 que, sous $\mu_{n,\rho,B}$, $W + S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers le vecteur gaussien de matrice de covariance $B^{-1}(B^{-1} - \Sigma)^{-1}B^{-1}$. Enfin, par indépendance de W et S_n sous $\mu_{n,\rho,B}$, nous avons, pour tout $u \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}\left(e^{i\langle u, W \rangle}\right) \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, S_n/\sqrt{n} \rangle}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, W + S_n/\sqrt{n} \rangle}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\langle B^{-1}(B^{-1} - \Sigma)^{-1}B^{-1}u, u \rangle}{2}\right).$$

Le vecteur W est gaussien de matrice de covariance B^{-1} donc

$$\mathbb{E}\left(e^{i\langle u, S_n/\sqrt{n} \rangle}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{\langle (B^{-1}(B^{-1} - \Sigma)^{-1}B^{-1} - B^{-1})u, u \rangle}{2}\right).$$

Enfin nous avons

$$\begin{aligned} B^{-1}(B^{-1} - \Sigma)^{-1}B^{-1} - B^{-1} &= B^{-1}((B^{-1} - \Sigma)^{-1}B^{-1} - I_d) \\ &= B^{-1}(B^{-1} - \Sigma)^{-1}(B^{-1} - (B^{-1} - \Sigma)) \\ &= (I_d - \Sigma B)^{-1}\Sigma \\ &= (\Sigma^{-1} - B)^{-1}. \end{aligned}$$

D'où le théorème. □

d) Théorèmes limites dans le cas où $B = \Sigma^{-1}$

Si maintenant $\Sigma^{-1} - B$ n'est pas définie alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\langle B(B^{-1} - \Sigma)Bz, z \rangle/2) dz = +\infty$$

et nous ne pouvons plus appliquer le théorème de convergence dominée dans la méthode de Laplace comme précédemment. Il s'agit donc de trouver une autre normalisation de S_n .

Si le rang r de $\Sigma^{-1} - B$ est strictement positif alors il existe une matrice orthogonale P et des valeurs propres strictement positives $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ telles qu'au voisinage de l'origine,

$$\psi(B^{-1}P^{-1}z) = \frac{1}{2}(\lambda_1 z_1^2 + \dots + \lambda_r z_r^2) + o(\|z\|^2).$$

Regardons la convergence de $S_n/n^{1-\alpha}$:

★ soit $\alpha < 1/2$ et alors

$$\exp\left(-n\psi\left(\frac{B^{-1}P^{-1}z}{n^\alpha}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc, si nous pouvons appliquer le théorème de convergence dominée, cela nous conduira à une convergence en loi vers δ_0 . Ce n'est donc pas une bonne normalisation.

★ soit $\alpha > 1/2$ et alors

$$\exp\left(-n\psi\left(\frac{B^{-1}P^{-1}z}{n^\alpha}\right)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$$

et ne pouvons pas appliquer le théorème de convergence dominée (car cela reviendrait à pouvoir intégrer 1).

Par conséquent nous n'aurons pas de théorème de convergence intéressant sauf si nous renormalisons chaque coordonnée de façon différente. Mais, dans ce cas, nous ne pouvons plus utiliser la transformation de Hubbard-Stratonovich. Supposons donc que $r = 0$, c'est-à-dire $B = \Sigma^{-1}$. Il nous faut pousser le développement limité de ψ à un ordre supérieur.

Lemme IX.5. Si ρ est symétrique sur \mathbb{R}^d alors

$$\forall (i, j, k, l) \in \{1, \dots, d\}^4 \quad \frac{\partial^3 \Lambda}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k}(0) = 0$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \Lambda}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k \partial z_l}(0) &= \int_{\mathbb{R}^d} y_i y_j y_k y_l d\rho(y) - \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_i y_j d\rho(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_k y_l d\rho(y) \right) \\ &\quad - \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_i y_k d\rho(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_j y_l d\rho(y) \right) - \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_i y_l d\rho(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_j y_k d\rho(y) \right). \end{aligned}$$

Démonstration. Si ρ est symétrique sur \mathbb{R}^d , alors

$$\forall (i, j, k, l) \in \{1, \dots, d\}^4 \quad \int_{\mathbb{R}^d} y_i d\rho(y) = \int_{\mathbb{R}^d} y_j y_k y_l d\rho(y) = 0.$$

La démonstration de ce lemme est alors immédiate en dérivant successivement Λ et en évaluant en 0. \square

Pour tout $(i, j, k, l) \in \{1, \dots, d\}^4$, notons

$$a_{i,j,k,l} = -\frac{\partial^4 \Lambda}{\partial z_i \partial z_j \partial z_k \partial z_l}(0).$$

Posons

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \sum_i \frac{a_{i,i,i,i}}{24} z_i^4 + \sum_{j \neq i} \frac{a_{i,i,i,j}}{6} z_i^3 z_j + \sum_{i,j \neq i, k \neq i, k < j} \frac{a_{i,i,j,k}}{2} z_i^2 z_j z_k \\ &\quad + \sum_{i < j} \frac{a_{i,i,j,j}}{4} z_i^2 z_j^2 + \sum_{i < j < k < l} a_{i,j,k,l} z_i z_j z_k z_l. \end{aligned}$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème IX.6. Supposons que ρ est symétrique et que $z \mapsto \|z\|^4/|\varphi(z)|$ est bornée au voisinage de l'origine. Si $B = \Sigma^{-1}$ et

$$\forall z \neq 0 \quad \int_{\mathbb{R}^d} \exp\langle z, x \rangle d\rho(x) < \exp\left(\frac{\langle B^{-1}z, z \rangle}{2}\right)$$

alors, sous $\mu_{n,\rho,B}$,

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\varphi(\Sigma^{-1}x)) dx}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\varphi(\Sigma^{-1}s)) ds}.$$

Démonstration. Si ρ est symétrique alors, au voisinage de 0,

$$\psi(z) = \varphi(\Sigma^{-1}z) + o(\|z\|^4).$$

Par hypothèse $z \mapsto \|z\|^4/|\varphi(\Sigma^{-1}z)|$ est bornée au voisinage de 0, donc $\psi(z) \sim \varphi(\Sigma^{-1}z)$ au voisinage de 0. Ainsi

$$\forall z \in \mathbb{R}^d \quad -n\psi\left(\frac{z}{n^{1/4}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\varphi(\Sigma^{-1}z)$$

et il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall z \in B_\delta \quad -\psi(s) < -\varphi(\Sigma^{-1}z)/2,$$

où B_δ désigne la boule dans \mathbb{R}^d de centre 0 et de rayon δ . Quitte à diminuer δ , nous pouvons supposer que $z \mapsto \varphi(\Sigma^{-1}z)$ est positive sur B_δ . Nous avons supposé qu'il existe $M > 0$ tel que

$$\forall z \in B_\delta \quad \varphi(\Sigma^{-1}z) = |\varphi(\Sigma^{-1}z)| \geq \frac{\|z\|^4}{M} = \frac{(z_1^2 + \dots + z_d^2)^2}{M} \geq \frac{z_1^4 + \dots + z_d^4}{M}.$$

Donc

$$\forall z \in B_\delta \quad \exp\left(-n\psi\left(\frac{z}{n^{1/4}}\right)\right) < \exp\left(-\frac{z_1^4 + \dots + z_d^4}{2M}\right).$$

Le terme de droite définit une fonction intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d donc, pour toute fonction h continue bornée de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} , le théorème de convergence dominée implique que

$$A_n = \int_{\|z\| < \delta n^{1/4}} h(z) \exp(-n\psi(z/n^{1/4})) dz \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} h(z) \exp(-\varphi(\Sigma^{-1}z)) dz.$$

Pour $n \geq 1$, posons

$$B_n = \int_{\|x\| \geq \delta n^{1/4}} h(z) \exp(-n\psi(z/n^{1/4})) dz.$$

Comme au paragraphe précédent, nous montrons que B_n converge vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Par conséquent

$$A_n + B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} h(z) \exp(-\varphi(\Sigma^{-1}z)) dz.$$

En prenant $h = 1$ nous obtenons

$$\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-n\psi(xn^{-\gamma})) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\varphi(\Sigma^{-1}z)) dz.$$

Nous déduisons de la proposition IX.1 que, sous $\mu_{n,\rho,\Sigma^{-1}}$, $W/n^{1/4} + S_n/n^{3/4}$ converge en loi vers la loi de densité

$$x \mapsto \frac{\exp(-\varphi(\Sigma^{-1}x))}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp(-\varphi(\Sigma^{-1}s)) ds}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d . Enfin, par indépendance de W et S_n , nous avons

$$\forall u \in \mathbb{R}^d \quad \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, W/n^{1/4} \rangle}\right) \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, S_n/n^{3/4} \rangle}\right) = \mathbb{E}\left(e^{i\langle u, W/n^{1/4} + S_n/n^{3/4} \rangle}\right).$$

Le théorème découle alors du fait que $\mathbb{E}\left(e^{i\langle u, W/n^{1/4} \rangle}\right)$ tend vers 1 quand n tend vers 0. \square

Discutons des hypothèses du théorème. Si ρ est symétrique en chacune de ses coordonnées, alors

$$\forall z \in \mathbb{R}^d \quad \varphi(z) = \frac{1}{24} \langle M_4 z^2, z^2 \rangle,$$

où z^2 désigne le vecteur (z_1^2, \dots, z_d^2) pour tout $z \in \mathbb{R}^d$ et, pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, d\}^2$,

$$(M_4)_{i,j} = \begin{cases} 3 \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_i^2 d\rho(y) \right)^2 - \int_{\mathbb{R}^d} y_i^4 d\rho(y) & \text{si } i = j, \\ \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_i^2 d\rho(y) \right) \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_j^2 d\rho(y) \right) - \int_{\mathbb{R}^d} y_i^2 y_j^2 d\rho(y) & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Si M_4 est définie positive alors, pour tout $z \in \mathbb{R}^d$,

$$\|z\|^4 \leq d \|z^2\|^2 \leq d \|M_4^{-1/2}\|^2 \|M_4^{1/2} z^2\|^2 = d \|M_4^{-1/2}\|^2 \varphi(z).$$

Ainsi $z \mapsto \|z\|^4 / |\varphi(z)|$ est bornée au voisinage de l'origine.

24 Modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC en dimension supérieure

Soit $d \geq 1$ et soit ρ une mesure de probabilité centrée sur \mathbb{R}^d dont la matrice de covariance

$$\Sigma = \int_{\mathbb{R}^d} x {}^t x d\rho(x)$$

est bien définie. Supposons que ρ est non-dégénérée sur \mathbb{R}^d , ce qui équivaut à supposer que Σ est symétrique définie positive. Soient X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi ρ . Notons

$$\forall n \geq 1 \quad \widehat{\Sigma}_n = X_n^1 {}^t(X_n^1) + \dots + X_n^n {}^t(X_n^n).$$

Alors la loi des grands nombres entraîne que

$$\frac{\widehat{\Sigma}_n}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \Sigma.$$

L'ensemble des matrices symétriques définies positives est un ouvert de l'ensemble des matrices. Par conséquent, presque sûrement, pour n assez grand $\widehat{\Sigma}_n$ est inversible et

$$n \widehat{\Sigma}_n^{-1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{p.s.}} \Sigma^{-1}.$$

Ainsi, à l'image de ce que nous avons fait pour $d = 1$, et compte-tenu du paragraphe 23, nous sommes amenés à considérer le modèle suivant :

a) Définition du modèle

Soit $(X_n^k)_{n \geq d, 1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire de variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R}^d tel que pour tout $n \geq d$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, la mesure de probabilité dans $(\mathbb{R}^d)^n$ de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{1}{2} \left\langle \left(\sum_{i=1}^n x_i {}^t x_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right), \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \right\rangle \right)$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$ sur l'ensemble

$$D_n^+ = \left\{ (x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n : \det \left(\sum_{i=1}^n x_i {}^t x_i \right) > 0 \right\},$$

où

$$Z_n = \int_{D_n^+} \exp \left(\frac{1}{2} \left\langle \left(\sum_{i=1}^n x_i {}^t x_i \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right), \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \right\rangle \right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Pour tout $n \geq d$, nous posons $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n \in \mathbb{R}^d$ et

$$T_n = X_n^1 {}^t(X_n^1) + \dots + X_n^n {}^t(X_n^n).$$

Avant d'aller plus loin, montrons que notre modèle est bien défini, c'est-à-dire que, pour $n \geq d$, Z_n est fini et strictement positive. Pour cela nous avons le lemme suivant :

Lemme IX.7. *Soit $n \geq 1$ et soient x_1, \dots, x_n des vecteurs de \mathbb{R}^d . Notons*

$$A_n = x_1 {}^t x_1 + \dots + x_n {}^t x_n.$$

★ Si $n < d$ alors A_n n'est pas inversible.

★ Si $n = d$ alors A_n est inversible si et seulement si les vecteurs x_1, \dots, x_n engendrent \mathbb{R}^d .

★ Si $n > d$ et si, parmi les n vecteurs x_1, \dots, x_n , il y a d vecteurs qui forment une base de \mathbb{R}^d alors A_n est inversible.

Démonstration. \star Supposons que $n \leq d$. Si $n < d$ nous posons $x_{n+1} = \dots = x_d = 0$. Notons B la matrice carrée de taille d dont les vecteurs colonnes sont x_1, \dots, x_d . Nous avons alors, pour tout $1 \leq k, l \leq d$,

$$(B^t B)_{k,l} = \sum_{i=1}^d B_{k,i} B_{l,i} = \sum_{i=1}^d x_i(k) x_i(l) = \sum_{i=1}^d (x_i^t x_i)_{k,l} = (A_n)_{k,l}.$$

Il s'ensuit que $A_n = B^t B$ et donc A_n est inversible si et seulement si B est inversible. Par conséquent A_n est inversible si et seulement si les vecteurs x_1, \dots, x_d forment une base de \mathbb{R}^d . Dans le cas où $n < d$, B a au moins une colonne nulle donc n'est pas inversible.

\star Supposons que $n > d$ et que les vecteurs x_1, \dots, x_n engendrent \mathbb{R}^d . Alors il est possible d'en extraire une base x_1, \dots, x_d et, d'après le cas précédent, A_n est la somme d'une matrice symétrique définie positive et de $n - d$ autres matrices symétriques positives. Il s'ensuit que la matrice A_n est définie et donc inversible. \square

Soit $n \geq d$. La non-dégénérescence de ρ implique que son support n'est pas inclus dans un hyperplan de \mathbb{R}^d . Par conséquent

$$\rho^{\otimes n}(\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n : (x_1, \dots, x_d) \text{ is a basis of } \mathbb{R}^d\}) > 0.$$

Le lemme précédent nous assure alors que

$$\rho^{\otimes n}(\{(x_1, \dots, x_n) \in (\mathbb{R}^d)^n : x_1^t x_1 + \dots + x_n^t x_n \text{ is invertible}\}) > 0,$$

c'est-à-dire $\rho^{\otimes n}(D_n^+) > 0$. Ainsi $Z_n > 0$.

Notons $\mathcal{S}_d^+(\mathbb{R})$ (respectivement $\mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques positives (respectivement définies positives) de taille d . Posons

$$\Delta^* = \{(x, M) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R}) : \langle M^{-1}x, x \rangle \leq 1\}.$$

Le lemme et le corollaire suivant nous assurent que $Z_n < +\infty$, puisque le terme dans l'exponentielle est alors borné par $n/2$.

Lemme IX.8. *Soit ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d dont la matrice de covariance est bien définie. Notons*

$$m = \int_{\mathbb{R}^d} z d\nu(z) \quad \text{et} \quad S = \int_{\mathbb{R}^d} z^t z d\nu(z).$$

La matrice S est symétrique positive et, si elle est définie, alors

$$\langle S^{-1}m, m \rangle \leq 1.$$

De plus si ν est non-dégénérée sur \mathbb{R}^d alors l'inégalité est stricte.

Démonstration. Le vecteur m est la moyenne de la mesure ν et $S - m^t m$ est sa matrice de covariance. Elle est donc symétrique positive. Par conséquent

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \langle m, x \rangle^2 = \langle m^t m x, x \rangle \leq \langle Sx, x \rangle.$$

Supposons que S est définie, donc inversible. En appliquant cette inégalité à $x = S^{-1}m$, nous obtenons

$$\langle m, S^{-1}m \rangle^2 \leq \langle m, S^{-1}m \rangle.$$

Si $m = 0$ alors $\langle S^{-1}m, m \rangle = 0 \leq 1$. Sinon, comme S est symétrique définie positive, nous avons $\langle m, S^{-1}m \rangle > 0$ d'où $\langle S^{-1}m, m \rangle \leq 1$. Enfin, dans le cas où ν est non-dégénérée, la matrice $S - m^t m$ est symétrique définie positive. Par conséquent S est inversible et toutes les inégalités ci-dessus sont strictes sauf quand $m = 0$. Mais, si $m = 0$, alors $\langle S^{-1}m, m \rangle = 0 < 1$. D'où le lemme. \square

Corollaire IX.9. Soit $n \geq d$. Pour tous vecteurs x_1, \dots, x_n de \mathbb{R}^d , la matrice

$$x_1 {}^t x_1 + \dots + x_n {}^t x_n$$

est symétrique positive. Si elle est définie alors nous avons

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \frac{x_1 {}^t x_1 + \dots + x_n {}^t x_n}{n} \right) \in \Delta^*.$$

Démonstration. Posons

$$\nu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{x_i}.$$

Il s'agit d'une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d qui vérifie

$$\int_{\mathbb{R}^d} z \, d\nu(z) = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}^d} z {}^t z \, d\nu(z) = \frac{x_1 {}^t x_1 + \dots + x_n {}^t x_n}{n}.$$

Nous obtenons alors le résultat en appliquant le lemme précédent à ν . \square

b) Grandes déviations pour $(S_n/n, T_n/n)$

A l'image de ce que nous avons fait dans le cas unidimensionnel, nous posons

$$F : (x, M) \in \Delta^* \mapsto \frac{\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}.$$

Et, d'après le corollaire IX.9, nous avons alors que, pour $n \geq d$, la loi de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ est

$$\frac{\exp(nF(x, M)) \mathbb{1}_{\{(x, M) \in \Delta^*\}} \, d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M)}{\int_{\Delta^*} \exp(nF(s, N)) \, d\tilde{\nu}_{n,\rho}(s, N)},$$

où $\tilde{\nu}_{n,\rho}$ est la loi de

$$\left(\frac{S_n}{n}, \frac{T_n}{n} \right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i, Y_i {}^t Y_i)$$

quand Y_1, \dots, Y_n sont indépendantes et de même loi ρ .

Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$, que l'on notera $\langle \cdot | \cdot \rangle$, est défini par l'application

$$((x, M), (y, N)) \mapsto \sum_{i=1}^d x_i y_i + \text{tr}(M {}^t N) = \sum_{i=1}^d x_i y_i + \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d m_{i,j} n_{i,j}.$$

Remarquons que

$$\forall z \in \mathbb{R}^d \quad \forall A \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R}) \quad \text{tr}(z {}^t z {}^t A) = \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d z_i z_j a_{i,j} = \langle Az, z \rangle.$$

Notons ν_ρ la loi de $(Z, Z {}^t Z)$ quand Z est une variable aléatoire de loi ρ . Nous définissons Λ sa Log-Laplace par

$$\begin{aligned} \forall (u, A) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d(\mathbb{R}) \quad \Lambda(u, A) &= \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp \langle (u, A) | (z, z {}^t z) \rangle \, d\rho(z) \\ &= \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp (\langle u, z \rangle + \langle Az, z \rangle) \, d\rho(z), \end{aligned}$$

et sa transformée de Cramér I par

$$\forall (x, M) \in \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d(\mathbb{R}) \quad I(x, M) = \sup_{u \in \mathbb{R}^d, A \in \mathcal{S}_d(\mathbb{R})} (\langle (x, M) | (u, A) \rangle - \Lambda(u, A)).$$

Notons D_Λ et D_I les domaines de $\mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ sur lesquels les fonctions Λ et I sont respectivement finies. Toutes ces définitions généralisent celles du cas $d = 1$ que nous avons traité dans les chapitres précédents.

Notons O_d la matrice carrée de taille d dont tous les coefficients sont nuls. Supposons que $(0, \dots, 0, O_d)$ appartient à l'intérieur de $\overset{\circ}{D}_\Lambda$. Le théorème de Cramér (cf. théorème B.10 de l'annexe) entraîne que $(\tilde{\nu}_{n,\rho})_{n \geq 1}$ suit un principe de grandes déviations de vitesse n et gouverné par la bonne fonction de taux I . Si ν_ρ est non-dégénérée alors le théorème III.16 assure que I est de classe C^∞ sur son domaine admissible A_I , l'image de $\overset{\circ}{D}_\Lambda$ par l'application différentielle de Λ . De plus $A_I \subset \overset{\circ}{D}_I = \overset{\circ}{C}_\rho$, où $\overset{\circ}{C}_\rho$ est l'adhérence de l'enveloppe convexe de

$$\{(x, x^t x) : x \text{ est dans le support de } \rho\}.$$

c) Minimum de $I - F$

Proposition IX.10. *Si ρ est une mesure de probabilité symétrique et non-dégénérée sur \mathbb{R}^d alors*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \quad \forall M \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R}) \quad I(x, M) > \frac{\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}.$$

Si de plus Λ est finie sur un voisinage de $(0, \dots, 0, O_d)$ alors la fonction $I - F$ admet un unique minimum sur Δ^ en $(0, \Sigma)$.*

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$ et $M \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. En prenant $A = -M^{-1}x^t x M^{-1}/2$ et $u = M^{-1}x$, nous obtenons

$$\langle u, x \rangle + \text{tr}(AM) = \langle M^{-1}x, x \rangle - \frac{1}{2} \text{tr}(M^{-1}x^t x) = \frac{\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}.$$

Par conséquent

$$I(x, M) \geq \frac{\langle M^{-1}x, x \rangle}{2} - \Lambda\left(M^{-1}x, -\frac{1}{2}M^{-1}x^t x M^{-1}\right).$$

Pour tout $z \in \mathbb{R}^d$, nous avons $z^t M^{-1}x = \langle M^{-1}x, z \rangle = \text{tr}(z^t (M^{-1}x)) \in \mathbb{R}$ donc

$$-\frac{1}{2} \text{tr}(z^t z M^{-1}x^t x M^{-1}) = -\frac{\langle M^{-1}x, z \rangle}{2} \text{tr}(z^t x M^{-1}) = -\frac{\langle M^{-1}x, z \rangle^2}{2}.$$

Ainsi

$$\Lambda\left(M^{-1}x, -\frac{1}{2}M^{-1}x^t x M^{-1}\right) = \ln \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\langle M^{-1}x, z \rangle - \frac{\langle M^{-1}x, z \rangle^2}{2}\right) d\rho(z).$$

Par symétrie de ρ , nous avons, pour tout $s \in \mathbb{R}^d$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\langle s, z \rangle - \frac{\langle s, z \rangle^2}{2}\right) d\rho(z) &= \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\langle s, z \rangle - \frac{\langle s, z \rangle^2}{2}\right) d\rho(z) \\ &= \frac{1}{2} \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(\langle s, z \rangle - \frac{\langle s, z \rangle^2}{2}\right) d\rho(z) + \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\langle s, z \rangle - \frac{\langle s, z \rangle^2}{2}\right) d\rho(z) \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \text{ch}(\langle s, z \rangle) \exp\left(-\frac{\langle s, z \rangle^2}{2}\right) d\rho(z). \end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\Lambda \left(M^{-1}x, -\frac{1}{2}M^{-1}x^t x M^{-1} \right) = \ln \int_{\mathbb{R}^d} \text{ch}(\langle M^{-1}x, z \rangle) \exp \left(-\frac{\langle M^{-1}x, z \rangle^2}{2} \right) d\rho(z).$$

Rappelons que la fonction $y \mapsto 1 - \text{ch}(y) \exp(-y^2/2)$ est positive sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0. Ainsi, pour tout $z \in \mathbb{R}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \text{ch}(\langle s, z \rangle) \exp \left(-\frac{\langle s, z \rangle^2}{2} \right) d\rho(z) \leq 1,$$

avec égalité si et seulement si $\rho(\{z : \langle s, z \rangle = 0\}) = 1$. La non-dégénérescence de ρ nous assure alors que le cas d'égalité n'a lieu que si $s = 0$. En appliquant cela à $s = M^{-1}x \neq 0$, nous montrons que

$$\Lambda \left(M^{-1}x, -\frac{1}{2}M^{-1}x^t x M^{-1} \right) < 0,$$

et donc que $I(x, M) > \langle M^{-1}x, x \rangle / 2$.

Supposons maintenant que $d \geq 2$, $x = 0$ et $M \in \mathcal{S}_d^{++}(\mathbb{R})$. Alors

$$I(x, M) - \frac{\langle M^{-1}x, x \rangle}{2} = I(0, M).$$

La proposition III.4 nous assure que, si nous faisons l'hypothèse que Λ est finie sur un voisinage de $(0, \dots, 0, O_d)$, alors $I(0, M) = 0$ si et seulement si $M = \Sigma$. Ceci termine la démonstration de la proposition. \square

Supposons que ν_ρ est non-dégénérée. Soit $(x, M) \in A_I$. Par définition, il existe $(u, A) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$ tel que $(x, M) = \nabla \Lambda(u, A)$. En particulier

$$M - x^t x = \int_{\mathbb{R}^d} z^t z d\rho_{u,A}(z) - x^t x$$

est la matrice de covariance de la loi $\rho_{u,A}$, la mesure de densité

$$z \mapsto \exp(\langle u, z \rangle + \langle Az, z \rangle) \left(\int_{\mathbb{R}^d} \exp(\langle u, y \rangle + \langle Ay, y \rangle) d\rho(y) \right)^{-1}$$

par rapport à ρ . Or cette loi est non-dégénérée car elle a le même support que ρ . Ainsi $M - x^t x$ est symétrique définie positive et donc M aussi. De plus A_I est inclus dans l'enveloppe convexe du support de ν_ρ donc il existe $p \geq 1$, $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ des réels inclus dans $]0, 1[$ dont la somme vaut 1 et y_1, \dots, y_p des points du support de ρ tels que

$$(x, M) = \sum_{i=1}^p \lambda_i (y_i, y_i^t y_i).$$

En appliquant le lemme IX.8 à la mesure $\lambda_1 \delta_{y_1} + \dots + \lambda_p \delta_{y_p}$, nous obtenons que $(x, M) \in \Delta^*$. Nous avons donc montré que

$$A_I \subset \Delta^*.$$

En particulier la fonction $I - F$ est bien définie et de classe C^∞ sur A_I .

Notons Δ l'adhérence de Δ^* . Nous étendons F à tout Δ , en posant

$$\forall (x, M) \in \Delta \setminus \Delta^* \quad F(x, M) = 0,$$

et nous notons F° l'enveloppe semi-continue supérieure de F sur Δ , définie par

$$\forall (x, M) \in \Delta \quad F^\circ(x, M) = \inf_{V \in \mathcal{V}(x, M)} \sup_{(y, N) \in V} F(y, N),$$

où $\mathcal{V}(x, M)$ désigne l'ensemble des voisinages de (x, M) dans Δ .

Lemme IX.11. *La fonction F^o est positive, majorée par $1/2$ et semi-continue supérieurement sur Δ . De plus F et F^o coïncident sur Δ^* .*

Démonstration. Le fait que F^o soit semi-continue supérieurement sur Δ , majorée par $1/2$ et supérieure à F découle de la proposition B.5 de l'annexe. Ensuite donnons-nous $(x_0, M_0) \in \Delta^*$ et $\varepsilon > 0$. La fonction F est continue sur Δ^* donc il existe $V_\varepsilon \in \mathcal{V}(x_0, M_0)$ tel que

$$\forall y \in V_\varepsilon \cap \Delta^* \quad F(y_0, N_0) < F(x_0, M_0) + \varepsilon.$$

De plus $0 = F(y_0, N_0) < F(x_0, M_0) + \varepsilon$ pour tout $(y_0, N_0) \in \Delta \setminus \Delta^*$, si bien que

$$F^o(x_0, M_0) \leq \sup_{(y,N) \in V_\varepsilon} F(y, N) < F(x_0, M_0) + \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0 nous obtenons que $F(x_0, M_0) \leq F^o(x_0, M_0) \leq F(x_0, M_0)$. Ceci montre que F et F^o coïncident sur Δ^* . \square

Nous sommes ainsi en mesure de montrer la proposition :

Proposition IX.12. *Si ρ est une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, admettant une densité paire par rapport à la mesure de Lebesgue et telle que Λ est steep alors*

$$\forall (x, M) \in \Delta \quad I(x, M) \geq F^o(x, M)$$

avec égalité si et seulement si $(x, M) = (0, \Sigma)$.

Démonstration. D'après le lemme V.2, la fonction $I - F^o$ atteint son minimum sur le fermé Δ en (x_∞, M_∞) . De plus la proposition III.12 assure que D_I est un ouvert et, comme Λ est steep, le théorème III.16 entraîne que $\overset{\circ}{D}_I = A_I$. Il s'ensuit que $I - F^o$ est infinie sur $\Delta \setminus A_I$. Par conséquent le minimum de $I - F^o$ sur Δ est atteint sur A_I . Ensuite le lemme IX.11 nous assure que F et F^o coïncident sur A_I . Enfin ρ admet une densité paire donc ν_ρ est non-dégénérée¹ et la proposition IX.10 assure que le minimum de $I - F^o$ sur Δ est unique et qu'il s'agit de $(0, \Sigma)$. \square

d) Convergence de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$

A l'image de ce que nous avons fait en dimension 1, voici une variante du lemme de Varadhan :

Proposition IX.13. *Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, qui est symétrique et de matrice de covariance Σ définie positive. Nous avons*

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^*} \exp \left(\frac{n \langle M^{-1}x, x \rangle}{2} \right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M) \geq 0.$$

Supposons que Λ est steep et que ρ admet une densité paire par rapport à la mesure de Lebesgue. Si A est un fermé de $\mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ ne contenant pas $(0, \Sigma)$, alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap A} \exp \left(\frac{n \langle M^{-1}x, x \rangle}{2} \right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M) < 0.$$

1. En effet : donnons-nous Z un vecteur aléatoire de loi ρ . Il s'ensuit que $(Z, Z^t Z)$ suit la loi ν_ρ . Si nous l'écrivons comme un vecteur de \mathbb{R}^{d+k_d} avec $k_d = \dim \mathcal{S}_d(\mathbb{R}) = d(d+1)/2$, alors sa matrice de covariance est

$$\begin{pmatrix} \Sigma & O_{d,k_d} \\ {}^t O_{d,k_d} & \tilde{\Sigma} \end{pmatrix},$$

où O_{d,k_d} est la matrice nulle de taille $d \times k_d$ et $\tilde{\Sigma}$ est la matrice covariance de $Z^t Z$. Elle vérifie

$$\forall (p, q) \in \{1, \dots, k_d\}^2 \quad \tilde{\Sigma}_{p,q} = \int_{\mathbb{R}^d} z_i z_j z_k z_l d\rho(z) - \Sigma_{i,j} \Sigma_{k,l},$$

où i, j, k, l sont les uniques entiers compris entre 1 et k_d tels que $p = d(i-1) + j$ et $q = d(k-1) + l$. Si ρ admet une densité alors $Z^t Z$ est non-dégénérée sur $\mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ et donc $\tilde{\Sigma}$ est inversible. Nous en déduisons que ν_ρ est non-dégénérée.

Démonstration. L'ensemble $\overset{\circ}{\Delta}$, l'intérieur de Δ^* , contient $(0, \Sigma)$ donc le principe de grandes déviations satisfait par $(\tilde{\nu}_{n,\rho})_{n \geq 1}$ nous assure que

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^*} \exp\left(\frac{n\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{\nu}_{n,\rho}(\overset{\circ}{\Delta}^*) \\ &\geq -\inf \left\{ I(x, M) : (x, M) \in \overset{\circ}{\Delta} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant la deuxième inégalité. La fonction Λ est steep donc le théorème III.16 entraîne que $\overset{\circ}{D}_I = A_I$. De plus, comme ρ admet une densité, la proposition III.12 implique que D_I est un ouvert donc $D_I = A_I$. Or nous avons vu au début du paragraphe 24.c) que $A_I \subset \Delta^*$, si bien que $I(0, O_d) = +\infty$. Enfin la fonction I est semi-continue inférieurement sur $\mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$ donc il existe un voisinage ouvert \mathcal{U} de $(0, O_d)$ tel que

$$\forall (x, M) \in \bar{\mathcal{U}} \quad I(x, M) \geq 1.$$

Notons Δ l'adhérence de Δ^* et F^o l'enveloppe semi-continue supérieure de F , comme définie dans le paragraphe précédent. Décomposons

$$\Delta^* \cap A \subset (\Delta^* \cap \mathcal{U}) \cup (\Delta^* \cap \mathcal{U}^c \cap A).$$

Nous avons

$$\int_{\Delta^* \cap \mathcal{U}} \exp\left(\frac{n\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M) \leq \exp(n/2) \tilde{\nu}_{n,\rho}(\mathcal{U}).$$

Le principe de grandes déviations que satisfait $\tilde{\nu}_{n,\rho}$ entraîne que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap \mathcal{U}} \exp\left(\frac{n\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M) \leq \frac{1}{2} - \inf_{\bar{\mathcal{U}}} I \leq -\frac{1}{2}.$$

L'ensemble $\Delta \cap \mathcal{U}^c \cap A$ est fermé, ne contient pas $(0, O_d)$ et la fonction F^o est semi-continue supérieurement et bornée sur cet ensemble. Ainsi, d'après le lemme B.7,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap \mathcal{U}^c \cap A} \exp\left(\frac{n\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M) \\ \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta \cap \mathcal{U}^c \cap A} \exp(nF^o(x, M)) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M) \leq \sup_{\Delta \cap \mathcal{U}^c \cap A} (F^o - I). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap A} \exp\left(\frac{n\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M) \leq \max\left(-\frac{1}{2}, \sup_{\Delta \cap \mathcal{U}^c \cap A} (F^o - I)\right).$$

Comme ρ est une mesure de probabilité admettant une densité paire par rapport à la mesure de Lebesgue et telle que Λ est steep, la proposition IX.12 entraîne que $I - F^o$ admet un unique minimum en $(0, \Sigma)$ sur Δ . De plus, I est une bonne fonction de taux, F^o est semi-continue supérieurement et bornée et l'ensemble $\Delta \cap \mathcal{U}^c \cap A$ est un fermé ne contenant pas $(0, \Sigma)$. Donc le lemme V.2 implique que

$$\sup_{\Delta \cap \mathcal{U}^c \cap A} (F^o - I) < (F^o - I)(0, \Sigma) = 0$$

si bien que

$$\max\left(-\frac{1}{2}, \sup_{\Delta \cap \mathcal{U}^c \cap A} (F^o - I)\right) < 0.$$

D'où la proposition. \square

Nous avons alors le théorème limite suivant :

Théorème IX.14. Soit ρ une mesure de probabilité admettant une densité paire par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, et telle que Λ est steep. Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \Sigma)$.

Démonstration. Notons $\theta_{n,\rho}$ la loi de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$. Pour tout borélien A de $\mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$, nous avons

$$\theta_{n,\rho}(A) = \frac{\int_{A \cap \Delta^*} \exp\left(\frac{n\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M)}{\int_{\Delta^*} \exp\left(\frac{n\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M)}.$$

Soit U un voisinage ouvert de $(0, \Sigma)$ dans $\mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$. La proposition IX.13 entraîne que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \theta_{n,\rho}(U^c) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^* \cap U^c} \exp\left(\frac{n\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M) \\ &\quad - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Delta^*} \exp\left(\frac{n\langle M^{-1}x, x \rangle}{2}\right) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, M) < 0. \end{aligned}$$

Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que $\theta_{n,\rho}(U^c) \leq e^{-n\varepsilon}$ pour tout $n \geq n_0$. Ainsi, pour tout voisinage U de $(0, \Sigma)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{n,\rho} \left(\left(\frac{S_n}{n}, \frac{T_n}{n} \right) \in U^c \right) = 0.$$

C'est-à-dire, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \Sigma)$. \square

25 Convergence en loi de $T_n^{-1/2} S_n/n^{1/4}$ sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$

Nous allons à présent généraliser le théorème VII.1 à la dimension supérieure afin de montrer, dans le paragraphe 25.c), le théorème I.7.

a) Enoncé

Théorème IX.15. Soit ρ une mesure de probabilité non-dégénérée et symétrique sur \mathbb{R}^d telle que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \|z\|^5 d\rho(z) < +\infty.$$

Nous notons Σ la matrice de covariance de ρ et nous définissons l'application M_4 sur \mathbb{R}^d par

$$\forall z \in \mathbb{R}^d \quad M_4(z) = \sum_{1 \leq i, j, k, l \leq d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_i y_j y_k y_l d\rho(y) \right) z_i z_j z_k z_l.$$

Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$,

$$\frac{1}{n^{1/4}} T_n^{-1/2} S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \frac{\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{12} M_4(\Sigma^{-1/2} z)\right) dz}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{12} M_4(\Sigma^{-1/2} u)\right) du}.$$

Dans la preuve de ce théorème, nous montrerons que la loi limite est bien définie. Nous remarquons que, si $d = 1$, alors $\Sigma^{-1/2} = \sigma^{-1}$ et

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad M_4(\Sigma^{-1/2} z) = \frac{\mu_4 z^4}{\sigma^4}.$$

Ainsi le théorème IX.15 est bien une généralisation du théorème VII.1.

b) Démonstration du théorème IX.15

Soit $(X_n^k)_{n \geq d, 1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) est un n -uplet de loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}$. Rappelons que

$$\forall n \geq 1 \quad S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n \quad \text{et} \quad T_n = X_n^1 t(X_n^1) + \dots + X_n^n t(X_n^n).$$

et que, presque sûrement, T_n est une matrice symétrique définie positive.

Nous allons utiliser la transformation de Hubbard-Stratonovich : donnons-nous un vecteur Gaussien standard W indépendant de $(X_n^k)_{n \geq d, 1 \leq k \leq n}$. Soient $n \geq 1$ et f une fonction continue bornée sur \mathbb{R}^d . Nous posons

$$E_n = \mathbb{E} \left[f \left(\frac{W}{n^{1/4}} + \frac{1}{n^{1/4}} T_n^{-1/2} S_n \right) \right].$$

Nous introduisons $(Y_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi ρ . Pour tout $n \geq 1$, nous posons

$$A_n = \sum_{i=1}^n Y_i \quad \text{et} \quad B_n = \left(\sum_{i=1}^n Y_i t Y_i \right)^{1/2}.$$

Nous avons

$$E_n = \frac{1}{Z_n} \mathbb{E} \left[f \left(\frac{W}{n^{1/4}} + \frac{1}{n^{1/4}} B_n^{-1} A_n \right) \exp \left(\frac{1}{2} \left\langle B_n^{-2} A_n, A_n \right\rangle \right) \mathbb{1}_{\{\det(B_n^2) > 0\}} \right],$$

ou encore

$$E_n = \frac{1}{Z_n (2\pi)^{d/2}} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\det(B_n^2) > 0\}} \int_{\mathbb{R}^d} f \left(\frac{w}{n^{1/4}} + \frac{1}{n^{1/4}} B_n^{-1} A_n \right) \times \exp \left(\frac{1}{2} \left\langle B_n^{-2} A_n, A_n \right\rangle - \frac{\|w\|^2}{2} \right) dw \right].$$

Nous faisons le changement de variable $z = n^{-1/4} (w + B_n^{-1} A_n)$ dans l'intégrale et nous obtenons

$$E_n = \frac{n^{d/4}}{Z_n (2\pi)^{d/2}} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\det(B_n^2) > 0\}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \exp \left(-\frac{\sqrt{n} \|z\|^2}{2} + n^{1/4} \left\langle z, B_n^{-1} A_n \right\rangle \right) dz \right].$$

Donnons-nous $U_1, \dots, U_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des variables aléatoires indépendantes telles que la loi de U_i est ρ et la loi de ε_i est $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Par symétrie de ρ , il s'ensuit que $\varepsilon_i U_i$ suit encore la loi ρ , pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Ainsi

$$E_n = \frac{n^{d/4}}{Z_n (2\pi)^{d/2}} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\det(B_n^2) > 0\}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \exp \left(-\frac{\sqrt{n} \|z\|^2}{2} + n^{1/4} \left\langle z, B_n^{-1} \left(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i U_i \right) \right\rangle \right) dz \right].$$

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, nous posons (dans le cas où la matrice symétrique positive $B_n^2 = U_1 t U_1 + \dots + U_n t U_n$ est définie)

$$a_{i,n} = \left(\sum_{j=1}^n U_j t U_j \right)^{-1/2} U_i.$$

En utilisant le théorème de Fubini et l'indépendance des $\varepsilon_i, U_i, i \geq 1$, nous obtenons

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{n^{d/4}}{Z_n(2\pi)^{d/2}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{\det(B_n^2) > 0\}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \exp\left(-\frac{\sqrt{n}\|z\|^2}{2}\right) \right. \\ &\quad \left. \times \mathbb{E} \left(\prod_{i=1}^n \exp\left(n^{1/4} \varepsilon_i \langle z, a_{i,n} \rangle\right) \middle| (U_1, \dots, U_n) \right) dz \right] \\ &= \frac{n^{d/4}}{Z_n(2\pi)^{d/2}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{\det(B_n^2) > 0\}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \exp\left(-\frac{\sqrt{n}\|z\|^2}{2}\right) \exp\left(\sum_{i=1}^n \ln \operatorname{ch}(n^{1/4} \langle z, a_{i,n} \rangle)\right) dz \right]. \end{aligned}$$

Nous définissons la fonction g par

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad g(y) = \ln \operatorname{ch} y - \frac{y^2}{2}.$$

Remarquons que, pour tous vecteurs x et y de \mathbb{R}^d , $\langle x, y \rangle^2 = \langle x, (y {}^t y)x \rangle$. Nous avons donc

$$\sum_{i=1}^n \langle z, a_{i,n} \rangle^2 = \sum_{i=1}^n \langle z, (a_{i,n} {}^t a_{i,n})z \rangle = \left\langle z, \left(\sum_{i=1}^n a_{i,n} {}^t a_{i,n} \right) z \right\rangle = \langle z, I_d z \rangle = \|z\|^2.$$

Nous en déduisons que

$$E_n = \frac{n^{d/4}}{Z_n(2\pi)^{d/2}} \mathbb{E} \left[\mathbf{1}_{\{\det(B_n^2) > 0\}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \exp\left(\sum_{i=1}^n g(n^{1/4} \langle z, a_{i,n} \rangle)\right) dz \right].$$

Nous allons maintenant appliquer la méthode de Laplace. Examinons la convergence du terme dans l'exponentielle : pour tous $z \in \mathbb{R}^d$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, la formule de Taylor-Lagrange nous assure l'existence d'une variable aléatoire réelle ξ_i telle que

$$g(n^{1/4} \langle z, a_{i,n} \rangle) = -\frac{n \langle z, a_{i,n} \rangle^4}{12} + \frac{n^{3/2} \langle z, a_{i,n} \rangle^5}{n^{1/4} 5!} g^{(5)}(\xi_i).$$

Soit $z \in \mathbb{R}^d$. Nous avons

$$n \sum_{i=1}^n \langle z, a_{i,n} \rangle^4 = n \sum_{i=1}^n \langle B_n^{-1} z, U_i \rangle^4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \sqrt{n} B_n^{-1} z, U_i \rangle^4.$$

Notons $\zeta_n = \sqrt{n} B_n^{-1} z$. Nous avons

$$\begin{aligned} n \sum_{i=1}^n \langle z, a_{i,n} \rangle^4 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle \zeta_n, U_i \rangle^4 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^d (\zeta_n)_j (U_i)_j \right)^4 \\ &= \sum_{1 \leq j_1, j_2, j_3, j_4 \leq d} (\zeta_n)_{j_1} (\zeta_n)_{j_2} (\zeta_n)_{j_3} (\zeta_n)_{j_4} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_i)_{j_1} (U_i)_{j_2} (U_i)_{j_3} (U_i)_{j_4}. \end{aligned}$$

La loi des grands nombres nous assure que

$$\zeta_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P.S.}} \Sigma^{-1/2} z,$$

et que, pour tout $(j_1, j_2, j_3, j_4) \in \{1, \dots, d\}^4$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (U_i)_{j_1} (U_i)_{j_2} (U_i)_{j_3} (U_i)_{j_4} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P.S.}} \int_{\mathbb{R}^d} y_{j_1} y_{j_2} y_{j_3} y_{j_4} d\rho(y).$$

Nous en déduisons que

$$n \sum_{i=1}^n \langle z, a_{i,n} \rangle^4 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P.S.}} M_4 \left(\Sigma^{-1/2} z \right).$$

Puisque ρ admet un moment d'ordre 5, nous montrons de même que

$$n^{3/2} \sum_{i=1}^n \langle z, a_{i,n} \rangle^5 \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P.S.}} M_5 \left(\Sigma^{-1/2} z \right),$$

où, pour tout $z \in \mathbb{R}^d$,

$$M_5(z) = \sum_{1 \leq j_1, j_2, j_3, j_4, j_5 \leq d} \left(\int_{\mathbb{R}^d} y_{j_1} y_{j_2} y_{j_3} y_{j_4} y_{j_5} d\rho(y) \right) z_{j_1} z_{j_2} z_{j_3} z_{j_4} z_{j_5}.$$

Enfin un calcul simple nous permet de montrer que $g^{(5)}$ est uniformément bornée sur \mathbb{R} . Ainsi

$$\forall z \in \mathbb{R}^d \quad \sum_{i=1}^n g(n^{1/4} \langle z, a_{i,n} \rangle) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\text{P.S.}} -\frac{1}{12} M_4 \left(\Sigma^{-1/2} z \right).$$

Cherchons maintenant une majoration uniforme et intégrable du terme dans l'exponentielle.

Lemme IX.16. *Il existe $c > 0$ tel que*

$$\forall z \in \mathbb{R}^d \quad \forall n \geq 1 \quad \sum_{i=1}^n g(n^{1/4} \langle z, a_{i,n} \rangle) \leq -\frac{c \|z\|^4}{1 + \|z\|^2 / \sqrt{n}}.$$

Démonstration. Nous définissons h par

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad h(y) = \frac{1 + y^2}{y^4} g(y).$$

Il s'agit d'une fonction continue et strictement négative sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Puisque $g(y) \sim -y^4/12$ au voisinage de 0, nous en déduisons que h se prolonge par continuité en 0 en posant $h(0) = -1/12$. Ensuite, en écrivant

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad h(y) = \frac{1 + y^2}{y^2} \times \left(\frac{\ln \text{ch } y}{y^2} - \frac{1}{2} \right),$$

nous voyons que $h(y)$ tend vers $-1/2$ quand $|y|$ tend vers $+\infty$. Par conséquent h est majorée par une certaine constante $-c$ avec $c > 0$. Ainsi, pour tous $z \in \mathbb{R}$ et $n \geq 1$,

$$\sum_{i=1}^n g(n^{1/4} \langle z, a_{i,n} \rangle) \leq -nc \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(n^{1/4} \langle z, a_{i,n} \rangle)^4}{1 + (n^{1/4} \langle z, a_{i,n} \rangle)^2}.$$

Nous vérifions aisément que la fonction $x \mapsto x^2/(1+x)$ est convexe sur $[0, +\infty[$. Nous en déduisons que

$$\sum_{i=1}^n g(n^{1/4} \langle z, a_{i,n} \rangle) \leq -nc \frac{\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n^{1/4} \langle z, a_{i,n} \rangle)^2 \right)^2}{1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (n^{1/4} \langle z, a_{i,n} \rangle)^2} = -\frac{c \|z\|^4}{1 + \|z\|^2 / \sqrt{n}},$$

puisque $\langle z, a_{1,n} \rangle^2 + \dots + \langle z, a_{n,n} \rangle^2 = 1$. □

Si $\|z\| \leq n^{1/4}$ alors $1 + \|z\|^2/\sqrt{n} \leq 2$ et donc, d'après le lemme,

$$\left| \mathbb{1}_{\{\det(B_n^2) > 0\}} \mathbb{1}_{\|z\| \leq n^{1/4}} f(z) \exp\left(\sum_{i=1}^n g(n^{1/4}\langle z, a_{i,n}\rangle)\right) \right| \leq \|f\|_\infty \exp\left(-\frac{c\|z\|^4}{2}\right).$$

Puisque

$$\mathbb{E} \left[\int_{\mathbb{R}^d} \|f\|_\infty \exp\left(-\frac{c\|z\|^4}{2}\right) dz \right] < +\infty,$$

le théorème de convergence dominée implique que la fonction $z \mapsto \exp(-M_4(\Sigma^{-1/2}z)/12)$ est intégrable sur \mathbb{R}^d et que

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\det(B_n^2) > 0\}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\|z\| \leq n^{1/4}} f(z) \exp\left(\sum_{i=1}^n g(n^{1/4}\langle z, a_{i,n}\rangle)\right) dz \right] \\ \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \exp\left(-\frac{1}{12}M_4(\Sigma^{-1/2}z)\right) dz. \end{aligned}$$

Si $\|z\| > n^{1/4}$ alors $1 + \|z\|^2/\sqrt{n} \leq 2\|z\|^2/\sqrt{n}$ et donc, d'après le lemme,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\det(B_n^2) > 0\}} \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{1}_{\|z\| > n^{1/4}} f(z) \exp\left(\sum_{i=1}^n g(n^{1/4}\langle z, a_{i,n}\rangle)\right) dz \right] \\ \leq \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{c\sqrt{n}\|z\|^2}{2}\right) dz = \frac{\|f\|_\infty (2\pi)^{d/2}}{n^{d/4}c^{d/2}} \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \frac{E_n Z_n (2\pi)^{d/2}}{n^{d/4}} = \mathbb{E} \left[\mathbb{1}_{\{\det(B_n^2) > 0\}} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \exp\left(\sum_{i=1}^n g(n^{1/4}\langle z, a_{i,n}\rangle)\right) dz \right] \\ \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} f(z) \exp\left(-\frac{1}{12}M_4(\Sigma^{-1/2}z)\right) dz. \end{aligned}$$

En appliquant cela avec $f = 1$, nous obtenons

$$\frac{Z_n (2\pi)^{d/2}}{n^{d/4}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{12}M_4(\Sigma^{-1/2}z)\right) dz.$$

D'après le lemme de Paul Levy, nous avons alors

$$\frac{W}{n^{1/4}} + \frac{1}{n^{1/4}} T_n^{-1/2} S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{12}M_4(\Sigma^{-1/2}z)\right) dz}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{12}M_4(\Sigma^{-1/2}u)\right) du}.$$

Puisque $(Wn^{-1/4})_{n \geq 1}$ converge en loi vers 0, le lemme de Slutsky (théorème 3.9 de [8]) entraîne la convergence en loi du théorème IX.15.

Notons que l'hypothèse que ρ admet un moment d'ordre 5 peut certainement être affaiblie en supposant plutôt que

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \int_{\mathbb{R}^d} \|z\|^{4+\varepsilon} d\rho(z) < +\infty.$$

c) Fluctuations de S_n sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ en dimension $d \geq 2$

Nous sommes en mesure de montrer le théorème suivant, généralisation¹ du théorème I.7.

Théorème IX.17. *Soit ρ une mesure de probabilité admettant une densité paire par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^d , $d \geq 2$, et telle que Λ est steep. Alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \Sigma)$ et*

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{12}M_4(\Sigma^{-1}z)\right) dz}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{12}M_4(\Sigma^{-1}u)\right) du}.$$

Démonstration. Le théorème IX.14 nous assure que, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, T_n/n converge en probabilité vers Σ . Comme nous l'avons vu page 51, l'hypothèse que Λ est steep implique que $0 \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$ et donc que ρ admet des moments de tout ordre. Le théorème IX.15 et le lemme de Slutsky nous assurent alors que

$$\frac{S_n}{n^{3/4}} = \left(\frac{T_n}{n}\right)^{1/2} \times \frac{1}{n^{1/4}} T_n^{-1/2} S_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \frac{\exp\left(-\frac{1}{12}M_4(\Sigma^{-1}z)\right) dz}{\int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(-\frac{1}{12}M_4(\Sigma^{-1}u)\right) du}.$$

Le théorème est donc démontré. □

1. En effet si ρ vérifie

$$\forall t \geq 0 \quad \int_{\mathbb{R}^d} \exp(t\|x\|^2) d\rho(x) < \infty,$$

alors $D_\Lambda = \mathbb{R}^d \times \mathcal{S}_d(\mathbb{R})$, si bien que Λ est steep

Chapitre X

Tuer le terme en x^4

Sommaire

26	Construction d'un modèle	160
a)	Un nouveau terme d'interaction	160
b)	Cas d'une loi de Bernoulli	161
c)	Vers un théorème limite	162
27	Développement de I_\bullet au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$	164
a)	Régularité de I_\bullet	164
b)	Aide aux calculs	165
c)	Calcul des termes du développement	168
i)	Les termes non négligeables	168
ii)	Les termes d'ordre 3	169
iii)	Les termes d'ordre 4	170
iv)	Les termes d'ordre 5 et 6	171
v)	Conclusion	176
d)	Développement de $I_\bullet - F - R$: Mise en évidence d'un problème	176
28	A la recherche d'un terme d'interaction	178
a)	Critères de construction	178
b)	Autour du lemme de Varadhan	180
c)	Un candidat	183
29	Une auto-interaction menant à des fluctuations d'ordre $n^{5/6}$	184
a)	Théorème limite général	184
b)	Cas où ρ admet une densité	186
30	Tuer le terme en $x^6, x^8, \dots, x^{2k}, \dots$	190

Dans la littérature, nous rencontrons des modèles de particules en interaction dont l'ordre des fluctuations diffère de $n^{3/4}$ (cf. [26] pour le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé et [18] pour un modèle dynamique géométrique de particules en interaction sur le tore). Dans ce chapitre, nous essayons de « tuer » le terme en x^4 dans la loi limite du théorème I.3. Nous souhaitons modifier la loi du modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC (défini au paragraphe 3) pour obtenir une auto-interaction H menant à des fluctuations d'ordre $n^{5/6}$ et une loi limite du type $C \exp(-\lambda x^6) dx$ où C, λ sont des constantes positives.

Dans le paragraphe 26, nous étudions les arguments mathématiques à l'origine des fluctuations d'ordre $n^{3/4}$ de S_n dans le modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC. Cela nous amène à introduire une certaine transformée de Cramér I_\bullet dont nous étudions le comportement au voisinage de son minimum, dans le paragraphe 27. Nous nous aidons ensuite de cette étude pour déterminer

des critères pour la construction de H et pour en proposer un candidat dans le paragraphe 28. Enfin nous appuyons cette construction par la preuve d'une extension du théorème I.8 dans le paragraphe 29.

Nous n'avons hélas pas réussi à généraliser cette construction pour ensuite tuer le terme en x^6 , puis le terme en x^8 , etc, et obtenir des auto-interactions menant respectivement à des fluctuations d'ordre $n^{7/8}$, $n^{9/10}$, etc. Nous en discutons dans le paragraphe 30.

26 Construction d'un modèle

a) Un nouveau terme d'interaction

Commençons par analyser les arguments mathématiques à l'origine des fluctuations d'ordre $n^{3/4}$ de S_n dans le modèle défini au paragraphe 3. Le terme d'interaction est

$$n F\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right)$$

où $F(x, y) = x^2/(2y)$ pour $(x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[$. En regardant de plus près le paragraphe 13, nous remarquons que les fluctuations de S_n sont d'ordre $n^{3/4}$ parce que, dans le développement de $I - F$ autour de son minimum, le premier terme non nul en la variable x (correspondant à S_n/n) apparaît à l'ordre quatre. Plus précisément, si σ^2 désigne la variance de ρ et μ_4 son moment d'ordre 4, ce terme est $\mu_4 x^4/(12\sigma^8)$. Par conséquent, afin de « tuer le terme en x^4 », nous allons transformer la fonction d'interaction F de notre modèle en une fonction H pour que, dans le développement de $I - H$ autour de son minimum, le premier terme non nul en la variable x apparaisse à l'ordre six. Nous pourrions considérer

$$H : (x, y) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\mapsto F(x, y) + \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8}.$$

Cependant nous voulons construire une auto-interaction qui ne nécessite pas de connaître a priori les moments de la loi ρ , et donc nous allons estimer μ_4 par le terme $(x_1^4 + \cdots + x_n^4)/n$, tout comme nous avons estimé σ^2 par $(x_1^2 + \cdots + x_n^2)/n$ dans le paragraphe 3.a). C'est pourquoi la fonction d'interaction que nous aimerions considérer est

$$H : (x, y, z) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[^2 \mapsto F(x, y) + \frac{z x^4}{12y^4}.$$

Cela donnerait le terme d'interaction

$$\begin{aligned} & H(x_1 + \cdots + x_n, x_1^2 + \cdots + x_n^2, x_1^4 + \cdots + x_n^4) \\ &= n H\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}, \frac{x_1^4 + \cdots + x_n^4}{n}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} + \frac{1}{12} \frac{(x_1^4 + \cdots + x_n^4)(x_1 + \cdots + x_n)^4}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^4}. \end{aligned}$$

Avant d'aller plus loin, définissons proprement le modèle que nous aimerions étudier dans ce chapitre :

Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} . Soit $(X_k^n)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{\bullet, \rho}$, qui est la loi de densité

$$\frac{1}{Z_{\bullet, n}} \exp\left(\frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{2(x_1^2 + \cdots + x_n^2)} + \frac{(x_1^4 + \cdots + x_n^4)(x_1 + \cdots + x_n)^4}{12(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^4}\right) \mathbf{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0\}}$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$, où $Z_{\bullet,n}$ est une constante de normalisation. Nous posons

$$S_n = X_n^1 + \cdots + X_n^n, \quad T_n = (X_n^1)^2 + \cdots + (X_n^n)^2 \quad \text{et} \quad U_n = (X_n^1)^4 + \cdots + (X_n^n)^4.$$

Ce modèle est bien défini pour toute loi de probabilité. En effet

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 \geq \sum_{i=1}^n x_i^4$$

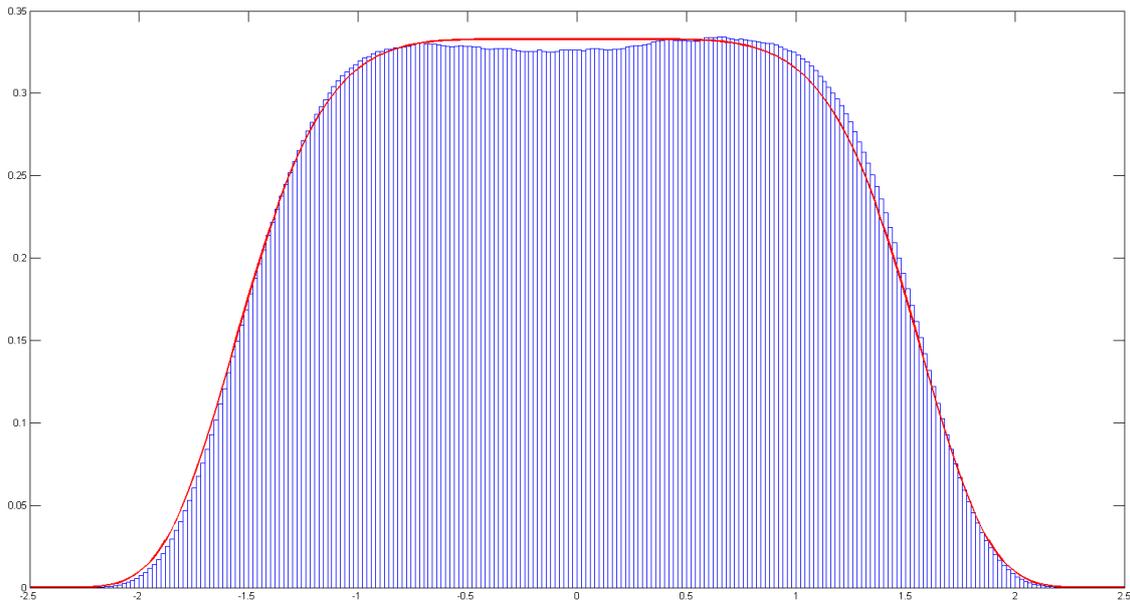
et, par convexité de $x \mapsto x^2$,

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 = n^2 \left(\sum_{i=1}^n \frac{x_i}{n} \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2.$$

Ainsi

$$\forall n \geq 1 \quad 1 \leq Z_n \leq \exp\left(\frac{n}{2} + \frac{n^2}{12}\right).$$

Afin de « tester » ce nouveau terme d'interaction, nous avons réalisé des simulations à l'aide de l'algorithme de Metropolis-within-Gibbs (cf. paragraphe 34). Nous avons obtenu :



EN BLEU L'HISTOGRAMME RENORMALISÉ DE 6.17×10^{11} SIMULATIONS DE $S_n/n^{5/6}$, POUR $n = 10000$ ET ρ ADMETTANT UNE DENSITÉ PROPORTIONNELLE À $x \mapsto \exp(-x^4)$. EN ROUGE, LA COURBE DE LA FONCTION

$$x \mapsto \left(\frac{81}{2}\right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{x^6}{18}\right).$$

Cela nous conforte dans l'idée que c'est un bon choix de modèle pour obtenir une auto-interaction menant à des fluctuations d'ordre $n^{5/6}$.

b) Cas d'une loi de Bernoulli

Si $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$ alors la loi $\tilde{\mu}_{\bullet,n,\rho}$ devient la loi

$$\frac{1}{Z_{\bullet,n}} \exp\left(\frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{2n} + \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^4}{12n^3}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

La loi de S_n sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ est alors

$$\frac{1}{Z_{\bullet n}} \exp\left(nH\left(\frac{x}{n}\right)\right) d\rho^{*n}(x),$$

où $H(x) = x^2/2 + x^4/12$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La transformée de Cramér de ρ est la fonction

$$J : x \in [-1, 1] \mapsto \frac{1+x}{2} \ln(1+x) + \frac{1-x}{2} \ln(1-x).$$

Pour tout $x \in]-1, 1[$,

$$(J - H)'(x) = \operatorname{argth} x - x - x^3/3,$$

$$(J - H)''(x) = \frac{1}{1-x^2} - 1 - x^2 = \frac{x^4}{1-x^2} \geq 0,$$

avec égalité si et seulement si $x = 0$. Ceci nous permet de conclure que la fonction $J - H$ admet un unique minimum en 0 sur $[-1, 1]$. De plus, au voisinage de 0, $J(x) - H(x) \sim x^6/30$. Comme ρ est une mesure dite arithmétique, en prenant $H = -\infty$ hors de $[-1, 1]$, d'après le théorème 4 de [44], nous avons que, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$,

$$\frac{S_n}{n^{5/6}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{\exp(-x^6/30) dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp(-s^6/30) ds}.$$

c) Vers un théorème limite

Remarquons que, pour tous réels x_1, \dots, x_n ,

$$\frac{(x_1^4 + \dots + x_n^4)(x_1 + \dots + x_n)^4}{12(x_1^2 + \dots + x_n^2)^4} = nR\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}, \frac{x_1^4 + \dots + x_n^4}{n}\right),$$

où

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{R} \quad R(x, y, z) = \frac{zx^4}{12y^4}.$$

Notons $\tilde{\nu}_{n,\rho}$ la loi de $(S_n/n, T_n/n, U_n/n)$ sous $\rho^{\otimes n}$. Nous introduisons les ensembles

$$\Theta = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq y, y^2 \leq z\} \quad \text{et} \quad \Theta^* = \Theta \cap (\mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{R}).$$

Par convexité, nous avons $\tilde{\nu}_{n,\rho}(\Theta) = 1$ et nous obtenons que, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, la loi du triplet $(S_n/n, T_n/n, U_n/n)$ est

$$\frac{1}{Z_{\bullet n}} \exp(nF(x, y) + nR(x, y, z)) \mathbb{1}_{\Theta^*}(x, y, z) d\tilde{\nu}_{n,\rho}(x, y, z).$$

Notons $\nu_{\bullet\rho}$ la loi du triplet (Z, Z^2, Z^4) quand Z est une variable aléatoire de loi ρ . Nous définissons la Log-Laplace Λ_{\bullet} de $\nu_{\bullet\rho}$ par

$$\forall (u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \quad \Lambda_{\bullet}(u, v, w) = \ln \int_{\mathbb{R}^3} e^{us+vt+wz} d\nu_{\bullet\rho}(s, t, z) = \ln \int_{\mathbb{R}} e^{uz+uz^2+wz^4} d\rho(z),$$

et sa transformée de Cramér I_{\bullet} par

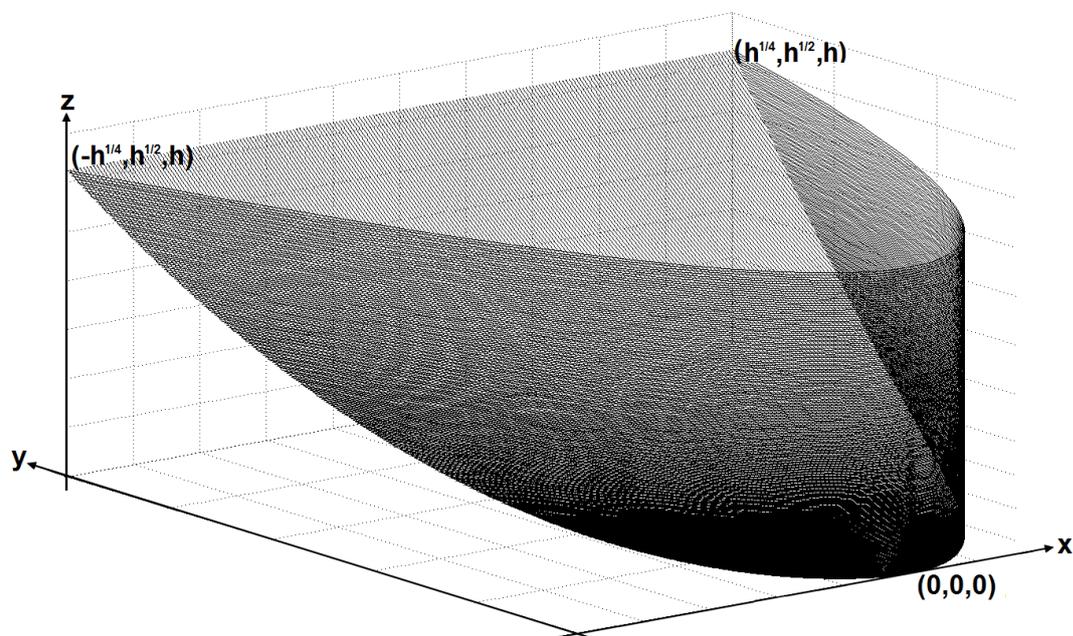
$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad I_{\bullet}(x, y, z) = \sup_{(u,v,w) \in \mathbb{R}^3} (xu + yv + zw - \Lambda_{\bullet}(u, v, w)).$$

Notons $D_{\Lambda_{\bullet}}$ et $D_{I_{\bullet}}$ les domaines de \mathbb{R}^3 où les fonctions Λ_{\bullet} et I_{\bullet} sont respectivement finies. Supposons que $(0, 0, 0) \in \overset{\circ}{D}_{\Lambda_{\bullet}}$. Alors $(\tilde{\nu}_{n,\rho})_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la bonne fonction de taux I_{\bullet} .

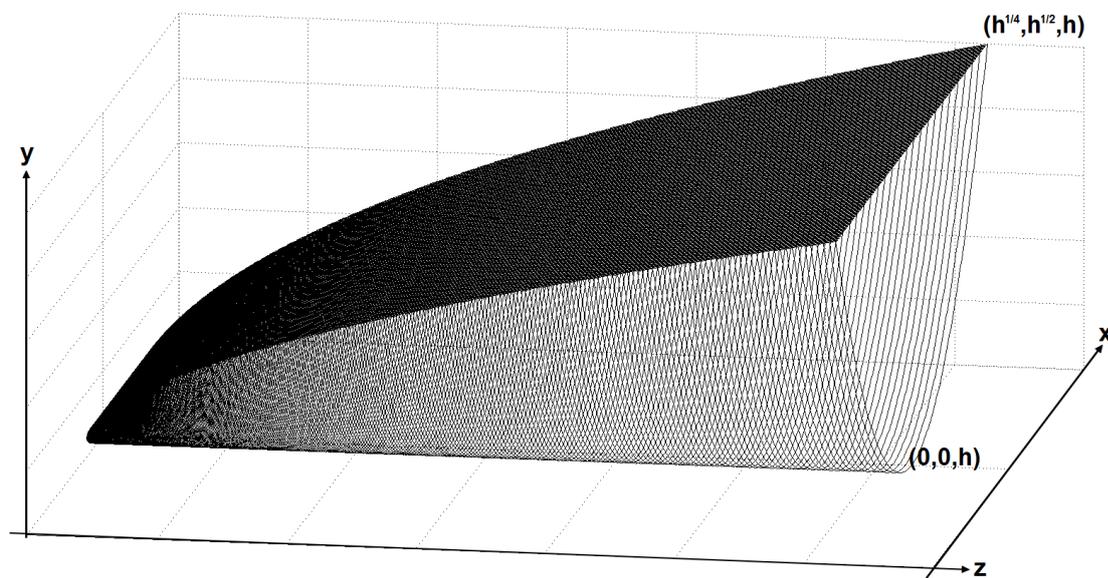
Comme dans les parties précédentes, en vue d'appliquer la méthode de Laplace à ce modèle, étudions la fonction $I_{\bullet} - F - R$. Nous aimerions montrer qu'elle admet un unique minimum en $(0, \sigma^2, \mu_4)$ et que son développement au voisinage de ce minimum est de la forme voulue :

$$Ax^6 + q(y - \sigma^2, z - \mu_4),$$

avec $A > 0$ et q une forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^2 .



QUELQUES VUES DE L'ENSEMBLE DES POINTS $(x, y, z) \in \partial\Theta$ TELS QUE $z \leq h$.



27 Développement de I_\bullet au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$

Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} de variance $\sigma^2 > 0$ et telle que $(0, 0, 0) \in \mathring{D}_{\Lambda_\bullet}$. Dans ce paragraphe, nous étudions le développement de I_\bullet au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$.

a) Régularité de I_\bullet

La fonction Λ_\bullet est finie dans un voisinage de $(0, 0, 0)$ donc la mesure de probabilité ρ admet des moments de tout ordre. Notons μ_8 son moment d'ordre 8. La matrice de covariance de $\nu_{\bullet, \rho}$ est

$$\begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_4 - \sigma^4 & \mu_6 - \sigma^2 \mu_4 \\ 0 & \mu_6 - \sigma^2 \mu_4 & \mu_8 - \mu_4^2 \end{pmatrix}.$$

Lemme X.1. *Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} dont le support contient au moins cinq points. Alors la mesure $\nu_{\bullet, \rho}$ est non-dégénérée sur \mathbb{R}^3 et donc*

$$(\mu_4 - \sigma^4)(\mu_8 - \mu_4^2) \neq (\mu_6 - \sigma^2 \mu_4)^2.$$

Démonstration. Comme ρ est symétrique, son support contient les points $a, -a, b$ et $-b$ pour certains $a \neq b$. Par conséquent le support de $\nu_{\bullet, \rho}$ contient les points

$$(a, a^2, a^4), \quad (-a, a^2, a^4), \quad (b, b^2, b^4) \quad \text{et} \quad (-b, b^2, b^4).$$

Nous remarquons que ces quatre points appartiennent au même plan \mathcal{P} dont une équation est

$$-(a^2 + b^2)y + z + a^2 b^2 = 0.$$

Si c désigne un cinquième point du support de ρ alors

$$-(a^2 + b^2)c^2 + c^4 + a^2 b^2 = (c^2 - a^2)(c^2 - b^2) \neq 0.$$

Ainsi le point (c, c^2, c^4) , qui est dans le support de $\nu_{\bullet, \rho}$, n'appartient pas à \mathcal{P} . Par conséquent $\nu_{\bullet, \rho}$ est non-dégénérée sur \mathbb{R}^3 et le lemme III.7 entraîne alors que la matrice de covariance de $\nu_{\bullet, \rho}$ est inversible, c'est-à-dire que $(\mu_4 - \sigma^4)(\mu_8 - \mu_4^2) \neq (\mu_6 - \sigma^2 \mu_4)^2$. \square

Nous supposons dans la suite que le support de ρ contient au moins cinq points. Le lemme précédent et le théorème III.16 impliquent que $\nabla \Lambda_\bullet$ est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathring{D}_{\Lambda_\bullet}$ dans A_{I_\bullet} , le domaine admissible de I_\bullet . De plus

$$(0, \sigma^2, \mu_4) = \nabla \Lambda_\bullet(0, 0, 0) \in \nabla \Lambda_\bullet(\mathring{D}_{\Lambda_\bullet}) = A_{I_\bullet}.$$

La fonction I_\bullet est C^∞ sur A_{I_\bullet} et, si $(x, y, z) \mapsto (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ désigne la réciproque de $\nabla \Lambda_\bullet$, alors, pour tout $(x, y, z) \in A_{I_\bullet}$,

$$I_\bullet(x, y, z) = xu(x, y, z) + yv(x, y, z) + zw(x, y, z) - \Lambda_\bullet(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)),$$

$$\nabla I_\bullet(x, y, z) = (\nabla \Lambda_\bullet)^{-1}(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)),$$

$$D_{(x, y, z)}^2 I_\bullet = \left(D_{(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))}^2 \Lambda \right)^{-1}.$$

Afin de calculer les dérivées de ces termes, comme dans le paragraphe 13, nous introduisons des fonctions f_j définies par

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad \forall (u, v, w) \in \mathring{D}_{\Lambda_\bullet} \quad f_j(u, v, w) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x^j e^{ux+vx^2+wx^4} d\rho(x)}{\int_{\mathbb{R}} e^{ux+vx^2+wx^4} d\rho(x)}.$$

Les fonctions f_j , $j \in \mathbb{N}$, sont de classe C^∞ sur $\mathring{D}_{\Lambda_\bullet}$ et elles vérifient les propriétés suivantes :
 \star f_0 est la fonction identité sur \mathbb{R}^3 et

$$f_1 = \frac{\partial \Lambda}{\partial u}, \quad f_2 = \frac{\partial \Lambda}{\partial v} \quad \text{et} \quad f_4 = \frac{\partial \Lambda}{\partial w}.$$

\star Pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f_j(0, 0, 0) = \mu_j$ est le $j^{\text{ème}}$ moment de ρ . Il est nul si j est paire puisque ρ est symétrique. De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\frac{\partial f_j}{\partial u} = f_{j+1} - f_j f_1, \quad \frac{\partial f_j}{\partial v} = f_{j+2} - f_j f_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_j}{\partial w} = f_{j+4} - f_j f_4.$$

Pour tout $(u, v, w) \in \mathring{D}_{\Lambda_\bullet}$, nous avons

$$D_{(u,v,w)}^2 \Lambda_\bullet = \begin{pmatrix} f_2 - f_1^2 & f_3 - f_1 f_2 & f_5 - f_4 f_1 \\ f_3 - f_1 f_2 & f_4 - f_2^2 & f_6 - f_4 f_2 \\ f_5 - f_4 f_1 & f_6 - f_4 f_2 & f_8 - f_4^2 \end{pmatrix} (u, v, w).$$

Nous notons

$$g = (f_2 - f_1^2)(f_4 - f_2^2)(f_8 - f_4^2) + 2(f_3 - f_1 f_2)(f_6 - f_4 f_2)(f_5 - f_4 f_1) \\ - (f_4 - f_2^2)(f_5 - f_4 f_1)^2 - (f_2 - f_1^2)(f_6 - f_4 f_2)^2 - (f_8 - f_4^2)(f_3 - f_1 f_2)^2.$$

le déterminant de $D^2 \Lambda_\bullet$. Il s'agit d'une fonction qui ne s'annule pas sur $\mathring{D}_{\Lambda_\bullet}$. Il s'ensuit que

$$\forall (x, y, z) \in A_{I_\bullet} \quad D_{(x,y,z)}^2 I_\bullet = K(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)),$$

où K est une fonction de \mathbb{R}^3 à valeurs dans $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices symétriques d'ordre 3, telle que

$$K_{1,1} = \frac{(f_4 - f_2^2)(f_8 - f_4^2) - (f_6 - f_4 f_2)^2}{g}, \\ K_{2,2} = \frac{(f_2 - f_1^2)(f_8 - f_4^2) - (f_5 - f_4 f_1)^2}{g}, \\ K_{3,3} = \frac{(f_2 - f_1^2)(f_4 - f_2^2) - (f_3 - f_1 f_2)^2}{g}, \\ K_{1,2} = K_{2,1} = \frac{(f_5 - f_4 f_1)(f_6 - f_4 f_2) - (f_3 - f_1 f_2)(f_8 - f_4^2)}{g}, \\ K_{1,3} = K_{3,1} = \frac{(f_3 - f_1 f_2)(f_6 - f_4 f_2) - (f_5 - f_4 f_1)(f_4 - f_2^2)}{g}, \\ K_{2,3} = K_{3,2} = \frac{(f_3 - f_1 f_2)(f_5 - f_4 f_1) - (f_2 - f_1^2)(f_6 - f_4 f_2)}{g}.$$

b) Aide aux calculs

Voici une aide précieuse pour le calcul des dérivées successives des fonctions des f_j , $j \in \mathbb{N}$ (comme la fonction g par exemple). Remarquons qu'à toute fonction φ du type

$$\varphi = \sum_{i=1}^m \alpha_i \prod_{k=1}^N f_k^{\beta_{i,k}},$$

avec $(m, N) \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})^2$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ et $(\beta_{i,k})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq k \leq N} \in \mathbb{N}^{mN}$, nous pouvons associer la matrice $A = A(\varphi) \in \mathcal{M}_{m,N}(\mathbb{N})$ et le vecteur $s = s(\varphi) \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R})$ où

$$s = {}^t(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \quad \text{et} \quad \forall i, k \quad A_{i,k} = \beta_{i,k}.$$

Par exemple, avec les fonctions k_1 et g du paragraphe 27,

$$A(k_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s(k_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$A(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad s(g) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pour connaître la valeur en $(0, 0, 0)$, il suffit alors de supprimer les lignes d'indice i telles qu'il existe un k impair pour lequel $A_{i,k} \neq 0$.

Rappelons les règles de dérivation des f_j , $j \in \mathbb{N}$:

$$\frac{\partial f_j}{\partial u} = f_{j+1} - f_j f_1, \quad \frac{\partial f_j}{\partial v} = f_{j+2} - f_j f_2 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f_j}{\partial w} = f_{j+4} - f_j f_4.$$

Une récurrence simple nous montre que, pour tout $k \geq 1$ et tous entiers i_1, \dots, i_k strictement positifs,

$$\frac{\partial}{\partial u}(f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k}) = \sum_{m=1}^k \left(\prod_{n \neq m} f_{i_n} \right) f_{i_m+1} - k \left(\prod_{m=1}^k f_{i_m} \right) f_1.$$

A $f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k}$ nous associons une matrice A composée d'une seule ligne et $s = (1)$. Les A et s de la dérivée selon u ont $k + 1$ lignes dont la composition est donnée par la formule ci-dessus. Nous avons de même par récurrence

$$\frac{\partial}{\partial v}(f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k}) = \sum_{m=1}^k \left(\prod_{n \neq m} f_{i_n} \right) f_{i_m+2} - k \left(\prod_{m=1}^k f_{i_m} \right) f_2,$$

$$\frac{\partial}{\partial w}(f_{i_1} f_{i_2} \dots f_{i_k}) = \sum_{m=1}^k \left(\prod_{n \neq m} f_{i_n} \right) f_{i_m+4} - k \left(\prod_{m=1}^k f_{i_m} \right) f_4.$$

Connaissant ces règles de calculs de dérivées, le programme (sous MATLAB) suivant prend en

entrée $(A(\varphi), s(\varphi))$ et renvoie

$$\begin{cases} \left(A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right), s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} \right) \right) & \text{si } p = 1, \\ \left(A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right), s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial v} \right) \right) & \text{si } p = 2, \\ \left(A \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right), s \left(\frac{\partial \varphi}{\partial w} \right) \right) & \text{si } p = 4. \end{cases}$$

```
function [R,r]=deriv(A,s,p)
m=length(A(:,1)); N=length(A(1,:)); D=A; A=zeros(m,N+p); A(:,1:N)=D;
if m==length(s)
    t=sum(sum(A))+m;
    B=zeros(t,N+p); w=zeros(t,1); c=0;
    for i=1:m
        mi=sum(A(i,:));
        ai=A(i,:);
        for j=1:mi
            c=c+1; w(c)=s(i); B(c,:)=A(i,:); k=1;
            while ai(k)==0
                k=k+1;
            end
            B(c,k)=B(c,k)-1; B(c,k+p)=B(c,k+p)+1; ai(k)=ai(k)-1;
        end
        c=c+1; w(c)=-s(i)*mi; B(c,:)=A(i,:); B(c,p)=A(i,p)+1;
    end
    end
C=B(1,:);
ww=[w(1)];
for l=2:length(w)
    z=ww;
    for p=1:(length(ww))
        if B(1,:)==C(p,:)
            ww(p)=ww(p)+w(l);
        end
    end
    if ww==z
        C=[C;B(1,:)]; ww=[ww;w(l)];
    end
end
end
end
R=C(1,:);
r=[ww(1)];
for p=2:(length(ww))
    if ww(p)==0
        else R=[R;C(p,:)]; r=[r;ww(p)];
    end
end
end
```

Pour réaliser le calcul des dérivées successives des fonctions des f_j , $j \in \mathbb{N}$, ce programme peut être complété par des programmes analogues (que nous n'exposons pas ici) permettant de prendre en entrée $(A(\varphi), s(\varphi))$ et $(A(\psi), s(\psi))$, où ψ est une fonction du même type que φ , et de renvoyer $(A(\varphi + \psi), s(\varphi + \psi))$ ou $(A(\varphi\psi), s(\varphi\psi))$.

c) Calcul des termes du développement

Remarquons que $g(0, 0, 0) = a\sigma^2$ avec

$$a = (\mu_4 - \sigma^4)(\mu_8 - \mu_4^2) - (\mu_6 - \sigma^2\mu_4)^2 > 0.$$

Nous avons

$$D_{(0, \sigma^2, \mu_4)}^2 I_{\bullet} = \begin{pmatrix} 1/\sigma^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\mu_8 - \mu_4^2)/a & (\mu_4\sigma^2 - \mu_6)/a \\ 0 & (\mu_4\sigma^2 - \mu_6)/a & (\mu_4 - \sigma^4)/a \end{pmatrix}.$$

Soit q la forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^2 donnée par

$$\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 \quad q(y, z) = \frac{\mu_8 - \mu_4^2}{2a} y^2 + \frac{\mu_4\sigma^2 - \mu_6}{a} yz + \frac{\mu_4 - \sigma^4}{2a} z^2.$$

La formule de Taylor entraîne que, à l'ordre 6, le développement de I_{\bullet} au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$ est

$$I_{\bullet}(x, y, z) = \frac{x^2}{2\sigma^2} + q(y - \sigma^2, z - \mu_4) + \sum_{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}} \frac{1}{\alpha! \beta! \gamma!} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} I_{\bullet}}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial z^{\gamma}}(0, \sigma^2, \mu_4) x^{\alpha} (y - \sigma^2)^{\beta} (z - \mu_4)^{\gamma} + o(\|x, y - \sigma^2, z - \mu_4\|^6),$$

avec

$$\mathcal{T} = \{(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{N}^3 : \alpha + \beta + \gamma \in \{3, 4, 5, 6\}\}.$$

Il s'agit donc de calculer tous les termes

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} I_{\bullet}}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial z^{\gamma}}(0, \sigma^2, \mu_4)$$

pour $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$. Afin d'optimiser les calculs, nous allons d'abord déterminer les termes du développement de I_{\bullet} qui sont négligeables devant $Ax^6 + q(y - \sigma^2, z - \mu_4)$ avec $A > 0$. Ces calculs sont plutôt fastidieux et nous pouvons nous aider pour cela du programme introduit dans le paragraphe 27.b).

i) Les termes non négligeables

Lemme X.2. Soient $A > 0$ et q une forme quadratique symétrique définie positive. Alors, au voisinage de $(0, 0, 0)$,

$$\|x, y, z\|^6 = O(Ax^6 + q(y, z)).$$

Pour tout triplet d'entiers (α, β, γ) , nous avons

$$\frac{\alpha}{3} + \beta + \gamma > 2 \implies \lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} \frac{x^{\alpha} y^{\beta} z^{\gamma}}{Ax^6 + q(y, z)} = 0.$$

Démonstration. Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, il existe un unique triplet (r, θ, φ) appartenant à $]0, +\infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi]$ et vérifiant

$$\begin{cases} x^3 = r \sin \varphi, \\ y = r \cos \theta \cos \varphi, \\ z = r \sin \theta \cos \varphi. \end{cases}$$

Ainsi

$$Ax^6 + q(y, z) = Ar^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi q(\cos \theta, \sin \theta).$$

Or l'ensemble $\{(\cos\theta, \sin\theta) : \theta \in [0, 2\pi[\}$ est un compact de \mathbb{R}^2 sur lequel la fonction continue q ne s'annule pas. Par conséquent q admet un minimum $m > 0$ et un maximum $M > m$. Ainsi

$$\min(A, m) r^2 \leq Ax^6 + q(y, z) \leq \max(A, m) r^2.$$

Nous obtenons alors

$$\frac{\|x, y, z\|^6}{Ax^6 + q(y, z)} = \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^3}{Ax^6 + q(y, z)} \leq \frac{(r^{2/3} \sin^{2/3} \varphi + r^2 \cos^2 \varphi)^3}{\min(A, m) r^2} = \frac{(1 + r^{4/3})^3}{\min(A, m)}.$$

Il s'agit bien d'une quantité bornée quand r tend vers 0. Ensuite

$$\left| \frac{x^\alpha y^\beta z^\gamma}{Ax^6 + q(y, z)} \right| \leq \frac{|r \sin \varphi|^{\alpha/3} |r \cos \theta \cos \varphi|^\beta |r \sin \theta \cos \varphi|^\gamma}{\min(A, m) r^2} = O(r^{\alpha/3 + \beta + \gamma - 2}).$$

Or la convergence de (x, y, z) vers $(0, 0, 0)$ est équivalente à la convergence de r vers 0. D'où le lemme. \square

Ce lemme assure que les termes de la forme $x^\alpha y^\beta z^\gamma$, $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathcal{T}$, qui sont non négligeables en $(0, \sigma^2, \mu_4)$ devant $Ax^6 + q(y - \sigma^2, z - \mu_4)$ sont tels que

$$\frac{\alpha}{3} + \beta + \gamma \leq 2.$$

Il s'agit donc des triplets $(2, 1, 0)$, $(2, 0, 1)$, $(3, 0, 0)$, $(3, 1, 0)$, $(3, 0, 1)$, $(4, 0, 0)$, $(5, 0, 0)$ et $(6, 0, 0)$. Déterminons les coefficients devant les termes $x^\alpha y^\beta z^\gamma$ associés dans le développement de I_\bullet . Notons

$$\begin{aligned} k_1 &= (f_4 - f_2^2)(f_8 - f_4^2) - (f_6 - f_4 f_2)^2, \\ k_2 &= (f_5 - f_4 f_1)(f_6 - f_4 f_2) - (f_3 - f_1 f_2)(f_8 - f_4^2), \\ k_3 &= (f_3 - f_1 f_2)(f_6 - f_4 f_2) - (f_5 - f_4 f_1)(f_4 - f_2^2). \end{aligned}$$

ii) Les termes d'ordre 3

Commençons par les termes d'ordre 3 qui sont non négligeables devant $Ax^6 + q(y - \sigma^2, z - \mu_4)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 I_\bullet}{\partial x^2 \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 I_\bullet}{\partial x \partial y} \right) = \frac{\partial K_{1,2}(u, v, w)}{\partial x} \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} \times \frac{\partial K_{1,2}}{\partial u}(u, v, w) + \frac{\partial v}{\partial x} \times \frac{\partial K_{1,2}}{\partial v}(u, v, w) + \frac{\partial w}{\partial x} \times \frac{\partial K_{1,2}}{\partial w}(u, v, w). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{\partial^2 I_\bullet}{\partial x \partial y}(0, \sigma^2, \mu_4) = 0 = \frac{\partial^2 I_\bullet}{\partial x \partial z}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{\partial w}{\partial x}(0, \sigma^2, \mu_4), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{\partial^2 I_\bullet}{\partial x^2}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{1}{\sigma^2}, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{\partial^3 I_\bullet}{\partial x^2 \partial y}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\frac{1}{g(0, 0, 0)} \frac{\partial k_2}{\partial u}(0, 0, 0) - \frac{k_2(0, 0, 0)}{g^2(0, 0, 0)} \frac{\partial g}{\partial u}(0, 0, 0) \right).$$

Nous avons $k_2(0, 0, 0) = k_3(0, 0, 0) = 0$ et $g(0, 0, 0) = \sigma^2 k_1(0, 0, 0)$ avec

$$k_1(0, 0, 0) = \mu_8 \mu_4 - \mu_4^3 - \mu_8 \sigma^4 - \mu_6^2 + 2\mu_6 \mu_4 \sigma^2.$$

En utilisant la règle de calcul de dérivation des fonctions f_j , $j \in \mathbb{N}$, nous obtenons

$$\frac{\partial k_2}{\partial u}(0, 0, 0) = -k_1(0, 0, 0),$$

d'où

$$\frac{\partial^3 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^2 \partial y}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{-k_1(0, 0, 0)}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} = -\frac{1}{\sigma^4}.$$

Nous calculons ensuite que

$$\frac{\partial k_1}{\partial u}(0, 0, 0) = \frac{\partial k_3}{\partial u}(0, 0, 0) = 0.$$

Ceci implique de même que

$$\frac{\partial^3 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^3}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{\partial^3 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^2 \partial z}(0, \sigma^2, \mu_4) = 0.$$

Mais nous savions déjà que la dérivée partielle troisième en x de \mathbf{I}_\bullet était nulle en $(0, \sigma^2, \mu_4)$ puisque \mathbf{I}_\bullet est paire en la première variable. Nous avons ainsi montré que

$$\frac{1}{\alpha! \beta! \gamma!} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}(0, \sigma^2, \mu_4) = \begin{cases} -\frac{1}{2\sigma^4} & \text{si } (\alpha, \beta, \gamma) = (2, 1, 0), \\ 0 & \text{si } (\alpha, \beta, \gamma) = (2, 0, 1), \\ 0 & \text{si } (\alpha, \beta, \gamma) = (3, 0, 0). \end{cases}$$

iii) Les termes d'ordre 4

Regardons maintenant les termes non négligeables d'ordre 4 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^4} &= \frac{\partial^2 K_{1,1}(u, v, w)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{\partial K_{1,1}}{\partial u}(u, v, w) + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \frac{\partial K_{1,1}}{\partial v}(u, v, w) + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial K_{1,1}}{\partial w}(u, v, w) \\ &+ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial u^2}(u, v, w) + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial v^2}(u, v, w) + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial w^2}(u, v, w) \\ &+ 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial u \partial v}(u, v, w) + 2 \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial u \partial w}(u, v, w) + 2 \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial v \partial w}(u, v, w). \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{\partial^3 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^3}(0, \sigma^2, \mu_4) = 0 = \frac{\partial^3 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^2 \partial z}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(0, \sigma^2, \mu_4), \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{\partial^3 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^2 \partial y}(0, \sigma^2, \mu_4) = -\frac{1}{\sigma^4}. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^4 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{1}{\sigma^4} \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial u^2}(0, 0, 0) - \frac{1}{\sigma^4} \frac{\partial K_{1,1}}{\partial v}(0, 0, 0).$$

Nous avons

$$\frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial u^2} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 k_1}{\partial u^2} - \frac{2}{g^2} \frac{\partial g}{\partial u} \frac{\partial k_1}{\partial u} - \frac{k_1}{g^2} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} + \frac{2k_1}{g^3} \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2.$$

et la règle de calcul de dérivation des fonctions f_j , $j \in \mathbb{N}$, nous donne

$$\frac{\partial g}{\partial u}(0, 0, 0) = 0$$

si bien que

$$\frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial u^2}(0, 0, 0) = \frac{1}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial^2 k_1}{\partial u^2}(0, 0, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) \right).$$

De plus

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{1,1}}{\partial v}(0, 0, 0) &= \frac{1}{g(0, 0, 0)} \frac{\partial k_1}{\partial v}(0, 0, 0) - \frac{k_1(0, 0, 0)}{g^2(0, 0, 0)} \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) \\ &= \frac{1}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial k_1}{\partial v}(0, 0, 0) - \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) \right). \end{aligned}$$

Nous calculons que

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_1}{\partial v}(0, 0, 0) &= \frac{\partial^2 k_1}{\partial u^2}(0, 0, 0) = -\mu_8 \mu_6 + \mu_{10} \mu_4 - 2\mu_8 \mu_4 \sigma^2 - \mu_{10} \sigma^4 + 3\mu_8 \sigma^6 \\ &\quad - \mu_6 \mu_4^2 + 3\mu_4^3 \sigma^2 + 4\mu_6^2 \sigma^2 - 6\mu_6 \mu_4 \sigma^4. \end{aligned}$$

Cette quantité est égale, après factorisation par $k_1(0, 0, 0)$, à

$$-3\sigma^2 k_1(0, 0, 0) + \mu_{10}(\mu_4 - \sigma^4) + \mu_8(\mu_4 \sigma^2 - \mu_6) + \mu_6(\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2).$$

Nous calculons de même que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) &= -(\mu_4 + 4\sigma^4)k_1(0, 0, 0) + \sigma^2 \eta, \\ \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) &= (\mu_4 - 4\sigma^4)k_1(0, 0, 0) + \sigma^2 \eta, \end{aligned}$$

où $\eta = \mu_{10}(\mu_4 - \sigma^4) + \mu_8(\mu_4 \sigma^2 - \mu_6) + \mu_6(\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2)$. Finalement

$$\frac{\partial^4 I_\bullet}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{(-3\sigma^4 + \mu_4 + 4\sigma^4 + 3\sigma^4 + \mu_4 - 4\sigma^4)k_1(0, 0, 0)}{\sigma^8 k_1(0, 0, 0)} = \frac{2\mu_4}{\sigma^8}.$$

Nous avons de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 I_\bullet}{\partial x^3 \partial y}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{\partial^2 K_{1,2}(u, v, w)}{\partial x^2}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{1}{\sigma^4} \frac{\partial^2 K_{1,2}}{\partial u^2}(0, 0, 0) - \frac{1}{\sigma^4} \frac{\partial K_{1,2}}{\partial v}(0, 0, 0) \\ &= \frac{1}{\sigma^8 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial^2 k_2}{\partial u^2} - \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \sigma^2 \frac{\partial k_2}{\partial v} + \frac{k_2}{k_1} \frac{\partial g}{\partial v} \right) (0, 0, 0) \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial^4 I_\bullet}{\partial x^3 \partial z}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{1}{\sigma^8 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial^2 k_3}{\partial u^2} - \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2} - \sigma^2 \frac{\partial k_3}{\partial v} + \frac{k_3}{k_1} \frac{\partial g}{\partial v} \right) (0, 0, 0).$$

Or $k_2(0, 0, 0) = k_3(0, 0, 0) = 0$ et nous calculons que

$$\frac{\partial^2 k_2}{\partial u^2}(0, 0, 0) = \frac{\partial k_2}{\partial v}(0, 0, 0) = \frac{\partial^2 k_3}{\partial u^2}(0, 0, 0) = \frac{\partial k_3}{\partial v}(0, 0, 0) = 0.$$

Nous avons ainsi montré que

$$\frac{1}{\alpha! \beta! \gamma!} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} I_\bullet}{\partial x^\alpha \partial y^\beta \partial z^\gamma}(0, \sigma^2, \mu_4) = \begin{cases} \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^4} & \text{si } (\alpha, \beta, \gamma) = (4, 0, 0), \\ 0 & \text{si } (\alpha, \beta, \gamma) = (3, 1, 0), \\ 0 & \text{si } (\alpha, \beta, \gamma) = (3, 0, 1). \end{cases}$$

iv) Les termes d'ordre 5 et 6

Il nous reste à présent à montrer que

$$\frac{1}{120} \frac{\partial^5 I_\bullet}{\partial x^5}(0, \sigma^2, \mu_4) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{720} \frac{\partial^6 I_\bullet}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) = A > 0.$$

Par parité de I_\bullet en sa première coordonnée, nous avons en fait immédiatement que sa dérivée partielle d'ordre 5 en x est nulle. Déterminons donc la dérivée partielle d'ordre 6 selon x . Commençons par noter que

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{\partial^4 I_\bullet}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{2\mu_4}{\sigma^8},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^3 v}{\partial x^3}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{\partial^4 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^3 \partial y}(0, \sigma^2, \mu_4) = 0 = \frac{\partial^4 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^3 \partial z}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3}(0, \sigma^2, \mu_4), \\ \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{\partial^5 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^5}(0, \sigma^2, \mu_4) = 0.\end{aligned}$$

Nous connaissons donc les dérivées partielles selon x en $(0, \sigma^2, \mu_4)$ des fonctions u , v , et w jusqu'à l'ordre 3. Ecrivons alors la dérivée partielle de \mathbf{I}_\bullet d'ordre 6 selon x , évaluée en $(0, \sigma^2, \mu_4)$, en fonction de $K_{1,1}$, u , v , et w en ne gardant que les termes dont nous ne savons pas encore si ils sont nuls ou pas :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^6 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^6}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{\partial^4 K_{1,1}(u, v, w)}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) \frac{\partial K_{1,1}}{\partial v}(0, 0, 0) \\ &\quad + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) \frac{\partial K_{1,1}}{\partial w}(0, 0, 0) + 3 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, \sigma^2, \mu_4) \right)^2 \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial v^2}(0, 0, 0) \\ &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(0, \sigma^2, \mu_4) \right)^4 \frac{\partial^4 K_{1,1}}{\partial u^4}(0, 0, 0) + 4 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, \sigma^2, \mu_4) \frac{\partial u}{\partial x}(0, \sigma^2, \mu_4) \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial u^2}(0, 0, 0) \\ &\quad + 6 \left(\frac{\partial u}{\partial x}(0, \sigma^2, \mu_4) \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, \sigma^2, \mu_4) \frac{\partial^3 K_{1,1}}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0).\end{aligned}$$

Pour obtenir la dérivée partielle quatrième de \mathbf{I}_\bullet selon x (page 170 et les suivantes), nous avons calculé que

$$\frac{\partial K_{1,1}}{\partial v}(0, 0, 0) = \frac{\sigma^4 - \mu_4}{\sigma^4} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial u^2}(0, 0, 0) = \frac{\mu_4 + \sigma^4}{\sigma^4}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}\frac{\partial^6 \mathbf{I}_\bullet}{\partial x^6}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{3}{\sigma^8} \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial v^2}(0, 0, 0) + \frac{8\mu_4(\mu_4 + \sigma^4)}{\sigma^{14}} - \frac{6}{\sigma^8} \frac{\partial^3 K_{1,1}}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^8} \frac{\partial^4 K_{1,1}}{\partial u^4}(0, 0, 0) + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) \frac{\sigma^4 - \mu_4}{\sigma^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) \frac{\partial K_{1,1}}{\partial w}(0, 0, 0).\end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{\partial^3 K_{1,2}(u, v, w)}{\partial x^3}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(0, \sigma^2, \mu_4) \frac{\partial K_{1,2}}{\partial u}(0, 0, 0) \\ &\quad + \left(\frac{\partial u}{\partial x}(0, \sigma^2, \mu_4) \right)^3 \frac{\partial^3 K_{1,2}}{\partial u^3}(0, 0, 0) + 3 \frac{\partial u}{\partial x}(0, \sigma^2, \mu_4) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(0, \sigma^2, \mu_4) \frac{\partial^2 K_{1,2}}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) \\ &= \frac{1}{\sigma^8} \left(2\mu_4 \frac{\partial K_{1,2}}{\partial u}(0, 0, 0) + \sigma^2 \frac{\partial^3 K_{1,2}}{\partial u^3}(0, 0, 0) - 3\sigma^2 \frac{\partial^2 K_{1,2}}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) \right)\end{aligned}$$

et nous avons déjà calculé que

$$\frac{\partial K_{1,2}}{\partial u}(0, 0, 0) = \frac{1}{g(0, 0, 0)} \frac{\partial k_2}{\partial u}(0, 0, 0) = -\frac{1}{\sigma^2}.$$

En dérivant et en évaluant en $(0, 0, 0)$, nous obtenons

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 K_{1,2}}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) &= \frac{1}{g(0, 0, 0)} \frac{\partial^2 k_2}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) - \frac{1}{g^2(0, 0, 0)} \frac{\partial k_2}{\partial u}(0, 0, 0) \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) \\ &= \frac{1}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial^2 k_2}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) + \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) \right).\end{aligned}$$

La règle de calcul de dérivation des fonctions f_j , $j \in \mathbb{N}$, nous donne

$$\frac{\partial^2 k_2}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) = 3\sigma^2 k_1(0, 0, 0) - \mu_{10}(\mu_4 - \sigma^4) - \mu_8(\mu_4 \sigma^2 - \mu_6) - \mu_6(\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2)$$

et nous avons calculé plus haut (page 171) la dérivée partielle de g selon v en $(0, 0, 0)$. Ainsi

$$\frac{\partial^2 K_{1,2}}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) = \frac{3\sigma^4 k_1(0, 0, 0) + (\mu_4 - 4\sigma^4)k_1(0, 0, 0)}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} = \frac{\mu_4 - \sigma^4}{\sigma^4}.$$

Enfin, en utilisant le fait que la dérivée partielle de g selon u en $(0, 0, 0)$ est nulle, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 K_{1,2}}{\partial u^3}(0, 0, 0) &= \frac{1}{g(0, 0, 0)} \frac{\partial^3 k_2}{\partial u^3}(0, 0, 0) - \frac{3}{g^2(0, 0, 0)} \frac{\partial k_2}{\partial u}(0, 0, 0) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) \\ &= \frac{1}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial^3 k_2}{\partial u^3}(0, 0, 0) + 3 \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) \right). \end{aligned}$$

Nous calculons que

$$\frac{\partial^3 k_2}{\partial u^3}(0, 0, 0) = 9\sigma^2 k_1(0, 0, 0) - 3\mu_{10}(\mu_4 - \sigma^4) - 3\mu_8(\mu_4 \sigma^2 - \mu_6) - 3\mu_6(\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2)$$

et nous avons calculé plus haut (page 171) la dérivée partielle seconde de g selon u en $(0, 0, 0)$. D'où

$$\frac{\partial^2 K_{1,2}}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) = \frac{9\sigma^4 k_1(0, 0, 0) - 3(\mu_4 + 4\sigma^4)k_1(0, 0, 0)}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} = \frac{-3(\mu_4 + \sigma^4)}{\sigma^4}.$$

Finalement

$$\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{1}{\sigma^8} \left(\frac{-2\mu_4}{\sigma^2} + \frac{-3(\mu_4 + \sigma^4)}{\sigma^2} - 3 \frac{\mu_4 - \sigma^4}{\sigma^2} \right) = \frac{-8\mu_4}{\sigma^{10}}.$$

De même nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{1}{\sigma^{10} k_1(0, 0, 0)} \left(2\mu_4 \frac{\partial k_3}{\partial u}(0, 0, 0) - 3\sigma^2 \frac{\partial^2 k_3}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) + \sigma^2 \frac{\partial^3 k_3}{\partial u^3}(0, 0, 0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{k_1(0, 0, 0)} \frac{\partial k_3}{\partial u}(0, 0, 0) \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) - \frac{3}{k_1(0, 0, 0)} \frac{\partial k_3}{\partial u}(0, 0, 0) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) \right). \end{aligned}$$

Or nous calculons que

$$\frac{\partial k_3}{\partial u}(0, 0, 0) = \frac{\partial^2 k_3}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 k_3}{\partial u \partial v}(0, 0, 0) = 2k_1(0, 0, 0)$$

si bien que

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{2}{\sigma^8}.$$

Ensuite nous avons

$$\frac{\partial K_{1,1}}{\partial w}(0, 0, 0) = \frac{1}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial k_1}{\partial w}(0, 0, 0) - \frac{\partial g}{\partial w}(0, 0, 0) \right).$$

Nous calculons que la dérivée partielle de k_1 selon w en $(0, 0, 0)$ est égale à

$$-3\mu_4 k_1(0, 0, 0) + 2\mu_{10}(\mu_4 \sigma^2 - \mu_6) + \mu_{12}(\mu_4 - \sigma^4) + \mu_8^2 + \mu_6^2 \mu_4 - 2\mu_8 \mu_4^2$$

et que la dérivée partielle de g selon w en $(0, 0, 0)$ est égale à

$$(\mu_6 - 4\mu_4 \sigma^2)k_1(0, 0, 0) + 2\mu_{10} \sigma^2 (\mu_4 \sigma^2 - \mu_6) + \mu_{12} \sigma^2 (\mu_4 - \sigma^4) + \sigma^2 (\mu_8^2 + \mu_6^2 \mu_4 - 2\mu_8 \mu_4^2).$$

Ainsi

$$\frac{\partial K_{1,1}}{\partial w}(0, 0, 0) = \frac{-3\sigma^2 \mu_4 k_1(0, 0, 0) - (\mu_6 - 4\mu_4 \sigma^2)k_1(0, 0, 0)}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} = \frac{\mu_4 \sigma^2 - \mu_6}{\sigma^4}.$$

Insérons ces derniers résultats dans l'expression de la page 172 de la dérivée sixième de I_\bullet selon x en $(0, \sigma^2, \mu_4)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 I_\bullet}{\partial x^6}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{3}{\sigma^8} \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial v^2}(0, 0, 0) - \frac{6}{\sigma^8} \frac{\partial^3 K_{1,1}}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) \\ &\quad + \frac{1}{\sigma^8} \frac{\partial^4 K_{1,1}}{\partial u^4}(0, 0, 0) + \frac{16\mu_4^2 - 2\mu_6\sigma^2 + 2\mu_4\sigma^4}{\sigma^{14}}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial v^2} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2} - \frac{2}{g^2} \frac{\partial g}{\partial v} \frac{\partial k_1}{\partial v} - \frac{k_1}{g^2} \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} + \frac{2k_1}{g^3} \left(\frac{\partial g}{\partial v} \right)^2.$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial v^2}(0, 0, 0) &= \frac{1}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2}(0, 0, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0, 0) \right) \\ &\quad - \frac{2}{\sigma^6 k_1^2(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial k_1}{\partial v}(0, 0, 0) - \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) \right) \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) \\ &= \frac{1}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2} - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2} - 2\sigma^2 \frac{\partial K_{1,1}}{\partial v} \frac{\partial g}{\partial v} \right) (0, 0, 0). \end{aligned}$$

Nous connaissons déjà les valeurs en $(0, 0, 0)$ des dérivées partielles de g et k_1 selon v . De plus, la règle de calcul de dérivation des fonctions f_j , $j \in \mathbb{N}$, nous donne, après factorisation,

$$\begin{aligned} \sigma^2 \frac{\partial^2 k_1}{\partial v^2}(0, 0, 0) - \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(0, 0, 0) &= (7\sigma^2 \mu_4 - \mu_6 - 8\sigma^6) k_1(0, 0, 0) - 2\mu_{10}(\mu_4 - \sigma^4)^2 \\ &\quad + 2\mu_6(\mu_4 - \sigma^4)(\mu_8 + \mu_4^2 - 2\sigma^2 \mu_6) - 2\sigma^2(\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2)^2. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \sigma^4 k_1(0, 0, 0) \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial v^2}(0, 0, 0) &= (7\sigma^2 \mu_4 - \mu_6 - 8\sigma^6) k_1(0, 0, 0) - 2\mu_{10}(\mu_4 - \sigma^4)^2 \\ &\quad - 2(\sigma^4 - \mu_4) \left(\mu_{10}(\mu_4 - \sigma^4) + \mu_8(\mu_4 \sigma^2 - \mu_6) + \mu_6(\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2) \right) \\ &\quad + 2\mu_6(\mu_4 - \sigma^4)(\mu_8 + \mu_4^2 - 2\sigma^2 \mu_6) - 2\sigma^2(\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2)^2 - \frac{2(\sigma^4 - \mu_4)(\mu_4 - 4\sigma^4) k_1(0, 0, 0)}{\sigma^2}, \end{aligned}$$

ce qui est égal à

$$\frac{2\mu_4^2 + \sigma^4 \mu_4 + \sigma^2 \mu_6 - 4\sigma^8}{\sigma^2} k_1(0, 0, 0) + 2\sigma^2 \left((\mu_4 - \sigma^4)(\mu_4 \mu_8 - \mu_6^2) - (\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2)^2 \right).$$

En développant nous obtenons $(\mu_4 - \sigma^4)(\mu_4 \mu_8 - \mu_6^2) - (\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2)^2 = \mu_4 k_1(0, 0, 0)$. Par conséquent

$$\frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial v^2}(0, 0, 0) = \frac{2\mu_4^2 - \sigma^4 \mu_4 - \sigma^2 \mu_6}{\sigma^6}.$$

Ensuite, sachant que les dérivées partielles de g et k_1 selon u sont nulles en $(0, 0, 0)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 K_{1,1}}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) &= \frac{1}{g(0, 0, 0)} \frac{\partial^3 k_1}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) - \frac{1}{g^2(0, 0, 0)} \frac{\partial^2 k_1}{\partial u^2}(0, 0, 0) \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) \\ &\quad - \frac{1}{g^2(0, 0, 0)} \frac{\partial k_1}{\partial v}(0, 0, 0) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) + \frac{2k_1(0, 0, 0)}{g^3(0, 0, 0)} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) \\ &\quad - \frac{k_1(0, 0, 0)}{g^2(0, 0, 0)} \frac{\partial^3 g}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0). \end{aligned}$$

Comme dans le calcul de $(\partial^2 K_{1,1}/\partial v^2)(0, 0, 0)$, nous remarquons que cette dernière expression peut s'exprimer en fonction de la dérivée partielle seconde de $K_{1,1}$ selon u et de la dérivée partielle de $K_{1,1}$ selon v :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 K_{1,1}}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) &= \frac{1}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial^3 k_1}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) - \frac{\partial^3 g}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) \right. \\ &\quad \left. - \sigma^2 \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial u^2}(0, 0, 0) \frac{\partial g}{\partial v}(0, 0, 0) - \sigma^2 \frac{\partial K_{1,1}}{\partial v}(0, 0, 0) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) \right). \end{aligned}$$

Ceci est égal, après factorisations, à

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial^3 k_1}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) - \frac{\partial^3 g}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) - \frac{2(\mu_4^2 - 4\sigma^8)}{\sigma^2} k_1(0, 0, 0) \right. \\ \left. - 2\sigma^4 (\mu_{10}(\mu_4 - \sigma^4) + \mu_8(\mu_4 \sigma^2 - \mu_6) + \mu_6(\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2)) \right). \end{aligned}$$

La règle de calcul de dérivation des fonctions f_j , $j \in \mathbb{N}$, nous donne, après factorisation par $k_1(0, 0, 0)$,

$$\begin{aligned} \sigma^2 \frac{\partial^3 k_1}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) - \frac{\partial^3 g}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) &= (\sigma^2 \mu_4 + \mu_6 - 8\sigma^6) k_1(0, 0, 0) \\ &\quad + 2\sigma^4 (\mu_{10}(\mu_4 - \sigma^4) + \mu_8(\mu_4 \sigma^2 - \mu_6) + \mu_6(\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2)). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 K_{1,1}}{\partial u^2 \partial v}(0, 0, 0) &= \frac{1}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} \left(- \frac{2(\mu_4^2 - 4\sigma^8)}{\sigma^2} + \sigma^2 \mu_4 + \mu_6 - 8\sigma^6 \right) k_1(0, 0, 0) \\ &= \frac{-2\mu_4^2 + \sigma^4 \mu_4 + \sigma^2 \mu_6}{\sigma^6}. \end{aligned}$$

Il ne nous reste plus qu'à calculer la dérivée quatrième de $K_{1,1}$ selon u en $(0, 0, 0)$. Sachant que les dérivées partielles de g et k_1 selon u sont nulles en $(0, 0, 0)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 K_{1,1}}{\partial u^4}(0, 0, 0) &= \frac{1}{g(0, 0, 0)} \frac{\partial^4 k_1}{\partial u^4}(0, 0, 0) - \frac{k_1(0, 0, 0)}{g^2(0, 0, 0)} \frac{\partial^4 g}{\partial u^4}(0, 0, 0) \\ &\quad - \frac{6}{g^2(0, 0, 0)} \frac{\partial^2 k_1}{\partial u^2}(0, 0, 0) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) + \frac{6k_1(0, 0, 0)}{g^3(0, 0, 0)} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) \right)^2. \end{aligned}$$

Ceci est encore égal, après factorisation, à

$$\frac{1}{\sigma^4 k_1(0, 0, 0)} \left(\sigma^2 \frac{\partial^4 k_1}{\partial u^4}(0, 0, 0) - \frac{\partial^4 g}{\partial u^4}(0, 0, 0) - 6\sigma^2 \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial u^2}(0, 0, 0) \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) \right).$$

Nous calculons que

$$\begin{aligned} \sigma^2 \frac{\partial^4 k_1}{\partial u^4}(0, 0, 0) - \frac{\partial^4 g}{\partial u^4}(0, 0, 0) &= -(23\sigma^2 \mu_4 + 5\mu_6 + 24\sigma^6) k_1(0, 0, 0) \\ &\quad + 6(\mu_4 + \sigma^4) (\mu_{10}(\mu_4 - \sigma^4) + \mu_8(\mu_4 \sigma^2 - \mu_6) + \mu_6(\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2)) \end{aligned}$$

et nous avons déjà calculé que

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(0, 0, 0) \frac{\partial^2 K_{1,1}}{\partial u^2}(0, 0, 0) &= \frac{\mu_4 + \sigma^4}{\sigma^4} \left(-(\mu_4 + 4\sigma^4) k_1(0, 0, 0) \right. \\ &\quad \left. + \sigma^2 \mu_{10}(\mu_4 - \sigma^4) + \sigma^2 \mu_8(\mu_4 \sigma^2 - \mu_6) + \sigma^2 \mu_6(\mu_6 \sigma^2 - \mu_4^2) \right). \end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} \sigma^4 k_1(0, 0, 0) \frac{\partial^4 K_{1,1}}{\partial u^4}(0, 0, 0) &= -(23\sigma^2 \mu_4 + 5\mu_6 + 24\sigma^6) k_1(0, 0, 0) \\ &\quad + \frac{6(\mu_4 + \sigma^4)(\mu_4 + 4\sigma^4)}{\sigma^2} - k_1(0, 0, 0). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\frac{\partial^4 K_{1,1}}{\partial u^4}(0, 0, 0) = \frac{7\sigma^4 \mu_4 - 5\mu_6 \sigma^2 + 6\mu_4^2}{\sigma^6}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 I_{\bullet}}{\partial x^6}(0, \sigma^2, \mu_4) &= \frac{3(2\mu_4^2 - \sigma^4 \mu_4 - \sigma^2 \mu_6)}{\sigma^{14}} - \frac{6(-2\mu_4^2 + \sigma^4 \mu_4 + \sigma^2 \mu_6)}{\sigma^{14}} \\ &\quad + \frac{7\sigma^4 \mu_4 - 5\mu_6 \sigma^2 + 6\mu_4^2}{\sigma^{14}} + \frac{16\mu_4^2 - 2\mu_6 \sigma^2 + 2\mu_4 \sigma^4}{\sigma^{14}}. \end{aligned}$$

Nous avons montré que

$$\frac{\partial^6 I_{\bullet}}{\partial x^6}(0, \sigma^2, \mu_4) = \frac{40\mu_4^2 - 16\sigma^2 \mu_6}{\sigma^{14}}$$

et donc

$$\frac{1}{\alpha! \beta! \gamma!} \frac{\partial^{\alpha+\beta+\gamma} I_{\bullet}}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta} \partial z^{\gamma}}(0, \sigma^2, \mu_4) = \begin{cases} 0 & \text{si } (\alpha, \beta, \gamma) = (5, 0, 0), \\ \frac{5\mu_4^2 - 2\sigma^2 \mu_6}{90\sigma^{14}} & \text{si } (\alpha, \beta, \gamma) = (6, 0, 0). \end{cases}$$

v) Conclusion

Le terme A cherché est donc $(5\mu_4^2 - 2\sigma^2 \mu_6)/(90\sigma^{14})$. La proposition suivante découle des paragraphes précédents.

Proposition X.3. *Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} dont le support contient au moins cinq points et telle que $(0, 0, 0) \in \overset{\circ}{D}_{\Lambda_{\bullet}}$. Introduisons q la forme quadratique définie positive sur \mathbb{R}^2 donnée par*

$$\forall (y, z) \in \mathbb{R}^2 \quad q(y, z) = \frac{\mu_8 - \mu_4^2}{2a} y^2 + \frac{\mu_4 \sigma^2 - \mu_6}{a} yz + \frac{\mu_4 - \sigma^4}{2a} z^2.$$

Supposons que $5\mu_4^2 > 2\sigma^2 \mu_6$. Alors, au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$,

$$I_{\bullet}(x, y, z) - \frac{x^2}{2\sigma^2} + \frac{x^2(y - \sigma^2)}{2\sigma^4} - \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8} \sim \frac{(5\mu_4^2 - 2\sigma^2 \mu_6)x^6}{90\sigma^{14}} + q(y - \sigma^2, z - \mu_4).$$

d) Développement de $I_{\bullet} - F - R$: Mise en évidence d'un problème

Au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$,

$$F(x, y) + R(x, y, z) = \frac{x^2}{2\sigma^2} \frac{1}{1+h} + \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8} \frac{1}{(1+h)^4} + \frac{(z - \mu_4)x^4}{12\sigma^8} \frac{1}{(1+h)^4},$$

où $h = (y - \sigma^2)/\sigma^2$. Nous avons, au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1+h} = 1 - h + h^2 - h^3 + h^4 + o(h^4),$$

$$\frac{1}{(1+h)^4} = 1 - 4h + 10h^2 - 20h^3 + o(h^3).$$

Donc, au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$,

$$\begin{aligned} F(x, y) + R(x, y, z) &= \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{x^2(y - \sigma^2)}{2\sigma^4} + \frac{x^2(y - \sigma^2)^2}{2\sigma^6} + \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8} - \frac{x^2(y - \sigma^2)^3}{2\sigma^8} - \frac{\mu_4 x^4(y - \sigma^2)}{3\sigma^{10}} \\ &+ \frac{x^4(z - \mu_4)}{12\sigma^8} + \frac{x^2(y - \sigma^2)^4}{2\sigma^{10}} + \frac{5\mu_4 x^4(y - \sigma^2)^2}{6\sigma^{12}} - \frac{x^4(y - \sigma^2)(z - \mu_4)}{3\sigma^{10}} + o(\|x, y - \sigma^2, z - \mu_4\|^6). \end{aligned}$$

Le lemme X.2 implique que, au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$,

$$F(x, y) + R(x, y, z) = \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{x^2(y - \sigma^2)}{2\sigma^4} + \frac{\mu_4 x^4}{12\sigma^8} + o\left(\frac{(5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6)x^6}{90\sigma^{14}} + q(y - \sigma^2, z - \mu_4)\right).$$

La proposition suivante découle de la proposition X.3.

Proposition X.4. *Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} dont le support contient au moins cinq points. Supposons que*

$$(0, 0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda \quad \text{et} \quad 5\mu_4^2 > 2\sigma^2\mu_6.$$

Alors, au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$,

$$I_\bullet(x, y, z) - F(x, y) - R(x, y, z) \sim \frac{(5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6)x^6}{90\sigma^{14}} + q(y - \sigma^2, z - \mu_4).$$

Les calculs du paragraphe précédent montrent aussi que, au voisinage de 0,

$$I_\bullet(x, \sigma^2, \mu_4) - F(x, \sigma^2) - R(x, \sigma^2, \mu_4) \sim \frac{5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6}{90\sigma^{14}} x^6.$$

Par conséquent, si $5\mu_4^2 < 2\sigma^2\mu_6$ alors $I_\bullet - F - R$ n'admet pas de minimum en $(0, \sigma^2, \mu_4)$. Il n'est donc pas possible de montrer que $I_\bullet - F - R$ admet un unique minimum en toute généralité.

Si ρ est une gaussienne centrée de variance σ^2 , nous avons $5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6 = 15\sigma^8 > 0$. Nous pouvons sans mal trouver une mesure de probabilité sur \mathbb{R} telle que $5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6 < 0$. Il suffit par exemple de prendre une loi dont le moment d'ordre 6 explose par rapport au moment d'ordre 4, par exemple la mesure ρ de densité

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^6} \mathbb{1}_{[-5,5]}(x) \left(\int_{-5}^5 \frac{dy}{1+y^6} \right)^{-1}$$

par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Ses moments se calculent facilement à l'aide de décomposition en éléments simples des fractions rationnelles $X^\alpha/(1+X^6)$, $\alpha \in \{2, 4, 6\}$. Nous calculons que $5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6$ est négative (une valeur approchée est -0.483).

Regardons ce que nous obtenons pour $\rho = (1-2b)\delta_0 + b\delta_{-c} + b\delta_c$ avec $c > 0$ et $b \in]0, 1/2[$. Un calcul nous donne que $I_\bullet(x, y, z)$ est finie si et seulement si $y \in [0, c^2]$, $x \in [-y/c, y/c]$ et $z = yc^2$. Dans ce cas $I_\bullet(x, y, z)$ est égal à

$$\frac{1}{2c^2} ((y+cx) \ln(y+cx) + (y-cx) \ln(y-cx)) + \left(1 - \frac{y}{c^2}\right) \ln \left(\frac{1}{1-2b} \left(1 - \frac{y}{c^2}\right) \right) - \frac{y}{c^2} \ln(2bc^2).$$

Une étude de fonction nous permet de montrer que $I_\bullet - F - R$ admet un unique minimum en $(0, 2bc^2, 2bc^4) = (0, \sigma^2, \mu_4)$. Nous vérifions d'ailleurs que, dans ce cas, $5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6 = 12b^2c^8 > 0$.

Hélas nous ne sommes pas parvenus à trouver une classe de mesures de probabilité intéressante telles que cette inégalité soit vraie. Nous allons donc « forcer » le terme d'interaction à vérifier cette condition de minimum, tout en conservant l'équivalent en $(0, \sigma^2, \mu_4)$ obtenu à la proposition X.4.

28 A la recherche d'un terme d'interaction

Le terme d'interaction actuel est

$$F(x_1 + \cdots + x_n, x_1^2 + \cdots + x_n^2) + R(x_1 + \cdots + x_n, x_1^2 + \cdots + x_n^2, x_1^4 + \cdots + x_n^4).$$

Il s'écrit encore

$$nF\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}\right) + nR\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}, \frac{x_1^2 + \cdots + x_n^2}{n}, \frac{x_1^4 + \cdots + x_n^4}{n}\right).$$

Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} . Donnons-nous une fonction H à valeurs réelles, définie sur Θ^* et telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$Z_{H,n} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(H(x_1 + \cdots + x_n, x_1^2 + \cdots + x_n^2, x_1^4 + \cdots + x_n^4)) \mathbf{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

est finie. Considérons alors $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$, la mesure de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_{H,n}} \exp(H(x_1 + \cdots + x_n, x_1^2 + \cdots + x_n^2, x_1^4 + \cdots + x_n^4)) \mathbf{1}_{\{x_1^2 + \cdots + x_n^2 > 0\}}$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$. Nous posons à nouveau

$$S_n = X_n^1 + \cdots + X_n^n, \quad T_n = (X_n^1)^2 + \cdots + (X_n^n)^2 \quad \text{et} \quad U_n = (X_n^1)^4 + \cdots + (X_n^n)^4.$$

a) Critères de construction

Nous allons décrire une classe de fonctions d'interaction H telles que, pour tout $n \geq 1$, la fonction

$$(x, y, z) \mapsto I_\bullet(x, y, z) - \frac{1}{n}H(nx, ny, nz)$$

admet un unique minimum en $(0, \sigma^2, \mu_4)$ avec le même équivalent que $I_\bullet - F$ au voisinage de celui-ci.

Hypothèses X.5. Soit ρ une mesure de probabilité symétrique dont le support contient au moins cinq points et telle que $(0, 0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$. Notons σ^2 la variance de ρ et μ_4 et μ_6 les moments d'ordre respectifs 4 et 6 de ρ . Supposons que

$$5\mu_4^2 > 2\sigma^2\mu_6.$$

Soit H une fonction de Θ^* dans \mathbb{R} . Nous supposons qu'il existe $(R_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions semi-continues supérieurement à valeurs réelles et définies sur Θ^* vérifiant, pour tout $(x, y, z) \in \Theta^*$,

$$\forall n \geq 1 \quad 0 \leq R_{n+1}(x, y, z) \leq R_n(x, y, z) \leq R(x, y, z),$$

$$\forall n \geq 1 \quad H(x, y, z) - F(x, y) = nR_n\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}, \frac{z}{n}\right),$$

$$R_n(x, y, z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

et, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$n(R - R_n)\left(\frac{x}{n^{1/6}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2, \frac{z}{\sqrt{n}} + \mu_4\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Enfin il existe $\tau \geq 0$ et $\beta > 0$ tels que, pour tout $(x, y, z, s, t, u) \in \mathbb{R}^6$ et pour n assez grand,

$$\|(x, y - \sigma^2, z - \mu_4)\| \leq \beta, \|(s, t, u)\| \leq \beta \implies |R_n((x, y, z) + (s, t, u)) - R_n(x, y, z)| \leq n^\tau \|(s, t, u)\|.$$

Proposition X.6. *Supposons que ρ et H vérifient les hypothèses X.5. Alors, pour tout (x, y, z) dans \mathbb{R}^3 ,*

$$n(\mathbf{I}_\bullet - F - R_n) \left(\frac{x}{n^{1/6}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2, \frac{z}{\sqrt{n}} + \mu_4 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q(y, z) + \frac{5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6}{90\sigma^{14}} x^6,$$

où q est la forme quadratique définie à la proposition X.4.

De plus, pour tout compact K de \mathbb{R}^3 inclus dans Θ^* dont l'intérieur contient $(0, \sigma^2, \mu_4)$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $\mathbf{I}_\bullet - F - R_{n_0}$ admet un unique minimum sur K en $(0, \sigma^2, \mu_4)$.

Nous avons besoin du lemme suivant, variante du théorème de Dini :

Lemme X.7. *Soit $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de fonctions définies sur un compact X qui converge simplement vers une fonction g définie sur X . Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $g_n - g$ est semi-continue supérieurement, alors $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur X vers g .*

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $h_n = g_n - g$. La suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante et converge simplement vers 0. Fixons-nous $\varepsilon > 0$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n(\varepsilon) = \{x \in X : h_n(x) < \varepsilon\}.$$

Ces ensembles sont ouverts car, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction h_n est semi-continue supérieurement. La convergence de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nous assure que

$$X \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n(\varepsilon).$$

Nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini : il existe $N > 0$ tel que

$$X \subset \bigcup_{n \leq N} A_n(\varepsilon).$$

Par décroissance de la suite $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$, il vient $X \subset A_N(\varepsilon)$. Et donc

$$\forall x \in X \quad \exists N > 0 \quad n \geq N \implies h_n(x) \leq h_N(x) < \varepsilon.$$

D'où le lemme. □

Démonstration de la proposition X.6. Pour tout $n \geq 1$, posons

$$G_n = \mathbf{I}_\bullet - F - R_n = (\mathbf{I}_\bullet - F - R) + (R - R_n).$$

La proposition X.4 et les hypothèses X.5 assurent que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$n(\mathbf{I}_\bullet - F - R_n) \left(\frac{x}{n^{1/6}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2, \frac{z}{\sqrt{n}} + \mu_4 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q(y, z) + \frac{5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6}{90\sigma^{14}} x^6.$$

Ensuite la fonction $R - R_n$ est positive donc $G_n \geq \mathbf{I}_\bullet - F - R$ et, d'après la proposition X.4, il existe un ouvert U centré en $(0, \sigma^2, \mu_4)$ tel que

$$\forall (x, y, z) \in U \quad G_n(x, y, z) \geq \frac{1}{2}q(y - \sigma^2, z - \mu_4) + \frac{5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6}{180\sigma^{14}} x^6.$$

Le terme de droite de cette inégalité est positif car $5\mu_4^2 > 2\sigma^2\mu_6$. Comme q est une forme quadratique définie positive, ce terme s'annule si et seulement si $(x, y, z) = (0, \sigma^2, \mu_4)$. Nous avons montré que, pour tout $n \geq 1$, G_n admet un unique minimum sur U en $(0, \sigma^2, \mu_4)$ et y vaut 0.

Quitte à réduire U , supposons qu'il est inclus dans K . L'ensemble $K \cap U^c$ est encore un compact de \mathbb{R}^3 inclus dans Θ^* . Par hypothèse, ρ est symétrique et $(0, 0, 0) \in \overset{\circ}{D}_{\Lambda_\bullet}$. Or nous avons que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2 \quad \Lambda(u, v) = \Lambda_\bullet(u, v, 0).$$

Par conséquent $(0, 0) \in \overset{\circ}{D}_\Lambda$ et la proposition IV.1 entraîne que $I - F$ admet un unique minimum en $(0, \sigma^2)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Ensuite

$$\forall (x, y, z, u, v) \in \mathbb{R}^5 \quad I_\bullet(x, y, z) \geq xu + yv + z \times 0 - \Lambda_\bullet(u, v, 0) = xu + yv - \Lambda(u, v)$$

donc, en prenant le supremum sur les $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, il vient que

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[\times \mathbb{R} \quad I_\bullet(x, y, z) - \frac{x^2}{2y} \geq I(x, y) - \frac{x^2}{2y}.$$

Ainsi, pour $(x, y, z) \in K \cap U^c$, il y a deux cas de figure :

★ ou bien $(x, y) \neq (0, \sigma^2)$ et dans ce cas $I_\bullet(x, y, z) - F(x, y) > 0$.

★ ou bien $(x, y) = (0, \sigma^2)$ et alors $z \neq \mu_4$. D'après le point (d) de la proposition III.4 la fonction I_\bullet admet un unique minimum en $(0, \sigma^2, \mu_4)$ en lequel elle est nulle. Ainsi

$$I_\bullet(0, \sigma^2, z) - F(0, \sigma^2) = I_\bullet(0, \sigma^2, z) > 0.$$

Dans tous les cas

$$\forall (x, y, z) \in K \cap U^c \quad I_\bullet(x, y, z) - \frac{x^2}{2y} > 0.$$

Par hypothèse, la suite de fonctions $(R_n + F - I_\bullet)_{n \geq 1}$ est décroissante et converge simplement vers $F - I_\bullet$. De plus, pour tout $n \geq 1$, $R_n + F - I_\bullet$ est semi-continue supérieurement. Ainsi le lemme précédent entraîne que $(I_\bullet - F - R_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément vers $I_\bullet - F$ sur $K \cap U^c$. Nous en déduisons qu'il existe $n_0 \geq 1$ tel que $I_\bullet - F - R_{n_0}$ est strictement positif sur $K \cap U^c$. Ainsi $I_\bullet - F - R_{n_0}$ admet un unique minimum sur $K \cap U^c$ en $(0, \sigma^2, \mu_4)$. \square

b) Autour du lemme de Varadhan

Pour ρ et H vérifiant les hypothèses X.5, la loi de $(S_n/n, T_n/n, U_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{H, n, \rho}$ est

$$\frac{e^{nF(x, y) + nR_n(x, y, z)} \mathbb{1}_{\Theta^*}(x, y, z) d\tilde{\mu}_{\bullet, n, \rho}(x, y, z)}{\int_{\Theta^*} e^{nF(x, y) + nR_n(x, y, z)} d\tilde{\mu}_{\bullet, n, \rho}(x, y, z)}.$$

Nous cherchons des conditions supplémentaires sur H et ρ afin que, si A est un fermé ne contenant pas $(0, \sigma^2, \mu_4)$, alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Theta^* \cap A} e^{nF(x, y) + nR_n(x, y, z)} d\tilde{\mu}_{\bullet, n, \rho}(x, y, z) < 0.$$

Pour cela nous voulons faire appel à une variante du lemme de Varadhan. La proposition X.6 nous permet de conclure si A est un compact de Θ^* . Il s'agit ensuite d'étendre les critères sur H afin de contrôler ce qui se passe autour de la droite d'équation $x = y = 0$ de \mathbb{R}^3 . Nous nous inspirons pour cela de ce que nous avons fait dans le modèle donné par $\tilde{\mu}_{n, \rho}$.

Hypothèse X.8. *Supposons que ρ et H vérifient les hypothèses X.5. Supposons de plus que ρ est à support compact et que, pour tout $r > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\forall (x, y, z) \in \Theta \cap (\mathbb{R} \times]0, \delta] \times \mathbb{R}) \quad \forall n \geq 1 \quad R_n(x, y, z) \leq r.$$

Hypothèse X.9. Supposons que ρ et H vérifient les hypothèses X.5. Supposons de plus qu'il existe $c_0 > 0$ tel que

$$\forall (x, y, z) \in \Theta^* \quad \forall n \geq 1 \quad R_n(x, y, z) \leq c_0 y.$$

Proposition X.10. Supposons que H et ρ vérifient les hypothèses X.5. Alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Theta^*} e^{nF(x,y) + nR_n(x,y,z)} d\tilde{\nu}_{\bullet, n, \rho}(x, y, z) \geq 0.$$

Si elles vérifient aussi l'hypothèse X.8 ou bien l'hypothèse X.9 alors, pour tout fermé A ne contenant pas $(0, \sigma^2, \mu_4)$, nous avons

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Theta^* \cap A} e^{nF(x,y) + nR_n(x,y,z)} d\tilde{\nu}_{\bullet, n, \rho}(x, y, z) < 0.$$

Démonstration. Le principe de grandes déviations satisfait par $(\tilde{\nu}_{\bullet, n, \rho})_{n \geq 1}$ nous assure que

$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \ln \int_{\Theta^*} e^{nF(x,y) + nR_n(x,y,z)} d\tilde{\nu}_{\bullet, n, \rho}(x, y, z) &\geq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \tilde{\nu}_{\bullet, n, \rho}(\Theta^*) \\ &\geq - \inf \left\{ I_{\bullet}(x, y, z) : (x, y, z) \in \overset{\circ}{\Theta} \right\} = 0. \end{aligned}$$

Nous montrons maintenant la deuxième inégalité. La proposition V.4 assure l'existence de $\gamma > 0$ tel que, pour $\delta \in]0, \sigma^2[$ assez petit et n assez grand,

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{nF(x,y)} \mathbb{1}_{x^2 \leq y} \mathbb{1}_{0 < y \leq \delta} d\tilde{\nu}_{n, \rho}(x, y) \leq e^{-n\gamma}.$$

La fonction H vérifie l'hypothèse X.8 ou X.9 donc, quitte à réduire δ , nous supposons que

$$\forall (x, y, z) \in \Theta \cap (\mathbb{R} \times]0, \delta] \times \mathbb{R}) \quad \forall n \geq 1 \quad R_n(x, y, z) \leq \frac{\gamma}{2}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Theta^*} e^{nF(x,y) + nR_n(x,y,z)} \mathbb{1}_{y \leq \delta} d\tilde{\nu}_{\bullet, n, \rho}(x, y, z) &\leq e^{n\gamma/2} \int_{\Theta^*} e^{nF(x,y)} \mathbb{1}_{y \leq \delta} d\tilde{\nu}_{\bullet, n, \rho}(x, y, z) \\ &\leq e^{n\gamma/2} \int_{\mathbb{R}^3} e^{nF(x,y)} \mathbb{1}_{x^2 \leq y} \mathbb{1}_{0 < y \leq \delta} d\tilde{\nu}_{\bullet, n, \rho}(x, y, z) \\ &= e^{n\gamma/2} \int_{\mathbb{R}^2} e^{nF(x,y)} \mathbb{1}_{x^2 \leq y} \mathbb{1}_{0 < y \leq \delta} d\tilde{\nu}_{n, \rho}(x, y) \\ &\leq e^{n\gamma/2} e^{-n\gamma} = e^{-n\gamma/2}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour δ assez petit,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Theta^*} e^{nF(x,y) + nR_n(x,y,z)} \mathbb{1}_{y \leq \delta} d\tilde{\nu}_{\bullet, n, \rho}(x, y, z) \leq -\gamma/2.$$

Notons $A_\delta = \{(x, y, z) \in \Theta \cap A : y \geq \delta\}$. Nous décomposons

$$\Theta^* \cap A \subset \{(x, y, z) \in \Theta^* : y \leq \delta\} \cup A_\delta.$$

Séparons la fin de la démonstration selon les hypothèses vérifiées par ρ et H :

★ Dans le cas où ρ et H vérifient l'hypothèse X.9, nous avons, pour tous $(x, y, z) \in \Theta^*$ et $n \geq 1$,

$$I_{\bullet}(x, y, z) - F(x, y) - R_n(x, y, z) \geq I_{\bullet}(x, y, z) - \frac{1}{2} - c_0 y \geq I_{\bullet}(x, y, z) - \frac{1}{2} - c_0 \sqrt{z}.$$

Donnons-nous $w_0 > 0$ assez petit pour que $(0, 0, w_0) \in D_{\Lambda_\bullet}$ (il existe puisque $(0, 0, 0) \in \mathring{D}_{\Lambda_\bullet}$). Par définition de la transformée de Cramér, nous avons

$$I_\bullet(x, y, z) \geq 0 \times x + 0 \times y + w_0 \times z - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{0 \times t + 0 \times t^2 + w_0 \times t^4} d\rho(t).$$

Par conséquent

$$I_\bullet(x, y, z) - F(x, y) - R_n(x, y, z) \geq w_0 z - c_0 \sqrt{z} - \frac{1}{2} - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{w_0 t^4} d\rho(t).$$

Le terme de droite tend vers $+\infty$ quand z tend vers $+\infty$ et il ne dépend pas de x, y et n . Nous en déduisons qu'il existe $z_0 > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall (x, y, z) \in \Theta^* \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times [z_0, +\infty[) \quad I_\bullet(x, y, z) - F(x, y) - R_n(x, y, z) \geq 1.$$

Posons $K = \{(x, y, z) \in \Theta : z \leq \max(z_0, 2\mu_4)\}$. L'inégalité ci-dessus assure que

$$\inf_{n \geq 1} \inf_{A_\delta \cap K^c} (I_\bullet - F - R_n) > 0.$$

De plus, quitte à diminuer δ , nous avons que l'ensemble $\{(x, y, z) \in \Theta : y \geq \delta\} \cap K$ est un compact de \mathbb{R}^3 inclus dans Θ^* dont l'intérieur contient $(0, \sigma^2, \mu_4)$. Donc la proposition X.6 entraîne l'existence de $n_0 \geq 1$ tel que $I_\bullet - F - R_{n_0}$ admet un unique minimum sur $\{(x, y, z) \in \Theta : y \geq \delta\} \cap K$ en $(0, \sigma^2, \mu_4)$. Ainsi le lemme V.2 implique que

$$\inf_{A_\delta \cap K} (I_\bullet - F - R_{n_0}) > 0.$$

Nous en déduisons que

$$\inf_{A_\delta} (I_\bullet - F - R_{n_0}) > 0.$$

★ Dans le cas où ρ et H vérifient l'hypothèse X.8, en notant K l'adhérence de l'enveloppe convexe du support de $\nu_{\bullet, \rho}$ (qui est compacte et contient $(0, \sigma^2, \mu_4)$), nous pouvons aussi réduire $\delta > 0$ pour appliquer la proposition X.6 et trouver un certain $n_0 \geq 1$ tel que

$$\inf_{A_\delta} (I_\bullet - F - R_{n_0}) > 0.$$

Dans les deux cas, d'après le lemme B.7 de l'annexe, il existe $\gamma_1 > 0$ tel que pour n assez grand,

$$\int_{A_\delta} e^{nF(x,y) + nR_{n_0}(x,y,z)} d\tilde{\nu}_{\bullet, \rho}(x, y, z) \leq e^{-n\gamma_1}.$$

Enfin $R_n \leq R_{n_0}$ pour $n \geq n_0$ donc

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{A_\delta} e^{nF(x,y) + nR_n(x,y,z)} d\tilde{\nu}_{\bullet, \rho}(x, y, z) \leq -\gamma_1.$$

Le lemme B.6 de l'annexe implique alors que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Theta^* \cap A} e^{nF(x,y) + nR_n(x,y,z)} d\tilde{\nu}_{\bullet, \rho}(x, y, z) \leq \max\left(-\frac{\gamma}{2}, -\gamma_1\right) < 0.$$

Ceci termine la démonstration de la proposition. □

c) Un candidat

Un bon candidat pour H est

$$H : (x, y, z) \in \Theta^* \mapsto \frac{x^2}{2y} + \frac{1}{12} \frac{zx^4y^5}{y^9 + x^{10} + zx^4y^4},$$

ce qui donne pour terme d'interaction

$$\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \cdots + x_n)^2}{x_1^2 + \cdots + x_n^2} + \frac{1}{12} \frac{(x_1^4 + \cdots + x_n^4)(x_1 + \cdots + x_n)^4(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^5}{(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^9 + (x_1 + \cdots + x_n)^{10} + (x_1^4 + \cdots + x_n^4)(x_1 + \cdots + x_n)^4(x_1^2 + \cdots + x_n^2)^4}.$$

La suite $(R_n)_{n \geq 1}$, définie par

$$\forall (x, y, z) \in \Theta^* \quad \forall n \geq 1 \quad R_n(x, y, z) = \frac{1}{12} \frac{zx^4y^5}{y^9 + nx^{10} + zx^4y^4},$$

est une suite de fonctions semi-continues supérieurement. Nous avons immédiatement que, pour tout $(x, y, z) \in \Theta^*$,

$$\forall n \geq 1 \quad 0 \leq R_{n+1}(x, y, z) \leq R_n(x, y, z) \leq R(x, y, z),$$

$$\forall n \geq 1 \quad H(x, y, z) - \frac{x^2}{2y} = nR_n\left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}, \frac{z}{n}\right),$$

$$R_n(x, y, z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ensuite

$$(R - R_n)(x, y, z) = \frac{zx^4}{12y^4} - \frac{1}{12} \frac{zx^4y^5}{y^9 + nx^{10} + zx^4y^4} = \frac{zx^4(nx^{10} + zx^4y^4)}{12y^4(y^9 + nx^{10} + zx^4y^4)}.$$

Appliquons cela en $(x/n^{1/6}, y/\sqrt{n} + \sigma^2, z/\sqrt{n} + \mu_4)$. Nous avons

$$n \left(\frac{x}{n^{1/6}}\right)^{10} + \left(\frac{z}{\sqrt{n}} + \mu_4\right) \left(\frac{x}{n^{1/6}}\right)^4 \left(\frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2\right)^4 \sim \frac{x^{10} + \sigma^8 \mu_4}{n^{2/3}},$$

$$\left(\frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2\right)^9 + n \left(\frac{x}{n^{1/6}}\right)^{10} + \left(\frac{z}{\sqrt{n}} + \mu_4\right) \left(\frac{x}{n^{1/6}}\right)^4 \left(\frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2\right)^4 \sim \sigma^{18}$$

et

$$\frac{(z/\sqrt{n} + \mu_4)x^4n^{-2/3}}{12(y/\sqrt{n} + \sigma^2)^4} \sim \frac{\mu_4x^4}{12\sigma^8n^{2/3}}.$$

Donc

$$n(R - R_n)\left(\frac{x}{n^{1/6}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2, \frac{z}{\sqrt{n}} + \mu_4\right) \sim n \frac{\mu_4x^4}{12\sigma^8n^{2/3}\sigma^{18}} \frac{x^{10} + \sigma^8\mu_4}{n^{2/3}}$$

$$\sim \frac{\mu_4x^4(x^{10} + \sigma^8\mu_4)}{12\sigma^{26}n^{1/3}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Regardons la dernière hypothèse du X.5 : pour tout $n \geq 1$, la fonction R_n est différentiable au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$ et nous vérifions sans mal que, pour β assez petit, il existe $\lambda > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \|(x, y - \sigma^2, z - \mu_4)\| \leq \beta \quad \implies \quad \|\nabla R_n(x, y, z)\| \leq \lambda n.$$

Quitte à diminuer β , l'inégalité des accroissements finis nous assure que, pour tous réels x, y, z, s, t et u tels que $\|(x, y - \sigma^2, z - \mu_4)\| \leq \beta$ et $\|(s, t, u)\| \leq \beta$,

$$|R_n((x, y, z) + (s, t, u)) - R_n(x, y, z)| \leq \lambda n \|(s, t, u)\| \leq n^2 \|(s, t, u)\|$$

pour $n \geq \lambda$. Le terme d'interaction H vérifie ainsi les hypothèses X.5. Enfin

$$\forall (x, y, z) \in \Theta^* \quad zx^4y^5 \leq y^{10} + nyx^{10} + zx^4y^5 = y(y^9 + nx^{10} + zx^4y^4).$$

Ainsi H vérifie l'hypothèse X.9.

29 Une auto-interaction menant à des fluctuations d'ordre $n^{5/6}$

Dans ce paragraphe, nous rassemblons les critères précédents pour répondre à notre problématique : construire un modèle dans lequel nous tuons le terme en x^4 . Nous allons d'abord démontrer une version plus générale du théorème I.8. Ensuite nous examinerons le cas où ρ admet une densité.

a) Théorème limite général

Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} . Donnons-nous une fonction H définie sur Θ^* à valeurs réelles et telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$Z_{H,n} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(H(x_1 + \dots + x_n, x_1^2 + \dots + x_n^2, x_1^4 + \dots + x_n^4)) \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0\}} \prod_{i=1}^n d\rho(x_i)$$

est finie. Considérons alors $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$, la mesure de densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{Z_{H,n}} \exp(H(x_1 + \dots + x_n, x_1^2 + \dots + x_n^2, x_1^4 + \dots + x_n^4)) \mathbb{1}_{\{x_1^2 + \dots + x_n^2 > 0\}}$$

par rapport à $\rho^{\otimes n}$. Nous posons

$$S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n \quad T_n = (X_n^1)^2 + \dots + (X_n^n)^2 \quad \text{et} \quad U_n = (X_n^1)^4 + \dots + (X_n^n)^4.$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème X.11. *Supposons que H et ρ vérifient les hypothèses X.5, ainsi que les hypothèses X.8 ou X.9. Notons σ^2 , μ_4 et μ_6 les moments d'ordre 2, 4 et 6 de ρ . Alors, sous $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n, U_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \sigma^2, \mu_4)$.*

De plus, si ρ vérifie la condition de Cramér

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|(s,t,u)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz + itz^2 + iuz^4} d\rho(z) \right| < 1$$

alors, sous $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$,

$$\left(\frac{\mu_4^2}{\sigma^2} - \frac{2\mu_6}{5} \right)^{1/6} \frac{S_n}{\sigma^2 n^{5/6}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{81}{2} \right)^{1/6} \Gamma \left(\frac{1}{6} \right)^{-1} \exp \left(-\frac{s^6}{18} \right) ds.$$

Nous verrons à la proposition X.13 que, si ρ admet une composante absolument continue, alors la condition de Cramér est vérifiée. Le théorème I.8 est exactement le théorème précédent appliqué à

$$H : (x, y, z) \in \Theta^* \mapsto \frac{x^2}{2y} + \frac{1}{12} \frac{zx^4 y^5}{y^9 + x^{10} + zx^4 y^4}$$

qui vérifie les hypothèses X.5 et X.9 d'après les résultats du paragraphe 28.c).

Démonstration. La mesure $\theta_{H,n,\rho}$, la loi de $(S_n/n, T_n/n, U_n/n)$ sous $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$ vérifie

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^3} \quad \theta_{H,n,\rho}(A) = \frac{\int_{\Theta^* \cap A} e^{nF(x,y) + nR_n(x,y,z)} d\tilde{\nu}_{\bullet,n,\rho}(x,y,z)}{\int_{\Theta^*} e^{nF(x,y) + nR_n(x,y,z)} d\tilde{\nu}_{\bullet,n,\rho}(x,y,z)}.$$

Soit U un voisinage ouvert de $(0, \sigma^2, \mu_4)$ dans \mathbb{R}^3 . La proposition X.10 entraîne que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \theta_{H,n,\rho}(U^c) &= \limsup_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Theta^* \cap U^c} e^{nF(x,y) + nR_n(x,y,z)} d\tilde{\nu}_{\bullet,n,\rho}(x,y,z) \\ &\quad - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\Theta^*} e^{nF(x,y) + nR_n(x,y,z)} d\tilde{\nu}_{\bullet,n,\rho}(x,y,z) < 0. \end{aligned}$$

Ainsi il existe $\varepsilon > 0$ et $n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\theta_{H,n,\rho}(U^c) \leq e^{-n\varepsilon}$ pour tout $n > n_0$. Par conséquent, pour tout voisinage U de $(0, \sigma^2, \mu_4)$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{\mu}_{H,n,\rho} \left(\left(\frac{S_n}{n}, \frac{T_n}{n}, \frac{U_n}{n} \right) \in U^c \right) = 0.$$

C'est-à-dire, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, $(S_n/n, T_n/n, U_n/n)$ converge en probabilité vers $(0, \sigma^2, \mu_4)$.

Montrons maintenant le résultat de fluctuations. La proposition X.6 nous assure que sur un compact K de A_J dont l'intérieur contient $x^* = (0, \sigma^2, \mu_4)$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que $I_\bullet - F - R_{n_0}$ admet un unique minimum sur K en x^* . Nous allons appliquer le théorème VI.6 à $\nu_{\bullet,\rho}$, ψ et la suite $(\psi_n)_{n \geq n_0}$ où

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \psi(x, y, z) = (F + R_{n_0})(x, y, z) \mathbb{1}_{\Theta^*}(x, y, z) - \infty \mathbb{1}_{(\Theta^*)^c}(x, y, z),$$

$$\forall n \geq n_0 \quad \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad \psi_n(x, y, z) = (F + R_n)(x, y, z) \mathbb{1}_{\Theta^*}(x, y, z) - \infty \mathbb{1}_{(\Theta^*)^c}(x, y, z).$$

Nous avons bien que $\psi_n \leq \psi$ pour tout $n \geq n_0$, et que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \exp \left(n\psi_n \left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}, \frac{z}{n} \right) \right) d\nu_{\bullet,\rho}^{*n}(x, y, z) = \int_{\Theta^*} \exp \left(n(F + R_n) \left(\frac{x}{n}, \frac{y}{n}, \frac{z}{n} \right) \right) d\nu_{\bullet,\rho}^{*n}(x, y, z) = Z_{H,n}$$

est finie. La mesure $\nu_{\bullet,\rho}$ vérifie la condition de Cramér. Il nous reste à vérifier que les autres conditions des hypothèses VI.5 sont satisfaites. La proposition X.6 entraîne que, pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$n(I_\bullet - F - R_n) \left(\frac{x}{n^{1/6}}, \frac{y}{\sqrt{n}} + \sigma^2, \frac{z}{\sqrt{n}} + \mu_4 \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} q(y, z) + \frac{5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6}{90\sigma^{14}} x^6$$

et il découle de la proposition X.4 que, au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4)$,

$$\forall n \geq n_0 \quad \psi_n(x, y, z) \geq (I_\bullet - F - R_n)(x, y, z) \geq \frac{1}{2}q(y - \sigma^2, z - \mu_4) + \frac{5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6}{180\sigma^{14}} x^6.$$

Ainsi l'hypothèse (b) est vérifiée avec $x^* = (0, \sigma^2, \mu_4)$, $t^* = 0$, $\alpha_1 = 6$, $\alpha_2 = \alpha_3 = 2$ et l'application polynomiale p donnée par le polynôme

$$\frac{5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6}{90\sigma^{14}} X_1^6 + q(X_2, X_3).$$

Ensuite la dernière hypothèse du X.5 et l'inégalité des accroissements finis nous assurent qu'il existe $\tau \geq 0$ et $r, \beta, M > 0$ tels que, pour tout $(x, y, z, s, t, u) \in \mathbb{R}^6$ et pour n assez grand,

$$\|(x, y - \sigma^2, z - \mu_4)\| \leq \beta, \|(s, t, u)\| \leq \beta \implies |R_n((x, y, z) + (s, t, u)) - R_n(x, y, z)| \leq n^\tau \|(s, t, u)\|,$$

$$\|(x, y - \sigma^2, z - \mu_4)\| \leq r, \|(s, t, u)\| \leq r \implies |F((x, y) + (s, t)) - F(x, y)| \leq M \|(s, t, u)\|$$

et, quitte à réduire β ou r , supposons que $\beta = r$. Donnons-nous $\eta > 0$. Si $\|(s, t, u)\| \leq \eta$ alors, pour n assez grand,

$$\left\| \frac{1}{n^{\tau+2}}(s, t, u) \right\| \leq \beta$$

et donc

$$\begin{aligned} & \sup_{\substack{\|(x,y-\sigma^2,z-\mu_4)\| \leq \beta \\ \|(s,t,u)\| \leq \eta}} \left| (F + R_n) \left(x + \frac{s}{n^{\tau+2}}, y + \frac{t}{n^{\tau+2}}, z + \frac{u}{n^{\tau+2}} \right) - (F + R_n)(x, y, z) \right| \\ & \leq M \left\| \frac{1}{n^{\tau+2}}(s, t, u) \right\| + n^\tau \left\| \frac{1}{n^{\tau+2}}(s, t, u) \right\| \leq \frac{M\eta}{n^{\tau+2}} + \frac{\eta}{n^2} \underset{n \rightarrow \infty}{=} o\left(\frac{1}{n}\right). \end{aligned}$$

Ainsi l'hypothèse (c) de VI.5 est vérifiée avec $m = \tau + 2$. Enfin la proposition X.10 nous assure que l'hypothèse (d) est vérifiée. Le théorème VI.6 implique alors que, sous $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$, le vecteur $(S_n/n^{5/6}, (T_n - n\sigma^2)/\sqrt{n}, (U_n - n\mu_4)/\sqrt{n})$ converge en loi vers la mesure de probabilité de densité

$$(x, y) \mapsto \frac{\exp\left(-\frac{5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6}{90\sigma^{14}}x^6 - q(y, z)\right)}{\int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(-\frac{5\mu_4^2 - 2\sigma^2\mu_6}{90\sigma^{14}}s^6 - q(t, u)\right) ds dt du}.$$

En particulier, sous $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$

$$\left(\frac{\mu_4^2}{\sigma^2} - \frac{2\mu_6}{5}\right)^{1/6} \frac{S_n}{\sigma^2 n^{5/6}} \underset{n \rightarrow \infty}{\mathcal{L}} \frac{\exp(-x^6/18)}{\int_{\mathbb{R}} \exp(-s^6/18) ds}.$$

D'où le théorème. □

b) Cas où ρ admet une densité

Lemme X.12. *Si ρ est une mesure de probabilité admettant une densité f par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} alors $\nu_{\bullet,\rho}^{*3}$ admet une densité f_3 par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^3 . De plus, pour tout $p \in [1, +\infty[$,*

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_3^p(x, y, z) dx dy dz = \left(\frac{3}{4}\right)^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f^p(x)f^p(y)f^p(z)}{|(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)|^{p-1}} dx dy dz.$$

Démonstration. Soit Φ une fonction mesurable positive sur \mathbb{R}^3 . Nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y, z) d\nu_{\bullet,\rho}^{*3}(x, y, z) &= \int_{\mathbb{R}^9} \Phi(u_1 + u_2 + u_3, v_1 + v_2 + v_3, w_1 + w_2 + w_3) \\ &\quad \times d\nu_{\bullet,\rho}(u_1, v_1, w_1) d\nu_{\bullet,\rho}(u_2, v_2, w_2) d\nu_{\bullet,\rho}(u_3, v_3, w_3) \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^4 + y^4 + z^4) f(x)f(y)f(z) dx dy dz. \end{aligned}$$

Nous allons effectuer le changement de variable donné par la fonction

$$\varphi : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x + y + z, x^2 + y^2 + z^2, x^4 + y^4 + z^4).$$

Il s'agit d'une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^3 . Déterminons son Jacobien : pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned} \text{Jac}_{(x,y,z)}\varphi &= \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \\ 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \end{pmatrix} = 8 \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y-x & z-x \\ x^3 & y^3-x^3 & z^3-x^3 \end{pmatrix} \\ &= 8((y-x)(z^3-x^3) - (z-x)(y^3-x^3)) \\ &= 8((y-x)(z-x)(z^2+xz+x^2) - (z-x)(y-x)(y^2+xy+x^2)) \\ &= 8(y-x)(z-x)(z^2+xz+x^2 - y^2 - xy - x^2) \\ &= 8(y-x)(z-x)(z-y)(x+y+z). \end{aligned}$$

Notons $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ et

$$\mathcal{H} = \mathcal{S} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = z\} \cup \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = z\}.$$

L'ensemble \mathcal{H} est l'union de quatre hyperplans sur lesquels le Jacobien de φ est nul. Notons ensuite

$$\begin{aligned} O_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S} : x < y < z\}, & O_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S} : x < z < y\}, \\ O_3 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S} : y < x < z\}, & O_4 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S} : y < z < x\}, \\ O_5 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S} : z < x < y\}, & O_6 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{S} : z < y < x\}. \end{aligned}$$

Les six ouverts O_1, \dots, O_6 forment une partition de $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{H}$. Sur chacun de ces ouverts le Jacobien de φ est non nul. De plus l'ensemble \mathcal{H} est négligeable pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^3 donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y, z) d\nu_{\bullet\rho}^{*3}(x, y, z) &= \sum_{i=1}^6 \int_{O_i} \Phi(\varphi(x, y, z)) f(x) f(y) f(z) dx dy dz \\ &= \sum_{i=1}^6 \int_{O_i} \Phi(\varphi(x, y, z)) g(x, y, z) |\text{Jac}_{(x,y,z)} \varphi| dx dy dz, \end{aligned}$$

où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{H}$ par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{H} \quad g(x, y, z) = \frac{f(x)f(y)f(z)}{|8(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)|}.$$

Sur chaque ouvert O_i , $i \in \{1, \dots, 6\}$, la fonction φ est de classe C^1 et son jacobien ne s'annule pas. Pour pouvoir appliquer le théorème d'inversion globale, il faut s'assurer que φ est injective sur chacun de ces ouverts. Soient $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ tel qu'il existe $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \mathcal{H}$ vérifiant $(u, v, w) = \varphi(x, y, z)$. Nous avons alors

$$x + y = u - z \quad x^2 + y^2 = v - z \quad \text{et} \quad x^4 + y^4 = w - z^4.$$

Cherchons une équation polynomiale vérifiée par z . Nous avons

$$\begin{aligned} (x + y)^2 (x^2 + y^2) &= x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3y + 2xy^3 = x^4 + y^4 + 2xy(xy + x^2 + y^2) \\ &= x^4 + y^4 + ((x + y)^2 - (x^2 + y^2)) \frac{(x + y)^2 + x^2 + y^2}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi

$$(u - z)^2 (v - z^2) = w - z^4 + \left((u - z)^2 - v + z^2 \right) \frac{(u - z)^2 + v - z^2}{2}.$$

En développant, nous obtenons

$$4uz^3 - 4u^2z^2 + 2u(u^2 - v)z + u^2v - \frac{u^4}{2} + \frac{v^2}{2} - w = 0.$$

Or $(x, y, z) \notin \mathcal{H}$ donc $u = x + y + z \neq 0$ et donc $P_{(u,v,w)}(z) = 0$ avec

$$P_{(u,v,w)} = X^3 - uX^2 + \frac{u^2 - v}{2}X + \frac{uv}{4} - \frac{u^3}{8} + \frac{v^2}{8u} - \frac{w}{4u}.$$

Le raisonnement est symétrique en x , y et z donc nous obtenons que $P_{(u,v,w)}(x) = P_{(u,v,w)}(y) = 0$.

Soit $i \in \{1, \dots, 6\}$. Nous venons de montrer que, si $(u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ est tel qu'il existe $(x, y, z) \in O_i$ vérifiant $(u, v, w) = \varphi(x, y, z)$, alors x , y et z sont les racines de $P_{(u,v,w)}$, polynôme unitaire de degré 3. Nous en déduisons que φ est injective sur O_i . Par conséquent, d'après le théorème

d'inversion globale (cf. théorème 3.8.10 de [58]), pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$, l'application φ est un C^1 -difféomorphisme de O_i sur $\varphi(O_i)$. Notons φ_i^{-1} son inverse.

Les rôles symétriques de x , y et z dans l'expression de φ entraînent que les ouverts $\varphi(O_i)$, $i \in \{1, \dots, 6\}$, sont tous égaux à un même ouvert que nous notons \mathcal{U} . De plus, pour tout $(u, v, w) \in \mathcal{U}$, les coordonnées des $\varphi_i^{-1}(u, v, w)$, $i \in \{1, \dots, 6\}$, sont les mêmes à une permutation non triviale près. Par conséquent

$$\forall i \in \{1, \dots, 6\} \quad g \circ \varphi_i^{-1} = g \circ \varphi_1^{-1}.$$

Effectuons alors le changement de variable donné par φ sur chaque ouvert O_i :

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y, z) d\nu_{\bullet, \rho}^{*3}(x, y, z) = \sum_{i=1}^6 \int_{\varphi(O_i)} \Phi(u, v, w) g \circ \varphi_i^{-1}(u, v, w) du dv dw.$$

Les remarques précédentes sur la structure symétrique de φ nous assurent que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \Phi(x, y, z) d\nu_{\bullet, \rho}^{*3}(x, y, z) = \int_{\mathbb{R}^3} \Phi(u, v, w) 6 g \circ \varphi_1^{-1}(u, v, w) \mathbb{1}_{\mathcal{U}}(u, v, w) du dv dw.$$

Nous en déduisons que $\nu_{\bullet, \rho}^{*3}$ admet pour densité $f_3 = 6 g \circ \varphi_1^{-1} \times \mathbb{1}_{\mathcal{U}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^3 . Enfin, pour $p \in [1, +\infty[$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_3^p(u, v, w) du dv dw = 6^p \int_{\mathcal{U}} (g \circ \varphi_1^{-1}(u, v, w))^p du dv dw.$$

Effectuons le changement de variable donné par φ_1^{-1} :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_3^p(u, v, w) du dv dw = 6^p \int_{O_1} g^p(x, y, z) |\text{Jac}_{(x,y,z)}\varphi| dx dy dz.$$

Par symétrie, nous pouvons encore écrire

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} f_3^p(u, v, w) du dv dw &= 6^{p-1} \sum_{i=1}^6 \int_{O_i} g^p(x, y, z) |\text{Jac}_{(x,y,z)}\varphi| dx dy dz \\ &= 6^{p-1} \int_{\mathbb{R}^3} g^p(x, y, z) |\text{Jac}_{(x,y,z)}\varphi| dx dy dz. \end{aligned}$$

puisque \mathcal{H} est négligeable pour la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^3 . Ceci termine la démonstration du lemme. \square

Nous pouvons montrer alors un résultat analogue à la proposition VI.9 :

Proposition X.13. *Si ρ est une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui possède une composante absolument continue alors*

$$\forall \alpha > 0 \quad \sup_{\|(s,t,u)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz+itz^2+iu z^4} d\rho(z) \right| < 1.$$

Démonstration. Supposons que $\rho = a\rho_{ac} + b\rho_d + c\rho_s$, où $a > 0$, ρ_{ac} est une mesure de probabilité, ρ_d une mesure de probabilité discrète et ρ_s une mesure de probabilité singulière sans atomes. Nous ne pouvons pas appliquer la proposition VI.8 directement car $\nu_{\bullet, \rho}$ n'admet pas de densité. Cependant, le lemme X.12 entraîne que $\nu_{\bullet, \rho_{ac}}^{*3}$ admet une densité f_3 par rapport à la

mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^3 . Nous pouvons écrire $\rho^{*3} = a^3 \rho_{ac}^{*3} + (1 - a^3)\eta$, où η est une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^3 . Nous avons

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz+itz^2+iu z^4} d\rho(z) \right|^3 &= \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{is(x+y+z)+it(x^2+y^2+z^2)+iu(x^4+y^4+z^4)} d\rho(x) d\rho(y) d\rho(z) \right| \\ &\leq a^3 \left| \int_{\mathbb{R}^2} e^{is(x+y+z)+it(x^2+y^2+z^2)+iu(x^4+y^4+z^4)} d\rho_{ac}^{*3}(x, y, z) \right| + (1 - a^3) \left| \int_{\mathbb{R}^3} d\eta(x, y, z) \right| \\ &\leq a^3 \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{isx+ity+itz} d\nu_{\rho_{ac}}^{*3}(x, y, z) \right| + 1 - a^3. \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\sup_{\|(s,t,u)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}} e^{isz+itz^2+iu z^4} d\rho(z) \right|^3 \leq a^3 \sup_{\|(s,t,u)\| \geq \alpha} \left| \int_{\mathbb{R}^3} e^{isx+ity+iu z} f_3(u, v) dx dy dz \right| + 1 - a^3.$$

La proposition VI.8 implique que le supremum dans le terme de droite de l'inégalité ci-dessus est strictement inférieur à 1. D'où la proposition. \square

Supposons que f est bornée. Nous terminons en montrant qu'alors il existe $p \in]1, 2]$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^3} f_3^p(x, y, z) dx dy dz < +\infty.$$

Soit $p > 1$. D'après le lemme X.12, il faut et il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f^p(x)f^p(y)f^p(z)}{|(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)|^p} dx dy dz < +\infty.$$

L'inégalité de Young nous assure que

$$\forall (a, b, c, d) \in]0, +\infty[^4 \quad \frac{1}{abcd} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{(ab)^2} + \frac{1}{(cd)^2} \right) \leq \frac{1}{4} \left(\frac{1}{a^4} + \frac{1}{b^4} + \frac{1}{c^4} + \frac{1}{d^4} \right).$$

Il découle de cette inégalité et de la symétrie de l'intégrale en x, y et z que

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{f^p(x)f^p(y)f^p(z)}{|(x+y+z)(x-y)(y-z)(z-x)|^{p-1}} dx dy dz \leq \frac{1}{4} (I_1 + 3I_2),$$

avec

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f^p(x)f^p(y)f^p(z)}{|x+y+z|^{4(p-1)}} dx dy dz \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f^p(x)f^p(y)f^p(z)}{|x-y|^{4(p-1)}} dx dy dz.$$

En faisant le changement de variable $(x, y, z) \mapsto (x+y+z, y, z)$, nous obtenons

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f^p(u-v-w)f^p(v)f^p(w)}{|u|^{4(p-1)}} du dv dw \\ &= \int_{[-1,1] \times \mathbb{R}^2} \frac{f^p(u-v-w)f^p(v)f^p(w)}{|u|^{4(p-1)}} du dv dw \\ &\quad + \int_{[-1,1]^c \times \mathbb{R}^2} \frac{f^p(u-v-w)f^p(v)f^p(w)}{|u|^{4(p-1)}} du dv dw \\ &\leq \|f\|_{\infty}^p \int_{[-1,1] \times \mathbb{R}^2} \frac{f^p(v)f^p(w)}{|u|^{4(p-1)}} du dv dw + \int_{[-1,1]^c \times \mathbb{R}^2} f^p(u-v-w) f^p(v) f^p(w) du dv dw. \end{aligned}$$

Le théorème de Fubini implique que

$$I_1 \leq \|f\|_{\infty}^p \left(\int_{-1}^1 \frac{du}{|u|^{4(p-1)}} \right) \left(\int_{\mathbb{R}} f^p(x) dx \right)^2 + \left(\int_{\mathbb{R}} f^p(x) dx \right)^3.$$

Nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} f^p(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f^{p-1}(x)f(x) dx \leq \|f\|_{\infty}^{p-1} \int_{\mathbb{R}} f(x) dx < +\infty$$

et la fonction $u \mapsto |u|^{4(1-p)}$ est intégrable sur $[-1, 1]$ si et seulement si $4(p-1) < 1$, c'est-à-dire $p < 5/4$. Par conséquent, si par exemple $p = 6/5$, alors $I_1 < +\infty$. Nous montrons de même qu'alors $I_2 < +\infty$.

Nous avons montré que ν_{ρ}^{*3} admet une densité $f_3 \in L^{5/6}$. La proposition III.23 nous assure alors que les hypothèses du théorème III.17 sont vérifiées. Ainsi nous pouvons montrer, de façon analogue au paragraphe 15, que si ρ admet une densité paire et bornée et si H et ρ vérifient les hypothèses X.5 et X.9, alors, sous $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$,

$$\left(\frac{\mu_4^2}{\sigma^2} - \frac{2\mu_6}{5}\right)^{1/6} \frac{S_n}{\sigma^2 n^{5/6}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{81}{2}\right)^{1/6} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{s^6}{18}\right) ds.$$

C'est un cas particulier du théorème X.11.

30 Tuer le terme en $x^6, x^8, \dots, x^{2k}, \dots$

Soit $k \geq 4$. Notons $I_{\bullet k}$ la transformée de Cramér de $(Z, Z^2, Z^4, \dots, Z^{2k-2})$, où Z est une variable aléatoire de loi ρ . Nous aimerions trouver une grosse classe de mesures de probabilité ρ sur \mathbb{R} telles que :

★ Il existe une fonction d'interaction H_k de \mathbb{R}^k dans \mathbb{R} telle que, pour tout $n \geq 1$, la fonction

$$G_{n,k} : (y_1, y_2, \dots, y_{2k-2}) \mapsto I_{\bullet k}(y_1, y_2, \dots, y_{2k-2}) - \frac{1}{n} H_k(ny_1, ny_2, \dots, ny_{2k-2})$$

admet un unique minimum en $(0, \sigma^2, \mu_4, \dots, \mu_{2k-2})$, où $\sigma^2, \mu_4, \dots, \mu_{2k-2}$ sont les moments successifs de ρ . De plus

$$Z_{n,k} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(H_k\left(x_1 + \dots + x_n, x_1^2 + \dots + x_n^2, \dots, x_1^{2k} + \dots + x_n^{2k}\right)\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) < +\infty.$$

★ Il existe $A_k > 0$ et une fonction q_k de \mathbb{R}^{k-1} dans \mathbb{R} vérifiant

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-q_k(y_2, \dots, y_{2k-2})/2} dy_2 \dots dy_{2k-2} < +\infty$$

et telle que, au voisinage de $(0, \sigma^2, \mu_4, \dots, \mu_{2k-2})$,

$$G_{n,k}(y_1, y_2, \dots, y_{2k-2}) \sim A_k y_1^{2k} + q_k(y_2 - \sigma^2, \dots, y_{2k-2} - \mu_{2k-2}).$$

Dans ce cas, nous considérerions $(X_k^n)_{1 \leq k \leq n}$ un tableau triangulaire infini de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) suit la loi

$$\frac{1}{Z_{n,k}} \exp\left(H_k\left(x_1 + \dots + x_n, x_1^2 + \dots + x_n^2, \dots, x_1^{2k} + \dots + x_n^{2k}\right)\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Nous posons $S_n = X_1^n + \dots + X_n^n$ pour tout $n \geq 1$. En utilisant les mêmes arguments que dans les paragraphes précédents, nous pourrions montrer que

$$\frac{S_n}{n^{1-1/2k}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-A_k y^{2k}) dy\right)^{-1} \exp(-A_k x^{2k}) dx.$$

Malheureusement la preuve d'un tel résultat ne semble pas accessible avec les techniques employées jusqu'à présent, et ce pour plusieurs raisons :

★ Afin d'obtenir le développement de $G_{n,k}$, dans le cas où $k = 2$ ou 3 , nous avons mené des calculs très longs et fastidieux. Bien sûr nous pourrions faire des calculs analogues pour $k = 4$, puis $k = 5, \dots$. Mais cela serait très compliqué et surtout pas raisonnable si nous ne trouvons pas une façon de déterminer la variable A_k pour tout $k \geq 4$. De plus nous n'avons pas compris pourquoi, pour $k = 2$ ou 3 , les termes dont « nous ne voulons pas » dans le développement de $G_{n,k}$ s'annulent.

★ Pour $k = 3$, il existe des mesures de probabilité pour lesquelles A_k est strictement négative. Dans le même ordre d'idée, il se pourrait qu'il existe $k_0 \geq 4$ tel que $A_{k_0} < 0$ pour toute mesure de probabilité. Dans ce cas, G_{n,k_0} ne pourrait pas admettre un minimum en $(0, \sigma^2, \mu_4, \dots, \mu_{2k-2})$ et nous devrions trouver un nouveau critère sur H_{k_0} afin de contourner ce problème.

★ Avec la fonction d'interaction « naturelle » dans le cas $k = 3$, nous n'avons pas pu prouver que $G_{n,3}$ admet un unique minimum en $(0, \sigma^2, \mu_4)$ (alors que nos simulations nous poussent à conjecturer que c'est le cas pour de nombreuses mesures de probabilité). Nous avons dû forcer la fonction d'interaction à avoir le comportement voulu en introduisant certains critères. De plus le candidat que nous proposons pour H est plutôt compliqué. Nous n'avons pas réussi non plus à faire des simulations numériques convaincantes avec notre modèle modifié (alors que nous l'avons traité théoriquement) : la convergence est trop lente car

$$n(R - R_n) \left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}, \frac{x_1^2 + \dots + x_n^2}{n}, \dots, \frac{x_1^{2k-2} + \dots + x_n^{2k-2}}{n} \right)$$

ne devient négligeable que pour n très grand.

Chapitre XI

Un modèle dynamique à temps discret

Sommaire

31	Une chaîne de Markov dont la loi stationnaire est une mesure de Gibbs	194
a)	Le principe de la dynamique de Metropolis	194
b)	Cas général	195
c)	Convergences de suites de chaînes de Markov	198
	i) Convergence en probabilité	198
	ii) Convergence en loi	199
32	Dynamique de Glauber pour le modèle d'Ising Curie-Weiss	200
a)	Définition du modèle	200
b)	Loi des grands nombres	201
c)	Fluctuations	203
33	Dynamique de Glauber pour le modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC	207
a)	Définition du modèle	207
b)	Etude du cas où ρ charge quatre points	209
34	Simulations	215

Dans le premier paragraphe de ce chapitre, nous présentons des résultats généraux sur les dynamiques de type Metropolis ou Glauber qui permettent de construire des chaînes de Markov dont la loi stationnaire est une mesure de Gibbs. Nous exposons aussi quelques théorèmes de convergences de suites de chaînes de Markov. Ces résultats nous permettent d'emmener ce chapitre dans plusieurs directions : dans le paragraphe 32, nous construisons la dynamique de Glauber pour le modèle d'Ising Curie-Weiss. Il s'agit d'un tableau triangulaire infini $(X_n^k(j), j \in \mathbb{N})_{1 \leq k \leq n}$ de processus stochastiques tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\left((X_n^1(j), \dots, X_n^n(j)), j \in \mathbb{N} \right)$$

est une chaîne de Markov admettant $\mu_{n,\beta}$, la mesure de Gibbs du modèle d'Ising Curie-Weiss à la température inverse $\beta \leq 1$, pour unique mesure invariante. Nous montrons des théorèmes de fluctuations permettant d'identifier le comportement critique typique d'un modèle dynamique de type Curie-Weiss. Dans le paragraphe 32, nous construisons la dynamique de Glauber pour notre modèle d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée et nous montrons un théorème de type loi des grands nombres dans un cas particulier. Enfin, dans le paragraphe 34, nous utilisons la dynamique de Metropolis pour obtenir les simulations numériques à l'origine des histogrammes présentés dans les paragraphes 3.c) et 26.a).

31 Une chaîne de Markov dont la loi stationnaire est une mesure de Gibbs

a) Le principe de la dynamique de Metropolis

Soit E un ensemble au plus dénombrable et soit H une fonction de E dans \mathbb{R} telle que

$$Z = \sum_{x \in E} \exp(H(x)) < +\infty.$$

En général le calcul de Z n'est pas accessible et il devient donc très difficile de simuler une variable aléatoire à valeurs dans E et de loi π ¹, avec

$$\forall x \in E \quad \pi(x) = \frac{\exp(H(x))}{Z}.$$

Une méthode générale pour traiter ce problème a été introduite par Metropolis et co-auteurs [45], et étendue par Hastings [38]. L'idée est de construire une chaîne de Markov d'espace d'état E , de matrice de transition P et dont la loi stationnaire est π . Pour cela, une condition suffisante est que cette chaîne de Markov soit réversible par rapport à π , c'est-à-dire

$$\forall (x, y) \in E \quad \pi(x)P(x, y) = \pi(y)P(y, x).$$

Cette condition est équivalente à

$$\forall (x, y) \in E \quad P(y, x) = P(x, y) \exp(H(y) - H(x)).$$

Nous remarquons tout de suite que Z n'intervient pas dans la définition de la chaîne de Markov. Afin de la construire, voici l'algorithme de Metropolis :

★ Donnons-nous une matrice de transition $(\kappa(x, y))_{(x, y) \in E^2}$ composée de réels positifs et appelée *matrice de proposition*, ainsi que des probabilités d'acceptation $\alpha(x, y)$, $(x, y) \in E^2$.

★ Si à un instant j donné la chaîne prend une valeur $x \in E$, alors une nouvelle valeur y est proposée selon la loi $\kappa(x, \cdot)$. A l'instant $j + 1$ la chaîne prend la valeur y avec probabilité $\alpha(x, y)$ (acceptation de la nouvelle proposition) et garde la valeur x avec probabilité $1 - \alpha(x, y)$ (rejet de la nouvelle proposition). Il s'ensuit que

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \quad P(x, y) = \kappa(x, y) \alpha(x, y).$$

Pour que la condition de réversibilité soit vérifiée, il suffit donc que

$$\forall (x, y) \in E^2, x \neq y \quad \frac{\alpha(y, x)}{\alpha(x, y)} = \frac{\exp(H(y)) \kappa(y, x)}{\exp(H(x)) \kappa(x, y)}.$$

Pour simplifier, supposons que $\kappa(x, y) = \kappa(y, x)$ pour tout $(x, y) \in E^2$. Le choix pour α correspondant à la dynamique de *Metropolis-Hastings* est

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \alpha(x, y) = \exp(\min\{0, H(y) - H(x)\}).$$

Un autre choix, correspondant à la dynamique de *Glauber* ou *heat-bath*, est

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \alpha(x, y) = \frac{1}{1 + \exp(H(x) - H(y))}.$$

1. Dans la littérature, nous rencontrons généralement la convention suivante : π est telle que

$$\forall x \in E \quad \pi(x) = \frac{\exp(-H(x))}{Z} \quad \text{où} \quad Z = \sum_{y \in E} \exp(-H(y)).$$

La fonction H est alors appelée Hamiltonien.

Elle est fréquemment utilisée pour construire une dynamique associée au modèle d'Ising à la température $T > 0$: à chaque site i du réseau \mathcal{R} considéré est associée une variable aléatoire $x_i \in \{-1, 1\}$. L'ensemble $E = \{-1, 1\}^{\mathcal{R}}$ est alors l'ensemble des configurations $x = (x_i)_{i \in \mathcal{R}}$ et la fonction H est définie par

$$\forall x \in E \quad H(x) = \frac{1}{T} \sum_{\substack{\{i,j\} \in \mathcal{R}^2 \\ i \sim j}} x_i x_j,$$

où la somme est prise sur toutes les paires de sites voisins. Dans le cas du modèle d'Ising Curie-Weiss à n particules et à la température $T > 0$, la fonction H est définie par

$$\forall x \in \{-1, +1\}^n \quad H(x) = \frac{1}{2T} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{n}.$$

Pour ces modèles, une version alternative de ces dynamiques est souvent utilisée, consistant à ne mettre à jour qu'une seule coordonnée à chaque étape de l'algorithme. Nous renvoyons à [57] pour l'étude de la dynamique de Glauber associée au modèle d'Ising.

Notons que cette méthode se généralise pour construire une chaîne de Markov à espace d'état inclus dans \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, dont la loi d'équilibre admet une densité proportionnelle à $\exp H$ par rapport à une certaine mesure de probabilité de référence sur \mathbb{R}^n quelconque. C'est ce que nous allons voir dans le paragraphe suivant.

b) Cas général

Nous présentons une version générale des dynamiques décrites dans le paragraphe précédent (dans une généralité nous permettant de traiter ensuite le cas de notre modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC). Soit $n \geq 1$. Donnons-nous :

- ★ une mesure de probabilité ρ sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0,
- ★ un borélien \mathcal{X} de \mathbb{R}^n , inclus dans le support de $\rho^{\otimes n}$ et tel que $\rho^{\otimes n}(\mathcal{X}) > 0$,
- ★ une fonction H mesurable sur \mathcal{X} et à valeurs réelles vérifiant

$$Z_{n,H,\rho} = \int_{\mathcal{X}} \exp(H(x_1, \dots, x_n)) d\rho(x_1) \cdots d\rho(x_n) < +\infty.$$

Notons que, si $x \notin \mathcal{X}$, alors nous pouvons poser $H(x) = -\infty$ et l'intégrale ci-dessus devient une intégrale sur tout \mathbb{R}^n . Enfin supposons que H n'est pas la fonction nulle $\rho^{\otimes n}$ -presque partout.

Nous allons construire une chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ d'espace d'état \mathcal{X} et dont la loi stationnaire est la mesure de Gibbs $\mu_{n,H,\rho}$:

$$\frac{1}{Z_{n,H,\rho}} \exp(H(x_1, \dots, x_n)) \mathbb{1}_{\mathcal{X}}(x_1, \dots, x_n) d\rho(x_1) \cdots d\rho(x_n).$$

Pour cela, nous nous donnons :

i) des lois de proposition : soient $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ des fonctions mesurables et strictement positives sur $\mathcal{X} \times \mathbb{R}$ telles que

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall x \in \mathcal{X} \quad \int_{\mathbb{R}} \kappa_i(x, u) d\rho(u) = 1.$$

ii) des fonctions d'acceptation : soit φ une fonction mesurable sur $[0, +\infty[$ à valeurs dans $[0, 1]$ qui ne s'annule qu'en 0 et qui vérifie

$$\forall u \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \varphi(u) = u \varphi\left(\frac{1}{u}\right).$$

Pour chaque $i \in \{1, \dots, n\}$, nous définissons α_i la fonction d'acceptation de coordonnée i par

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n \quad \alpha_i(x, y) = \varphi \left(\frac{\exp(H(y)) \kappa_i(y, x_i)}{\exp(H(x)) \kappa_i(x, y_i)} \right).$$

Nous avons $\varphi(0) = 0$ donc, si $x \in \mathcal{X}$ et $y \notin \mathcal{X}$, alors $\alpha_i(x, y) = 0$. Autrement dit, dans la chaîne de Markov, un état $x \in \mathcal{X}$ ne peut pas passer à un état $y \notin \mathcal{X}$ où $H(y) = -\infty$: c'est attendu dans la mesure où la loi d'équilibre visée ne charge pas un tel y . Deux exemples de telles fonctions sont φ_g et φ_m , définies sur \mathbb{R} par

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \varphi_g(z) = \frac{z}{1+z} \quad \text{et} \quad \varphi_m(z) = \min(1, z).$$

Comme nous l'avons évoqué dans le paragraphe précédent, le choix de $\varphi = \varphi_m$ correspond à la dynamique *One-at-a-time Metropolis-Hastings* ou encore *Metropolis-within-Gibbs*. Il est étudié en détail dans le paragraphe 4 de [51] dans le cas où ρ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue. Le choix de $\varphi = \varphi_g$ correspond à la dynamique de *Glauber* ou *heat-bath*.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous notons

$$X_n(j) = (X_n^1(j), \dots, X_n^n(j)).$$

La chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ est définie selon l'algorithme suivant :

Algorithme XI.1. *Nous posons $X_n(0) = x_0$ pour un certain $x_0 \in \mathcal{X}$. Ensuite, pour tout $j \geq 1$, nous construisons la variable aléatoire $X_n(j+1)$ de la façon suivante :*

(a) *Une coordonnée i est choisie selon la loi uniforme dans $\{1, \dots, n\}$.*

(b) *Une variable aléatoire Z_j est choisie selon la loi $\kappa_i(X_n(j), y) d\rho(y)$. Nous définissons le vecteur aléatoire $Y(j) = (Y_1(j), \dots, Y_n(j))$ sur \mathbb{R}^n par*

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad Y_k(j) = \begin{cases} Z_j & \text{si } k = i, \\ X_n^k(j) & \text{si } k \neq i. \end{cases}$$

(c) *Nous posons*

$$X_n(j+1) = \begin{cases} Y(j) & \text{avec probabilité } \alpha_i(X_n(j), Y(j)), \\ X_n(j) & \text{avec probabilité } 1 - \alpha_i(X_n(j), Y(j)), \end{cases}$$

i.e., le changement de la coordonnée $X_n^i(j)$ en Z_j est accepté avec probabilité $\alpha_i(X_n(j), Y(j))$ et refusé avec probabilité $1 - \alpha_i(X_n(j), Y(j))$.

La suite $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ est alors une chaîne de Markov de noyau de transition

$$Q_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Q_{n,i},$$

où, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $Q_{n,i}$ est le noyau de transition correspondant aux étapes (b) et (c) de l'algorithme quand la coordonnée i a été choisie. Nous allons l'expliciter.

Pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $i \in \{1, \dots, n\}$, notons $x = (x_1, \dots, x_n)$ et

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \hat{x}_i(z) = (x_1, \dots, x_{i-1}, z, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Soient $i \in \{1, \dots, n\}$, $x \in \mathcal{X}$, $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ et $j \in \mathbb{N}$. Nous avons

$$Q_{n,i}(x, A) = \mathbb{P} \left(X_n(j+1) \in A \mid X_n(j) = x \quad \text{et} \quad \begin{array}{l} \text{la coordonnée } i \\ \text{a été choisie} \end{array} \right).$$

Pour simplifier, nous décomposons :

$$Q_{n,i}(x, A) = Q_{n,i}(x, A \cap \{x\}^c) + \mathbb{1}_{x \in A} Q_{n,i}(x, \{x\}).$$

Si $X_n(j) = x$ et si la coordonnée i a été choisie, alors $X_n(j+1) \in A \cap \{x\}^c$ si et seulement si une variable aléatoire $Z_j \neq x_i$ a été choisie selon la loi $\kappa_i(x, z) d\rho(z)$ avec $\hat{x}_i(Z_j) \in A$ et si le changement a été accepté. Ainsi

$$Q_{n,i}(x, A \cap \{x\}^c) = \int_{\mathbb{R} \setminus \{x_i\}} \mathbb{1}_{\hat{x}_i(z) \in A} \alpha_i(x, \hat{x}_i(z)) \kappa_i(x, z) d\rho(z).$$

Ensuite

$$Q_{n,i}(x, \{x\}) = 1 - Q_{n,i}(x, \mathcal{X} \cap \{x\}^c) = 1 - \int_{\mathbb{R} \setminus \{x_i\}} \alpha_i(x, \hat{x}_i(z)) \kappa_i(x, z) d\rho(z)$$

car $\alpha_i(x, \hat{x}_i(z)) = \varphi(0) = 0$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ tel que $\hat{x}_i(z) \notin \mathcal{X}$. Nous en déduisons que, pour toute fonction f continue bornée sur \mathcal{X} ,

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad Q_n f(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} (f(\hat{x}_i(z)) - f(x)) \alpha_i(x, \hat{x}_i(z)) \kappa_i(x, z) d\rho(z).$$

Théorème XI.2. La mesure $\mu_{n,H,\rho}$ est invariante pour la chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ définie par l'algorithme XI.1. Plus précisément elle est réversible.

Démonstration. Soient A et B dans $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$. Nous avons

$$\int_B Q_n(x, A) d\mu_{n,H,\rho}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_B Q_{n,i}(x, A) d\mu_{n,H,\rho}(x).$$

Soient $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in \mathcal{X}$. Par construction, nous avons

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \exp(H(x)) \alpha_i(x, \hat{x}_i(z)) \kappa_i(x, z) = \exp(H(\hat{x}_i(z))) \alpha_i(\hat{x}_i(z), x) \kappa_i(\hat{x}_i(z), x_i).$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \int_B Q_{n,i}(x, A \cap \{x\}^c) d\mu_{n,H,\rho}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathbb{1}_{x \in B} \mathbb{1}_{\hat{x}_i(z) \in A} \mathbb{1}_{z \neq x_i} \alpha_i(x, \hat{x}_i(z)) \kappa_i(x, z) \frac{\exp(H(x))}{Z_{n,H,\rho}} d\rho(x_1) \cdots d\rho(x_n) d\rho(z) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathbb{1}_{x \in B} \mathbb{1}_{\hat{x}_i(z) \in A} \mathbb{1}_{z \neq x_i} \alpha_i(\hat{x}_i(z), x) \kappa_i(\hat{x}_i(z), x_i) \frac{\exp(H(\hat{x}_i(z)))}{Z_{n,H,\rho}} d\rho(x_1) \cdots d\rho(x_n) d\rho(z). \end{aligned}$$

Nous allons renommer les variables dans l'intégrale ci-dessus : pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $z \in \mathbb{R}$, notons $u = x_i$, $y_i = z$ et $y_j = x_j$ pour tout $j \neq i$ (si bien que $\hat{x}_i(z) = y$ et $x = \hat{y}_i(u)$). Nous obtenons

$$\begin{aligned} & \int_B Q_{n,i}(x, A \cap \{x\}^c) d\mu_{n,H,\rho}(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \mathbb{1}_{\hat{y}_i(u) \in B} \mathbb{1}_{y \in A} \mathbb{1}_{u \neq y_i} \alpha_i(y, \hat{y}_i(u)) \kappa_i(y, u) \frac{\exp(H(y))}{Z_{n,H,\rho}} d\rho(y_1) \cdots d\rho(y_n) d\rho(u) \\ &= \int_A \frac{\exp(H(y))}{Z_{n,H,\rho}} \left(\int_{\mathbb{R} \setminus \{y_i\}} \mathbb{1}_{\hat{y}_i(u) \in B} \alpha_i(y, \hat{y}_i(u)) \kappa_i(y, u) d\rho(u) \right) \prod_{i=1}^n d\rho(y_i) \\ &= \int_A Q_{n,i}(y, B \cap \{y\}^c) d\mu_{n,H,\rho}(y). \end{aligned}$$

Ensuite

$$\int_B \mathbb{1}_{x \in A} Q_{n,i}(x, \{x\}) d\mu_{n,H,\rho}(x) = \int_A \mathbb{1}_{x \in B} Q_{n,i}(x, \{x\}) d\mu_{n,H,\rho}(x),$$

si bien que

$$\int_B Q_{n,i}(x, A) d\mu_{n,H,\rho}(x) = \int_A Q_{n,i}(x, B) d\mu_{n,H,\rho}(x).$$

Cela est valable pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ donc

$$\int_B Q_n(x, A) d\mu_{n,H,\rho}(x) = \int_A Q_n(x, B) d\mu_{n,H,\rho}(x).$$

Ainsi $\mu_{n,H,\rho}$ est réversible pour la chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$. En prenant $B = \mathcal{X}$, nous obtenons

$$\int_{\mathcal{X}} Q_n(x, A) d\mu_{n,H,\rho}(x) = \int_A Q_n(x, \mathcal{X}) d\mu_{n,H,\rho}(x) = \mu_{n,H,\rho}(A),$$

c'est-à-dire que $\mu_{n,H,\rho}$ est invariante pour la chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$. \square

Dans le cas où ρ est une mesure discrète et \mathcal{X} est égale au support de $\rho^{\otimes n}$, la chaîne est irréductible. En effet la probabilité de passer d'un état x à un état y en moins de n itérations de la chaîne est strictement positive (il suffit de changer la coordonnée x_1 en y_1 , puis x_2 en y_2 , etc.). Puisqu'elle admet une distribution invariante, elle est donc récurrente positive. Enfin il est immédiat que la chaîne est apériodique. Ainsi $X_n(j)$ converge en loi vers $\mu_{n,H,\rho}$ quand j tend vers $+\infty$.

Si ρ est quelconque, nous rencontrons des chaînes de Markov à espaces d'état généraux, pour lesquelles les notions d'irréductibilité, de récurrence, et de périodicité sont différentes du cas des chaînes de Markov à espace d'état au plus dénombrable (cf. [54] et [37]). Nous nous référons aux sections 4 et 5 de [51] pour une étude complète de $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ dans le cas où $\varphi = \varphi_m$, \mathcal{X} est un ouvert de \mathbb{R}^n et ρ admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Nous utilisons d'ailleurs ces résultats pour légitimer nos simulations (cf. paragraphe 34).

Nous verrons, dans le paragraphe 33, que $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ est $\rho^{\otimes n}$ -irréductible et apériodique dans le cas d'un modèle dynamique d'Ising Curie-Weiss de SOC (utilisant $\varphi = \varphi_g$).

c) Convergences de suites de chaînes de Markov

Dans ce paragraphe, nous énonçons quelques résultats généraux sur les convergences de suites de chaînes de Markov qui sont essentiels pour la preuve des théorèmes limites que nous montrons dans ce chapitre.

i) Convergence en probabilité

Nous commençons par énoncer le théorème 4.7 de l'article [41] de Thomas G. Kurtz sur la convergence en probabilité de familles de chaîne de Markov.

Théorème XI.3. *Soit $d \geq 1$ et soit E un borélien de \mathbb{R}^d . Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de processus stochastiques tels que, pour tout $n \geq 1$, $(Y_n(j), j \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov d'espace d'état $E_n \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$ inclus dans E et de noyau de transition μ_n . Nous supposons qu'il existe deux suites $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ et $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ dans $]0, +\infty[$ telles que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0,$$

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{x \in E_n} \alpha_n \int_{E_n} \|y - x\| \mu_n(x, dy) < +\infty$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E_n} \alpha_n \int_{E_n} \mathbb{1}_{\|y-x\| > \varepsilon_n} \|y - x\| \mu_n(x, dy) = 0.$$

Pour tout $n \geq 1$, nous définissons la fonction F_n sur E_n par

$$\forall x \in E_n \quad F_n(x) = \alpha_n \int_{E_n} (y - x) \mu_n(x, dy)$$

et nous supposons qu'il existe $M > 0$ et une fonction F définie sur E à valeurs dans \mathbb{R}^d telles que

$$\forall (x, y) \in E^2 \quad \|F(x) - F(y)\| \leq M \|x - y\|,$$

et vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E_n} |F_n(x) - F(x)| = 0.$$

Donnons-nous $m_0 \in E$, $T > 0$ et $Y(\cdot, m_0)$ une fonction de $[0, T]$ dans E vérifiant $Y(0, m_0) = m_0$ et

$$\forall t \in [0, T] \quad \frac{\partial Y}{\partial t}(t, m_0) = F(Y(t, m_0)).$$

Si $Y_n(0)$ converge en probabilité vers m_0 quand n tend vers $+\infty$, alors

$$\forall \delta > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |Y_n(\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor) - Y(t, m_0)| > \delta \right) = 0.$$

Nous appliquerons ce théorème pour montrer des lois des grands nombres pour un modèle dynamique d'Ising Curie-Weiss (cf. paragraphe 32) et un modèle dynamique d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée (cf. paragraphe 33).

ii) Convergence en loi

Supposons que E est un espace métrique localement compact, muni de sa tribu borélienne. Notons $C_0(E)$ l'ensemble des fonctions continues f de E dans \mathbb{R} qui tendent vers 0 à l'infini, c'est-à-dire, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K_ε de E tel que $|f(x)| < \varepsilon$ pour tout $x \in E \setminus K_\varepsilon$. Nous le munissons de la norme $\|\cdot\|_\infty$, si bien qu'il s'agit d'un espace de Banach. Nous notons $\mathcal{D}([0, +\infty[, E)$ l'espace de Skorokhod, constitué des fonctions de $[0, +\infty[\rightarrow E$ continues à droites avec des limites à gauche (càdlàg en abrégé).

Le théorème suivant permet d'établir la convergence en loi de fonctions de suites de chaînes de Markov d'espace d'état inclus dans E vers des processus de Markov. Il fait appel aux notions de semi-groupes de transition de Feller et de leur générateur. Nous renvoyons pour cela aux chapitres 1 et 4 de [27].

Théorème XI.4. *Soit E un espace métrique localement compact et séparable. Pour tout $n \geq 1$, nous nous donnons :*

- ★ un espace métrique E_n muni de sa tribu borélienne \mathcal{B}_n ,
- ★ une fonction η_n mesurable de E_n dans E ,
- ★ une chaîne de Markov $(Y_n(j), j \in \mathbb{N})$, d'espace d'état E_n et de noyau de transition μ_n .

Soit $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ une suite dans $]0, +\infty[$ qui tend vers 0 en $+\infty$. Pour tout $n \geq 1$, nous introduisons

- ★ $U_n(t) = \eta_n(Y_n(\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor))$ pour tout $t \geq 0$,
- ★ A_n l'opérateur linéaire sur $B(E_n)$ défini par

$$\forall f \in B(E_n) \quad \forall x \in E_n \quad A_n f(x) = \frac{1}{\varepsilon_n} \int_{E_n} (f(y) - f(x)) \mu_n(x, dy).$$

Soit $(Q_t, t \geq 0)$ un semi-groupe de transition de Feller sur E de générateur A . Supposons qu'il existe $D \subset C_0(E)$ un core¹ pour A tel que, pour tout $f \in D$, il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vérifiant $f_n \in D(A_n)$ pour tout $n \geq 1$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E_n} |f_n(x) - f \circ \eta_n(x)| = 0, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E_n} |A_n f_n(x) - (Af) \circ \eta_n(x)| = 0.$$

Supposons enfin que $(U_n(0))_{n \geq 1}$ converge en loi vers $\nu_\infty \in \mathcal{M}_1(E)$. Alors il existe un processus de Markov $(\mathcal{U}(t), t \geq 0)$ sur E associé à $(Q_t, t \geq 0)$ et de mesure initiale $\nu_\infty \in \mathcal{M}_1(E)$ tel que

$$(U_n(t), t \geq 0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (\mathcal{U}(t), t \geq 0),$$

pour la convergence en loi dans $\mathcal{D}([0, +\infty[, E)$.

Expliquons comment ce théorème découle de plusieurs résultats de [27]. Pour tout $n \geq 1$, nous définissons T_n sur $L_n = B(E_n)$ par

$$\forall f \in B(E_n) \quad \forall x \in E_n \quad T_n f(x) = \int_{E_n} f(y) \mu_n(x, dy).$$

Nous définissons aussi $(T(t), t \geq 0)$ sur $C_0(E)$ par

$$\forall t \geq 0 \quad \forall f \in B(E) \quad \forall x \in E \quad T(t)f(x) = \int_E f(y) Q_t(x, dy).$$

Le semi-groupe $(T(t), t \geq 0)$ est alors de Feller sur $C_0(E)$ de générateur A , au sens défini à la page 166 de [27]. Le théorème 6.5 du chapitre 1 de [27] nous assure que

$$\forall f \in C_0(E) \quad \forall t \geq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in E_n} |T_n^{\lfloor t/\varepsilon_n \rfloor} (f \circ \eta_n)(x) - (T(t)f)(\eta_n(x))| = 0.$$

Nous concluons alors avec le théorème 2.12 du chapitre 4 de [27].

32 Dynamique de Glauber pour le modèle d'Ising Curie-Weiss

a) Définition du modèle

Donnons-nous $n \geq 1$ et $\beta > 0$. Nous définissons la fonction $H_{n,\beta}$ sur $\mathcal{X}_n = \{-1, 1\}^n$ par

$$\forall x \in \mathcal{X}_n \quad H_{n,\beta}(x) = \frac{\beta (x_1 + \cdots + x_n)^2}{2n}$$

et la fonction $\Phi_{n,\beta}$ sur \mathcal{X}_n^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X}_n^2 \quad \Phi_{n,\beta}(x, y) = \frac{1}{1 + \exp(H_{n,\beta}(x) - H_{n,\beta}(y))}.$$

La dynamique de Glauber pour le modèle d'Ising Curie-Weiss, à n particules et associé à la température inverse β , est la chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ définie par l'algorithme suivant :

1. Un sous-ensemble D de $D(A)$ est un core pour le générateur A si, pour tout $f \in D(A)$, il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de D vérifiant

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \|A_n f_n - Af\|_\infty = 0.$$

Algorithme XI.5. Nous posons $X_n(0) = x_0$ pour un certain $x_0 \in \{-1, 1\}^n$. Ensuite, pour tout $j \geq 1$, nous construisons la variable aléatoire $X_n(j+1)$ de la façon suivante :

(a) Une coordonnée i est choisie selon la loi uniforme dans $\{1, \dots, n\}$.

(b) Une variable aléatoire Z_j est choisie selon la loi $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$. Nous définissons le vecteur aléatoire $Y(j) = (Y_1(j), \dots, Y_n(j))$ sur \mathbb{R}^n par

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad Y_k(j) = \begin{cases} Z_j & \text{si } k = i, \\ X_n^k(j) & \text{si } k \neq i. \end{cases}$$

(c) Nous posons

$$X_n(j+1) = \begin{cases} Y(j) & \text{avec probabilité } \Phi_{n,\beta}(X_n(j), Y(j)), \\ X_n(j) & \text{avec probabilité } 1 - \Phi_{n,\beta}(X_n(j), Y(j)). \end{cases}$$

Il s'agit de l'algorithme XI.1 avec $\rho = (\delta_{-1} + \delta_1)/2$, $H = H_{n,\beta}$, $\varphi : z \mapsto z/(1+z)$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\kappa_i = 1$ et $\alpha_i = \Phi_{n,\beta}$.

Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 31.b), $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov irréductible, récurrente positive et apériodique dont l'unique mesure invariante est $\mu_{n,\beta}$, la mesure de Gibbs associée au modèle d'Ising Curie-Weiss à la température $1/\beta$. En particulier, $X_n(j)$ converge en loi vers $\mu_{n,\beta}$ quand j tend vers $+\infty$.

b) Loi des grands nombres

Pour tous $n \geq 1$ et $j \in \mathbb{N}$, nous posons

$$S_n(j) = X_n^1(j) + \dots + X_n^n(j),$$

où $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ est la chaîne de Markov définie par l'algorithme XI.5. Donnons-nous $n \geq 1$ et posons

$$E_n = \left\{ -1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}.$$

Proposition XI.6. Le processus $(S_n(j)/n, j \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov d'espace d'état E_n et de matrice de transition P_n telle que, pour tout $(u, v) \in E_n^2$,

$$P_n(u, v) = \begin{cases} (1-u)(4 + 4 \exp(-2\beta(u+1/n)))^{-1} & \text{si } v = u + 2/n, \\ (1+u)(4 + 4 \exp(-2\beta(-u+1/n)))^{-1} & \text{si } v = u - 2/n, \\ 1 - P_n(u, u+2/n) - P_n(u, u-2/n) & \text{si } v = u, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Démonstration. Remarquons que l'espace d'état du processus $(S_n(j)/n, j \in \mathbb{N})$ est E_n et que

$$\forall j \in \mathbb{N} \quad S_n(j+1) - S_n(j) \in \{-2, 0, 2\}.$$

Supposons que $S_n(j) = nu$ pour un certain $u \in E_n$ et un certain $j \in \mathbb{N}$. Alors le vecteur $X_n(j)$ est composé de $n(1+u)/2$ coordonnées valant $+1$ et $n(1-u)/2$ coordonnées valant -1 . Pour que $S_n(j+1)/n = u + 2/n$, il faut avoir tiré un -1 à l'étape (a) de l'algorithme (avec probabilité $(1-u)/2$), puis un $+1$ à l'étape (b) (avec probabilité $1/2$) et avoir accepté le changement de coordonnée l'étape à (c), ce qui arrive avec probabilité

$$\begin{aligned} \Phi_{n,\beta}(X_n(j), Y(j)) &= \left(1 + \exp\left(\frac{\beta S_n(j)^2}{2n} - \frac{\beta(S_n(j)+2)^2}{2n}\right) \right)^{-1} \\ &= \left(1 + \exp\left(\frac{n\beta u^2}{2} - \frac{n\beta(u+2/n)^2}{2}\right) \right)^{-1} \\ &= \left(1 + \exp(-2\beta(u+1/n)) \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Cette probabilité ne dépend que de u . Le théorème de lumping (cf. théorème 6.3.2 de [40]), entraîne alors que le processus $(S_n(j)/n, j \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov et que

$$\mathbb{P}\left(\frac{S_n(j+1)}{n} = u + \frac{2}{n} \mid \frac{S_n(j)}{n} = u\right) = P_n(u, u + 2/n) = \frac{1-u}{4 + 4 \exp(-2\beta(u + 1/n))}.$$

De façon analogue, nous calculons $P_n(u, u - 2/n)$ et $P_n(u, u)$. \square

Soient $\beta > 0$ et $n \neq 1$. Nous définissons la fonction $F_{n,\beta}$ sur E_n par

$$\forall u \in E_n \quad F_{n,\beta}(u) = n \sum_{v \in E_n} (u - v) P_n(u, v).$$

Explicitons-la : pour tout $u \in E_n$, nous avons

$$\begin{aligned} F_{n,\beta}(u) &= n \left(\frac{2}{n} P_n(u, u + 2/n) - \frac{2}{n} P_n(u, u - 2/n) \right) \\ &= \frac{1-u}{2 + 2 \exp(-2\beta(u + 1/n))} - \frac{1+u}{2 + 2 \exp(-2\beta(-u + 1/n))}. \end{aligned}$$

Notons que $E_n \subset [-1, 1]$ et que l'expression ci-dessus se prolonge à tout $u \in [-1, 1]$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} F_{n,\beta}(u) &= \frac{1-u}{2 + 2 \exp(-2\beta u)} - \frac{1+u}{2 + 2 \exp(2\beta u)} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + \exp(-2\beta u)} - \frac{1}{1 + \exp(2\beta u)} \right) - \frac{u}{2} \left(\frac{1}{1 + \exp(-2\beta u)} + \frac{1}{1 + \exp(2\beta u)} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\exp(\beta u)}{2 \operatorname{ch}(\beta u)} - \frac{\exp(-\beta u)}{2 \operatorname{ch}(\beta u)} \right) - \frac{u}{2} \left(\frac{\exp(\beta u)}{2 \operatorname{ch}(\beta u)} + \frac{\exp(-\beta u)}{2 \operatorname{ch}(\beta u)} \right) = F_\beta(u), \end{aligned}$$

où F_β est la fonction définie sur $[-1, 1]$ par

$$\forall u \in [-1, 1] \quad F_\beta(u) = \frac{1}{2} (\operatorname{th}(\beta u) - u).$$

La fonction F_β est de classe C^1 sur $[-1, 1]$ et sa fonction dérivée est bornée sur $[-1, 1]$. Par conséquent elle est Lipschitzienne et le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que, pour tout $m_0 \in [-1, 1]$, il existe une unique solution à l'équation différentielle ordinaire $y'(t) = F_\beta(y(t))$, de solution initiale m_0 . Nous allons alors appliquer le théorème XI.3 à la suite de chaînes de Markov $(S_n(j)/n, j \in \mathbb{N})_{n \geq 1}$ pour obtenir :

Théorème XI.7. *Supposons que $(S_n(0)/n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers un certain $m_0 \in [-1, 1]$. Notons $y_\beta(\cdot, m_0)$ l'unique fonction de classe C^1 sur \mathbb{R} qui est solution de l'équation différentielle ordinaire $y'(t) = F_\beta(y(t))$, de valeur initiale m_0 . Nous avons*

$$\forall \delta > 0 \quad \forall T > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{S_n(\lfloor nt \rfloor)}{n} - y_\beta(t, m_0) \right| > \delta \right) = 0.$$

Démonstration. Soient $n \geq 1$ et $u \in E_n$. Posons $\varepsilon_n = 2/\sqrt{n}$. Nous avons

$$n \sum_{v \in E_n} |u - v| P_n(u, v) = \frac{1-u}{2 + 2 \exp(-2\beta(u + 1/n))} + \frac{1+u}{2 + 2 \exp(-2\beta(-u + 1/n))} \leq 1,$$

$$n \sum_{\substack{v \in E_n \\ |v-u| > \varepsilon_n}} |u - v| P_n(u, v) = 0,$$

si bien que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{u \in E_n} n \sum_{v \in E_n} |u - v| P_n(u, v) \leq 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{u \in E_n} n \sum_{\substack{v \in E_n \\ |v-u| > \varepsilon_n}} |u - v| P_n(u, v) = 0.$$

Ensuite, pour tout $u \in [-1, 1]$,

$$\frac{1}{1 + \exp(-2\beta(u + 1/n))} - \frac{1}{1 + \exp(-2\beta u)} = \frac{\exp(-2\beta u) - \exp(-2\beta(u + 1/n))}{(1 + \exp(-2\beta(u + 1/n)))(1 + \exp(-2\beta u))}$$

$$\leq \exp(-2\beta u) (1 - \exp(-2\beta/n))$$

$$\leq \exp(2\beta) (1 - \exp(-2\beta/n)).$$

Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{u \in E_n} |F_{n,\beta}(u) - F_\beta(u)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \exp(2\beta) (1 - \exp(-2\beta/n)) = 0.$$

Enfin F_β est Lipschitzienne sur $[-1, 1]$, si bien que le théorème [XI.7](#) est une conséquence du théorème [XI.3](#) (avec $E = [-1, 1]$, et $\alpha_n = n$ et $\mu_n(u, \{v\}) = P_n(u, v)$ pour tous $n \geq 1$ et $(u, v) \in E_n^2$). \square

c) Fluctuations

Nous allons utiliser le théorème [XI.4](#) pour étudier les fluctuations de $S_n(j)$, $j \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$. Etant donné les résultats sur la mesure invariante (la mesure de Gibbs associée au modèle d'Ising Curie-Weiss) nous pouvons conjecturer que les fluctuations sont d'ordre \sqrt{n} si $\beta < 1$ et d'ordre $n^{3/4}$ si $\beta = 1$.

Soit $\gamma \in \{1/4, 1/2\}$. Notons $P_{n,\gamma}$ la matrice de transition de $(S_n(j)/n^{1-\gamma}, j \in \mathbb{N})$, chaîne de Markov d'espace d'état $E_{n,\gamma} = n^\gamma E_n$. Donnons-nous $u \in E_{n,\gamma}$ et f une fonction bornée sur \mathbb{R} de classe C^2 . Nous avons

$$A_{n,\gamma} = n^{2(1-\gamma)}(P_{n,\gamma} - I_n)f(u)$$

$$= n^{2(1-\gamma)} \left(f\left(u + \frac{2}{n^{1-\gamma}}\right) - f(u) \right) \mathbb{P}\left(\frac{S_n(j+1)}{n^{1-\gamma}} = u + \frac{2}{n^{1-\gamma}} \mid \frac{S_n(j)}{n^{1-\gamma}} = u\right)$$

$$+ n^{2(1-\gamma)} \left(f\left(u - \frac{2}{n^{1-\gamma}}\right) - f(u) \right) \mathbb{P}\left(\frac{S_n(j+1)}{n^{1-\gamma}} = u - \frac{2}{n^{1-\gamma}} \mid \frac{S_n(j)}{n^{1-\gamma}} = u\right),$$

si bien que

$$A_{n,\gamma} = n^{2(1-\gamma)} \left(f\left(u + \frac{2}{n^{1-\gamma}}\right) - f(u) \right) P_n\left(\frac{u}{n^\gamma}, \frac{u}{n^\gamma} + \frac{2}{n}\right)$$

$$+ n^{2(1-\gamma)} \left(f\left(u - \frac{2}{n^{1-\gamma}}\right) - f(u) \right) P_n\left(\frac{u}{n^\gamma}, \frac{u}{n^\gamma} - \frac{2}{n}\right).$$

Examinons le comportement de cette quantité quand n tend vers $+\infty$. Au voisinage de 0,

$$\frac{1}{1 + \exp(-z)} = \frac{1}{2} + \frac{z}{4} - \frac{z^3}{48} + (z^4).$$

Soit $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. Nous avons alors, quand n tend vers $+\infty$,

$$\frac{1}{1 + \exp(-2\beta(u\varepsilon/n^\gamma + 1/n))} = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{u\varepsilon}{2n^{1/4}} - \frac{u^3\varepsilon}{6n^{3/4}} + o\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right) & \text{si } \beta = 1 \text{ et } \gamma = 1/4, \\ \frac{1}{2} + \frac{\beta u\varepsilon}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & \text{si } \beta < 1 \text{ et } \gamma = 1/2. \end{cases}$$

Par conséquent, quand n tend vers $+\infty$,

$$P_n \left(\frac{u}{n^\gamma}, \frac{u}{n^\gamma} + \frac{2\varepsilon}{n} \right) = \begin{cases} \frac{1}{8} - \frac{u^2}{8\sqrt{n}} - \frac{u^3\varepsilon}{24n^{3/4}} + o\left(\frac{1}{n^{3/4}}\right) & \text{si } \beta = 1 \text{ et } \gamma = 1/4, \\ \frac{1}{8} - \frac{(1-\beta)u\varepsilon}{8\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) & \text{si } \beta < 1 \text{ et } \gamma = 1/2. \end{cases}$$

Ensuite la formule de Taylor-Young nous assure que, quand n tend vers $+\infty$,

$$n^{2(1-\gamma)} \left(f \left(u + \frac{2\varepsilon}{n^{1-\gamma}} \right) - f(u) \right) = 2\varepsilon n^{1-\gamma} f'(u) + 2f''(u) + o(1).$$

En rassemblant toutes ces approximations et en développant l'expression de $A_{n,\gamma}$, nous obtenons que, quand n tend vers $+\infty$,

$$A_{n,\gamma} f(u) = \begin{cases} \frac{1}{2} f''(u) - \frac{u^3}{6} f'(u) + o(1) & \text{si } \beta = 1 \text{ et } \gamma = 1/4, \\ \frac{1}{2} f''(u) - \frac{(1-\beta)u}{2} f'(u) + o(1) & \text{si } \beta < 1 \text{ et } \gamma = 1/2, \end{cases}$$

Ces convergences de générateurs nous suggèrent les théorèmes suivants :

Théorème XI.8. *Supposons que $\beta = 1$ et qu'il existe une mesure de probabilité ν_∞ telle que*

$$\frac{S_n(0)}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \nu_\infty.$$

Soit $(B(t), t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard sur \mathbb{R} . Notons $(U_1(t), t \geq 0)$ l'unique solution faible de l'équation différentielle stochastique

$$dz(t) = -\frac{z^3(t)}{6} dt + dB(t), \quad (\mathcal{E}_1)$$

de distribution initiale ν_∞ . Alors

$$\left(\frac{S_n(\lfloor n^{3/2}t \rfloor)}{n^{3/4}}, t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (U_1(t), t \geq 0),$$

pour la convergence en loi dans $\mathcal{D}([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Théorème XI.9. *Supposons que $\beta < 1$ et qu'il existe une mesure de probabilité ν_∞ telle que*

$$\frac{S_n(0)}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \nu_\infty.$$

Soit $(B(t), t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard sur \mathbb{R} . Nous définissons $(U_\beta(t), t \geq 0)$ par

$$\forall t \geq 0 \quad U_\beta(t) = U_\infty \exp \left(-\frac{(1-\beta)t}{2} \right) + \int_0^t \exp \left(-\frac{(1-\beta)(t-s)}{2} \right) dB(s),$$

où U_∞ est une variable aléatoire de loi ν_∞ . Nous avons

$$\left(\frac{S_n(\lfloor nt \rfloor)}{\sqrt{n}}, t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (U_\beta(t), t \geq 0),$$

pour la convergence en loi dans $\mathcal{D}([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

Démonstration des théorèmes XI.8 et XI.9. Si $\beta < 1$ alors $(U_\beta(t), t \geq 0)$ est l'unique solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$dz(t) = -\frac{(1-\beta)z(t)}{2} dt + dB(t),$$

de distribution initiale ν_∞ . Il s'agit d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Ensuite, d'après les théorèmes 3.7 et 3.10 du chapitre 5 de [27], l'équation différentielle stochastique (\mathcal{E}_1) admet une unique solution faible. Enfin les théorèmes 1.1 du chapitre 8 et 2.7 du chapitre 4 de [27] nous assurent que, pour tout $\beta \leq 1$, $(U_\beta(t), t \geq 0)$ est un processus de Markov dont le semi-groupe de transition est de Feller, généré par $(A_\beta, D(A_\beta))$ et tel que $C_c^2(\mathbb{R})$, l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} de classe C^2 à support compact, est inclus dans $D(A_\beta)$. Si $\beta < 1$, alors

$$\forall f \in C_c^2(\mathbb{R}) \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad A_\beta f(u) = \frac{1}{2} f''(u) - \frac{(1-\beta)u}{2} f'(u),$$

et si $\beta = 1$, alors

$$\forall f \in C_c^2(\mathbb{R}) \quad \forall u \in \mathbb{R} \quad A_1 f(u) = \frac{1}{2} f''(u) - \frac{u^3}{6} f'(u).$$

Supposons que $\beta = 1$ et prenons $\gamma = 1/4$. Nous posons $\psi(z) = (1 + e^{-z})^{-1}$ pour tout $z \in \mathbb{R}$ et nous définissons

$$R_{\varepsilon,n}^k(u) = \frac{(2u\varepsilon + 2/n^{3/4})^{k+1}}{k!} \int_0^1 (1-s)^k \psi^{(k)} \left(\frac{2u\varepsilon s}{n^{1/4}} + \frac{2s}{n} \right) ds$$

pour tous $k \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ et $u \in \mathbb{R}$. D'après la formule de Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{R} \quad \psi(z) &= \frac{1}{2} + z \int_0^1 \psi'(zs) ds = \frac{1}{2} + \frac{z}{4} + \frac{z^3}{2} \int_0^1 (1-s)^2 \psi^{(3)}(zs) ds \\ &= \frac{1}{2} + \frac{z}{4} - \frac{z^3}{48} + \frac{z^4}{6} \int_0^1 (1-s)^3 \psi^{(4)}(zs) ds. \end{aligned}$$

Soient f une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} et $n \geq 1$. Nous avons, pour tous $u \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon \in \{-1, 1\}$,

$$\begin{aligned} &\left(f \left(u + \frac{2\varepsilon}{n^{3/4}} \right) - f(u) \right) P_n \left(\frac{u}{n^{1/4}}, \frac{u}{n^{1/4}} + \frac{2\varepsilon}{n} \right) \\ &= \left(\frac{2\varepsilon}{n^{3/4}} f'(u) + \frac{2}{n^{3/2}} f''(u) + \frac{\varepsilon}{n^{9/4}} \int_0^1 (1-s)^2 f^{(3)}(su) ds \right) \left(\frac{1}{4} - \frac{u\varepsilon}{4n^{1/4}} \right) \psi \left(\frac{2u\varepsilon}{n^{1/4}} + \frac{2}{n} \right) \\ &= \frac{\varepsilon f'(u)}{2n^{3/4}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{2u\varepsilon}{n^{1/4}} + \frac{2}{n} \right) - \frac{1}{48} \left(\frac{2u\varepsilon}{n^{1/4}} + \frac{2}{n} \right)^3 + \frac{1}{n} R_{\varepsilon,n}^3(u) \right) \\ &\quad - \frac{u f'(u)}{2n} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left(\frac{2u\varepsilon}{n^{1/4}} + \frac{2}{n} \right) + \frac{1}{n^{3/4}} R_{\varepsilon,n}^2(u) \right) \\ &\quad + \frac{f''(u)}{2n^{3/2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n^{1/4}} R_{\varepsilon,n}^0(u) - \frac{u\varepsilon}{n^{1/4}} \psi \left(\frac{2u\varepsilon}{n^{1/4}} + \frac{2}{n} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\varepsilon}{n^{9/4}} \int_0^1 (1-s)^2 f^{(3)}(su) ds \left(\frac{1}{4} - \frac{u\varepsilon}{4n^{1/4}} \right) \psi \left(\frac{2u\varepsilon}{n^{1/4}} + \frac{2}{n} \right). \end{aligned}$$

Après simplification, nous obtenons

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad A_{n,\gamma} f(u) = \frac{1}{2} f''(u) - \frac{u^3}{6} f'(u) + \frac{1}{2n^{1/4}} R_n(u),$$

avec

$$\begin{aligned} R_n(u) = & -uf'(u)\left(R_{+1,n}^2(u) + R_{-1,n}^2(u)\right) - \frac{uf'(u)}{n^{1/4}} - \frac{uf'(u)}{n^{5/4}} + f'(u)\left(R_{+1,n}^3(u) - R_{-1,n}^3(u)\right) \\ & + f''(u)\left(R_{+1,n}^1(u) + R_{-1,n}^1(u)\right) - uf''(u)\left(\psi\left(\frac{2u}{n^{1/4}} + \frac{2}{n}\right) - \psi\left(-\frac{2u}{n^{1/4}} + \frac{2}{n}\right)\right) \\ & + \frac{1}{n^2} \int_0^1 (1-s)^2 f^{(3)}(su) ds \left[\left(\frac{1}{4} - \frac{u}{4n^{1/4}}\right) \psi\left(\frac{2u}{n^{1/4}} + \frac{2}{n}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{u}{4n^{1/4}}\right) \psi\left(-\frac{2u}{n^{1/4}} + \frac{2}{n}\right) \right]. \end{aligned}$$

Les dérivées successives de ψ sont bornées donc, si f a un support compact, alors $(R_n)_{n \geq 1}$ est uniformément bornée sur \mathbb{R} . Nous en déduisons que, pour toute fonction $f \in C_c^2(\mathbb{R})$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{u \in E_n} |A_{n,\gamma} f(u) - Af(u)| \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{u \in \mathbb{R}} \frac{|R_n(u)|}{2n^{1/4}} = 0.$$

Le théorème XI.4 avec $Y_n(j) = S_n(j)/n^{3/4}$ pour tout $j \in \mathbb{N}$, $E_n = E = \mathbb{R}$, $\eta_n = \text{Id}_{\mathbb{R}}$, $\varepsilon_n = n^{-3/2}$ pour tout $n \geq 1$ et D un core pour A inclus dans $C_c^2(\mathbb{R})$ (cf. le chapitre introductif de [27]), entraîne alors que $(S_n(\lfloor n^{3/2}t \rfloor)/n^{3/4}, t \geq 0)$ converge en loi vers $(U_1(t), t \geq 0)$ dans $\mathcal{D}([0, +\infty[, \mathbb{R})$. Ceci termine la preuve du théorème XI.8. La démonstration du théorème XI.9 est analogue. \square

Nous avons vu, au paragraphe 32.b), une loi des grands nombres pour $(S_n(\lfloor nt \rfloor)/n, t \geq 0)$. Les deux théorèmes précédents nous assurent que les fluctuations dans le cas non-critique sont d'ordre \sqrt{n} et que le processus limite est un processus d'Ornstein-Uhlenbeck. Il s'agit donc d'un comportement typique – ou normal, dans le sens Gaussien du terme. Par contre, dans le cas critique, il nous faut encore accélérer le temps d'un facteur \sqrt{n} . Les fluctuations de $(S_n(\lfloor n^{3/2}t \rfloor), t \geq 0)$ sont d'ordre $n^{3/4}$ et le processus limite est solution d'une équation différentielle stochastique du type

$$dz(t) = -\alpha_* z^3(t) dt + \sigma_* dB(t), \quad (\mathcal{E}_c)$$

avec $(B(t), t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard et α_* , σ_* des constantes strictement positives. C'est précisément ce comportement asymptotique que nous attendons désormais d'un modèle dynamique construit autour du modèle d'Ising Curie-Weiss. Notons que nous retrouvons ce comportement dans le cas critique du modèle champ moyen de particules en interaction dynamique, étudié par Donald A. Dawson dans [19], et dont les principaux résultats sont présentés dans le paragraphe 35.b).

Pour terminer ce paragraphe, regardons le comportement asymptotique (quand t tend vers $+\infty$) des processus limites : le théorème 2.1 de [52] nous assure que $(U_1(t), t \geq 0)$ admet $C \exp(-x^4/12) dx$ pour unique distribution invariante et que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}} \left| \mathbb{P}(U_1(t) \in A \mid U_1(0) = x) - \int_A C \exp\left(-\frac{s^4}{12}\right) ds \right| = 0.$$

De plus, pour tout $\beta < 1$, $(U_\beta(t), t \geq 0)$ admet $\mathcal{N}(0, 1/(1-\beta))$ pour unique distribution invariante et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}} \left| \mathbb{P}(U_\beta(t) \in A \mid U_\beta(0) = x) - \frac{\sqrt{1-\beta}}{2\pi} \int_A \exp\left(-\frac{(1-\beta)s^2}{2}\right) ds \right| = 0.$$

Ces résultats sont cohérents avec ceux du modèle d'Ising Curie-Weiss (exposés à la fin du paragraphe 2.a)). C'est ce qui était attendu puisque $X_n(j)$ converge en loi vers $\mu_{n,\beta}$, la mesure de Gibbs associée au modèle d'Ising Curie-Weiss à la température $1/\beta$, quand j tend vers $+\infty$. Nous avons prouvé un diagramme commutatif de convergence en loi (du type de celui exposé à la fin du paragraphe 5.b)).

33 Dynamique de Glauber pour le modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC

a) Définition du modèle

Soit ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0. Notons \mathcal{S}_ρ le support de ρ . Donnons-nous $n \geq 1$. Nous définissons la fonction H_n sur $\mathcal{X}_n = \mathcal{S}_\rho^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$ par

$$\forall x \in \mathcal{X}_n \quad H_n(x) = \frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2}$$

et la fonction Φ_n sur $\mathcal{X}_n \times \mathbb{R}^n$ par

$$\forall (x, y) \in \mathcal{X}_n \times \mathbb{R}^n \quad \Phi_n(x, y) = \frac{1}{1 + \exp(H_n(x) - H_n(y))} \mathbb{1}_{y_1^2 + \dots + y_n^2 > 0}.$$

La dynamique de Glauber pour le modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC, à n particules et associé à la mesure ρ , est la chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ définie par l'algorithme suivant :

Algorithme XI.10. *Nous posons $X_n(0) = x_n$ pour un certain x_n dans $\mathcal{S}_\rho^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. Ensuite, pour tout $j \geq 1$, nous construisons la variable aléatoire $X_n(j+1)$ de la façon suivante :*

(a) *Une coordonnée i est choisie selon la loi uniforme dans $\{1, \dots, n\}$.*

(b) *Une variable aléatoire Z_j est choisie selon la loi ρ . Nous définissons le vecteur aléatoire $Y(j) = (Y_1(j), \dots, Y_n(j))$ sur \mathbb{R}^n par*

$$\forall k \in \{1, \dots, n\} \quad Y_k(j) = \begin{cases} Z_j & \text{si } k = i, \\ X_n^k(j) & \text{si } k \neq i. \end{cases}$$

(c) *Nous posons*

$$X_n(j+1) = \begin{cases} Y(j) & \text{avec probabilité } \Phi_n(X_n(j), Y(j)), \\ X_n(j) & \text{avec probabilité } 1 - \Phi_n(X_n(j), Y(j)). \end{cases}$$

Il s'agit de l'algorithme XI.1 avec $\mathcal{X} = \mathcal{X}_n$, $H = H_n$, $\varphi : z \mapsto z/(1+z)$ et, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\kappa_i = 1$ et $\alpha_i = \Phi_n$.

Pour tout $n \geq 1$, notons Q_n la matrice de transition de $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$. D'après les résultats du paragraphe 31.b), pour toute fonction f continue bornée sur \mathcal{X}_n et pour tout $x \in \mathcal{X}_n$, nous avons

$$Q_n f(x) = f(x) + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}} \frac{f(\hat{x}_i(z)) - f(x)}{1 + \exp(H_n(x) - H_n(\hat{x}_i(z)))} \mathbb{1}_{x_1^2 + \dots + x_{i-1}^2 + z^2 + x_{i+1}^2 + \dots + x_n^2 > 0} d\rho(z).$$

Proposition XI.11. *La chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ admet $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ pour unique distribution invariante. De plus, pour $\rho^{\otimes n}$ -presque tout $x \in \mathcal{X}_n$,*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}_n}} \left| \mathbb{P}(X_n(j) \in A \mid X_n(0) = x) - \mu_{n,H,\rho}(A) \right| = 0.$$

Avant de montrer cette proposition, rappelons les notions d'irréductibilité et de périodicité dans le cas des chaînes de Markov à espace d'état général (cf. [54] et [37]) : soit $(\xi_n)_{n \geq 1}$ une chaîne de Markov de noyau de transition P sur un espace mesurable $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$ et soit Φ une mesure de probabilité (non nulle) sur $(\mathcal{X}, \mathcal{F})$. Pour tout $A \in \mathcal{F}$, notons $\tau_A = \inf \{n \geq 1 : X_n \in A\}$ le

temps de premier retour en A (éventuellement infini). La chaîne de Markov $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite Φ -irréductible si, pour tout $A \in \mathcal{F}$ tel que $\Phi(A) > 0$, nous avons

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad \mathbb{P}(\tau_A < +\infty | \xi_0 = x) > 0.$$

Si $(\xi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède de plus une mesure stationnaire μ alors sa période est définie comme le plus grand entier d tel qu'il existe une partition $\mathcal{X}_1 \cup \dots \cup \mathcal{X}_d$ de \mathcal{X} , avec $\mu(\mathcal{X}_i) > 0$ pour tout $i \in \{1, \dots, d\}$, et

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{X}_d \quad Q(x, \mathcal{X}_1) &= 1, \\ \forall i \in \{1, \dots, d-1\} \quad \forall x \in \mathcal{X}_i \quad Q(x, \mathcal{X}_{i+1}) &= 1. \end{aligned}$$

Si $d = 1$ alors la chaîne est dite apériodique.

Démonstration. Nous avons vu dans le paragraphe 31.b) que la chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ admet $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ pour mesure invariante. Si nous montrons qu'elle est $\rho^{\otimes n}$ -irréductible et apériodique, alors le théorème 1 de [54] entraîne la convergence annoncée dans la proposition. En particulier $\mu_{n,H,\rho}$ est l'unique mesure de probabilité invariante pour $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$.

Montrons que la chaîne est $\rho^{\otimes n}$ -irréductible : pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, notons $M_{n,i}$ la mesure sur \mathcal{X}_n définie par

$$\forall x \in \mathcal{X}_n \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}_n} \quad M_{n,i}(x, A) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{\hat{x}_i(z) \in A} \Phi_n(x, \hat{x}_i(z)) d\rho(z).$$

Donnons-nous $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $x \in \mathcal{X}_n$. Puisque la fonction Φ_n est invariante par permutation de ses coordonnées et quitte à réordonner les coordonnées de x , nous supposons que $x_n \neq 0$.

Supposons que $A = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_n, b_n]$ avec $a_1 < b_1, \dots, a_n < b_n$ des réels. Pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$ et pour tout $(z_1, \dots, z_i) \in \mathbb{R}^i$, nous notons

$$\hat{x}_{1,i}(z_1, \dots, z_i) = (z_1, \dots, z_i, x_{i+1}, \dots, x_n).$$

Nous avons

$$\begin{aligned} (M_{n,n} \dots M_{n,2} M_{n,1})(x, A) &= \int_{a_n}^{b_n} \dots \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} \Phi_n(x, \hat{x}_1(z_1)) \Phi_n(\hat{x}_1(z_1), \hat{x}_{1,2}(z_1, z_2)) \\ &\quad \times \dots \times \Phi_n(\hat{x}_{1,i-1}(z_1, \dots, z_{i-1}), \hat{x}_{1,i}(z_1, \dots, z_i)) \\ &\quad \times \dots \times \Phi_n((z_1, \dots, z_{n-1}, x_n), (z_1, \dots, z_n)) \prod_{i=1}^n d\rho(z_i). \end{aligned}$$

Il s'agit de la probabilité que la chaîne parte de x puis change sa première coordonnée x_1 en un point de $[a_1, b_1]$, puis sa deuxième coordonnée x_2 en un point de $[a_2, b_2]$, \dots , et enfin sa dernière coordonnée x_n en un point de $[a_n, b_n]$, pour se retrouver ainsi dans un état appartenant à A . Nous l'écrivons encore

$$(M_{n,n} \dots M_{n,2} M_{n,1})(x, A) = \int_{a_1}^{b_1} \int_{a_2}^{b_2} \dots \int_{a_n}^{b_n} f_{n,x}(z) \prod_{i=1}^n d\rho(z_i).$$

Nous en déduisons que $M_{n,n} \dots M_{n,2} M_{n,1}(x, \cdot)$ admet pour densité $f_{n,x}$ par rapport à $\rho^{\otimes n}$. De plus la fonction $f_{n,x}$ est strictement positive sur \mathcal{X}_n donc, si $A \in \mathcal{B}_{\mathcal{X}_n}$ est tel que $\rho^{\otimes n}(A) > 0$, alors

$$\mathbb{P}(X_n(n) \in A \mid X_n(0) = x) = Q_n^n(x, A) \geq \frac{1}{n^n} (M_{n,n} \dots M_{n,2} M_{n,1})(x, A) > 0.$$

Ceci démontre que $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ est $\rho^{\otimes n}$ -irréductible.

Enfin il est immédiat qu'il existe $x \in \mathcal{X}_n$ tel que $Q_n(x, \{x\}) > 0$. Ceci nous assure en particulier que la chaîne est apériodique. La proposition est donc démontrée. \square

b) Etude du cas où ρ charge quatre points

Donnons-nous $n \geq 1$. Nous considérons à présent la chaîne de Markov $(X_n(j), j \in \mathbb{N})$ définie par l'algorithme XI.10 avec

$$\rho = a(\delta_{-c} + \delta_c) + \left(\frac{1}{2} - a\right)(\delta_{-e} + \delta_e),$$

où $a \in]0, 1/2[$ et $e \neq c$ sont des réels strictement positifs.

Etant donnés x et y dans $\mathcal{X}_n = \{-e, -c, c, e\}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$, nous remarquons que la probabilité que la chaîne passe de l'état x à l'état y en moins de n itérations est strictement positive (il suffit de changer les coordonnées de x en les coordonnées de y une par une dans un ordre tel qu'elles ne sont jamais toutes nulles à une étape donnée). Ainsi la chaîne est irréductible. De plus elle admet $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ pour mesure invariante. Elle est donc aussi récurrente positive. Enfin il est immédiat que la chaîne est apériodique si bien que $X_n(j)$ converge en loi vers $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ quand j tend vers $+\infty$.

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous posons

$$S_n(j) = X_n^1(j) + \dots + X_n^n(j), \quad T_n(j) = (X_n^1(j))^2 + \dots + (X_n^n(j))^2,$$

$$T_n^c(j) = \frac{1}{c^2} \sum_{k=1}^n (X_n^k(j))^2 \mathbf{1}_{|X_n^k(j)|=c},$$

$$S_n^c(j) = \frac{1}{c} \sum_{k=1}^n X_n^k(j) \mathbf{1}_{|X_n^k(j)|=c} \quad \text{et} \quad S_n^e(j) = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^n X_n^k(j) \mathbf{1}_{|X_n^k(j)|=e}.$$

Pour tout $j \in \mathbb{N}$, nous avons alors $S_n(j) = S_n^c(j)c + S_n^e(j)e$ et $T_n(j) = T_n^c(j)c^2 + (n - T_n^c(j))e^2$. De plus

$$|S_n^c(j)| \leq T_n^c \quad \text{et} \quad |S_n^e(j)| \leq n - T_n^c.$$

Nous introduisons

$$\mathcal{F} = \{ (u, v, w) \in [-1, 1]^2 \times [0, 1] : |u| \leq w, v \leq 1 - w \}$$

et

$$E'_n = \left(\left\{ -1, -\frac{n-1}{n}, \dots, -\frac{1}{n}, 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\}^2 \times \left\{ 0, \frac{1}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}, 1 \right\} \right) \cap \mathcal{F}.$$

Enfin, pour tous $(u, v, w) \in E'_n$ et $(x, y, z) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}^2 \times \{-1, 0, 1\}$, nous posons

$$h_{(u,v,w)}^n(x, y, z) = \left[1 + \exp \left(\frac{n(uc + ve)^2}{2(wc^2 + (1-w)e^2)} - \frac{((nu + x)c + (nv + y)e)^2}{2((nw + z)c^2 + (n - nw - z)e^2)} \right) \right]^{-1}.$$

Proposition XI.12. *Le processus*

$$\left(\left(\frac{S_n^c(j)}{n}, \frac{S_n^e(j)}{n}, \frac{T_n^c(j)}{n} \right), j \in \mathbb{N} \right)$$

est une chaîne de Markov d'espace d'état E_n inclus dans E'_n et de matrice de transition P_n telle que, pour tout $((u, v, w), (r, s, t)) \in E_n^2$, $P_n((u, v, w), (r, s, t))$ est égale à

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 \frac{w+u}{2} a h_{(u,v,w)}^n(-2,0,0) & \text{si } (r,s,t) = (u,v,w) + (-2,0,0)/n, \\
 \frac{w+u}{2} \left(\frac{1}{2}-a\right) h_{(u,v,w)}^n(-1,1,-1) & \text{si } (r-u,s-v,t-w) = (-1,1,-1)/n, \\
 \frac{w+u}{2} \left(\frac{1}{2}-a\right) h_{(u,v,w)}^n(-1,-1,-1) & \text{si } (r-u,s-v,t-w) = (-1,-1,-1)/n, \\
 \frac{w-u}{2} a h_{(u,v,w)}^n(2,0,0) & \text{si } (r,s,t) = (u,v,w) + (2,0,0)/n, \\
 \frac{w-u}{2} \left(\frac{1}{2}-a\right) h_{(u,v,w)}^n(1,1,-1) & \text{si } (r-u,s-v,t-w) = (1,1,-1)/n, \\
 \frac{w-u}{2} \left(\frac{1}{2}-a\right) h_{(u,v,w)}^n(1,-1,-1) & \text{si } (r-u,s-v,t-w) = (1,-1,-1)/n, \\
 \frac{1-w+v}{2} \left(\frac{1}{2}-a\right) h_{(u,v,w)}^n(0,-2,0) & \text{si } (r,s,t) = (u,v,w) + (0,-2,0)/n, \\
 \frac{1-w+v}{2} a h_{(u,v,w)}^n(1,-1,1) & \text{si } (r-u,s-v,t-w) = (1,-1,1)/n, \\
 \frac{1-w+v}{2} a h_{(u,v,w)}^n(-1,-1,1) & \text{si } (r-u,s-v,t-w) = (-1,-1,1)/n, \\
 \frac{1-w-v}{2} \left(\frac{1}{2}-a\right) h_{(u,v,w)}^n(0,2,0) & \text{si } (r,s,t) = (u,v,w) + (0,2,0)/n, \\
 \frac{1-w-v}{2} a h_{(u,v,w)}^n(1,1,1) & \text{si } (r-u,s-v,t-w) = (1,1,1)/n, \\
 \frac{1-w-v}{2} a h_{(u,v,w)}^n(-1,1,1) & \text{si } (r-u,s-v,t-w) = (-1,1,1)/n, \\
 1 - \sum_{(x,y,z) \neq (u,v,w)} P_n((u,v,w), (x,y,z)) & \text{si } (r,s,t) = (u,v,w), \\
 0 & \text{sinon.}
 \end{array} \right.$$

Démonstration. Le fait que E_n est inclus dans E'_n découle de la discussion précédant l'énoncé du théorème. Supposons que

$$\left(\frac{S_n^c(j)}{n}, \frac{S_n^e(j)}{n}, \frac{T_n^c(j)}{n} \right) = (u, v, w)$$

pour un certain $(u, v, w) \in E_n$ et un certain $j \in \mathbb{N}$. Alors le vecteur $X_n(j)$ est composé de $(nw + nu)/2$ coordonnées valant $+c$, de $(nw - nu)/2$ coordonnées valant $-c$, de $(n - nw + nv)/2$ coordonnées valant $+e$ et de $(n - nw - nv)/2$ coordonnées valant $-e$. Ensuite nous avons le tableau suivant :

coordonnée choisie	nouvelle coordonnée	$S_n^c(j+1) - S_n^c(j)$	$S_n^e(j+1) - S_n^e(j)$	$T_n^c(j+1) - T_n^c(j)$
	c	0	0	0
c	$-c$	-2	0	0
	e	-1	1	-1
	$-e$	-1	-1	-1
$-c$	c	2	0	0
	$-c$	0	0	0
	e	1	1	-1
	$-e$	1	-1	-1

e	c	1	-1	1
	$-c$	-1	-1	1
	e	0	0	0
	$-e$	0	-2	0
$-e$	c	1	1	1
	$-c$	-1	1	1
	e	0	2	0
	$-e$	0	0	0

Pour que $(S_n^c(j+1), S_n^e(j+1), T_n^c(j+1)) = (nu-1, nv+1, nw-1)$, il faut avoir tiré un c à l'étape **(a)** de l'algorithme (avec probabilité $(w+u)/2$), puis un $+e$ à l'étape **(b)** (avec probabilité $1/2-a$) et avoir accepté le changement de coordonnée l'étape **(c)**, ce qui arrive avec probabilité

$$\left(1 + \exp\left(\frac{S_n(j)^2}{2T_n(j)} - \frac{(S_n(j) - c + e)^2}{2(T_n(j) - c^2 + e^2)}\right)\right)^{-1} = h_{(u,v,w)}^n(-1, 1, -1).$$

Nous en déduisons que

$$P_n((u, v, w), (u-1/n, v+1/n, w-1/n)) = \frac{w+u}{2} \left(\frac{1}{2} - a\right) h_{(u,v,w)}^n(-1, 1, -1).$$

De façon analogue nous calculons les autres probabilités de transition de (u, v, w) . Nous en déduisons également que $((S_n^c(j)/n, S_n^e(j)/n, T_n^c(j)/n), j \in \mathbb{N})$ est une chaîne de Markov. \square

Soit $n \geq 1$. Nous définissons la fonction F_n sur E_n par

$$\forall (u, v, w) \in E_n \quad F_n(u, v, w) = n \sum_{(r,s,t) \in E_n} \binom{r-u}{s-v} \binom{s-v}{t-w} P_n((u, v, w), (r, s, t)).$$

Pour tout $(u, v, w) \in E_n$, nous avons

$$\begin{aligned} F_n(u, v, w) &= \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{w+u}{2} a h_{(u,v,w)}^n(-2, 0, 0) + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{w+u}{2} \left(\frac{1}{2} - a\right) h_{(u,v,w)}^n(-1, 1, -1) \\ &\quad + \cdots + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{1-w-v}{2} a h_{(u,v,w)}^n(-1, 1, 1). \end{aligned}$$

Nous prolongeons les expressions ci-dessus à tout (u, v, w) appartenant à \mathcal{T} . Ensuite un développement limité simple nous donne

$$\forall (X, Y, U, V) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad \frac{nU^2}{2V} - \frac{(nU+X)^2}{2(nV+Y)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\frac{UX}{V} + \frac{U^2Y}{2V^2}.$$

Soit $(u, v, w) \in \mathcal{T}$. Nous en déduisons que, pour tout $(x, y, z) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}^2 \times \{-1, 0, 1\}$,

$$h_{(u,v,w)}^n(x, y, z) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \exp\left(-\frac{(uc+ve)(xc+ye)}{wc^2 + (1-w)e^2} + \frac{(uc+ve)^2 z(c^2 - e^2)}{2(wc^2 + (1-w)e^2)^2}\right)\right]^{-1}.$$

Ainsi $F_n(u, v, w)$ converge vers

$$\begin{aligned}
F_\infty(u, v, w) = & \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{(w+u)(1-2a)}{4 + 4 \exp\left(\frac{(uc+ve)(c-e)}{wc^2+(1-w)e^2} - \frac{(uc+ve)^2(c^2-e^2)}{2(wc^2+(1-w)e^2)^2}\right)} \\
& + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{(w+u)(1-2a)}{4 + 4 \exp\left(\frac{(uc+ve)(c+e)}{wc^2+(1-w)e^2} - \frac{(uc+ve)^2(c^2-e^2)}{2(wc^2+(1-w)e^2)^2}\right)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{(w-u)a}{1 + \exp\left(\frac{2c(uc+ve)}{wc^2+(1-w)e^2}\right)} \\
& + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{(1-w+v)(1-2a)}{2 + 2 \exp\left(\frac{2e(uc+ve)}{wc^2+(1-w)e^2}\right)} + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{(1-w+v)a}{2 + 2 \exp\left(\frac{(uc+ve)(e-c)}{wc^2+(1-w)e^2} + \frac{(uc+ve)^2(c^2-e^2)}{2(wc^2+(1-w)e^2)^2}\right)} \\
& + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{(1-w+v)a}{2 + 2 \exp\left(\frac{(uc+ve)(c+e)}{wc^2+(1-w)e^2} + \frac{(uc+ve)^2(c^2-e^2)}{2(wc^2+(1-w)e^2)^2}\right)} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{(1-w-v)(1-2a)}{2 + 2 \exp\left(\frac{2e(uc+ve)}{wc^2+(1-w)e^2}\right)} \\
& + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \frac{(w+u)a}{1 + \exp\left(\frac{2c(uc+ve)}{wc^2+(1-w)e^2}\right)} + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{(w-u)(1-2a)}{4 + 4 \exp\left(-\frac{(uc+ve)(c+e)}{wc^2+(1-w)e^2} - \frac{(uc+ve)^2(c^2-e^2)}{2(wc^2+(1-w)e^2)^2}\right)} \\
& + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \frac{(w-u)(1-2a)}{4 + 4 \exp\left(\frac{(uc+ve)(e-c)}{wc^2+(1-w)e^2} - \frac{(uc+ve)^2(c^2-e^2)}{2(wc^2+(1-w)e^2)^2}\right)} \\
& + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{(1-w-v)a}{2 + 2 \exp\left(-\frac{(uc+ve)(c+e)}{wc^2+(1-w)e^2} + \frac{(uc+ve)^2(c^2-e^2)}{2(wc^2+(1-w)e^2)^2}\right)} \\
& + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \frac{(1-w-v)a}{2 + 2 \exp\left(\frac{(uc+ve)(c-e)}{wc^2+(1-w)e^2} + \frac{(uc+ve)^2(c^2-e^2)}{2(wc^2+(1-w)e^2)^2}\right)}.
\end{aligned}$$

La fonction F_∞ est de classe C^1 sur \mathbb{R} donc le théorème de Cauchy-Lipschitz nous assure que, pour tout $m \in [-1, 1]^2 \times [0, 1]$, il existe une unique solution de l'équation différentielle ordinaire $y'(t) = F_\infty(y(t))$, de valeur initiale (m_1, m_2, m_3) . Nous allons alors appliquer le théorème XI.3 à la suite de chaînes de Markov $((S_n^c(j)/n, S_n^e(j)/n, T_n^c(j)/n), j \in \mathbb{N})$ pour obtenir :

Théorème XI.13. *Supposons que*

$$\left(\frac{S_n^c(0)}{n}, \frac{S_n^e(0)}{n}, \frac{T_n^c(0)}{n} \right)_{n \geq 1}$$

converge en probabilité vers un certain $m = (m_1, m_2, m_3) \in [-1, 1]^2 \times [0, 1]$. Notons $Y_1(\cdot, m)$, $Y_2(\cdot, m)$ et $Y_3(\cdot, m)$ les (uniques) fonctions de classe C^1 sur \mathbb{R} telles que

$$(Y_1'(t, m), Y_2'(t, m), Y_3'(t, m)) = F_\infty(Y_1(t, m), Y_2(t, m), Y_3(t, m)),$$

$$Y_1(0, m) = m_1, \quad Y_2(0, m) = m_2, \quad Y_3(0, m) = m_3.$$

Nous définissons $Y_S(\cdot, m)$ et $Y_T(\cdot, m)$ sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad Y_S(t, m) = cY_1(t, m) + eY_2(t, m) \quad \text{et} \quad Y_T(t, m) = e^2 + Y_3(t, m)(c^2 - e^2).$$

Nous avons

$$\forall \delta > 0 \quad \forall t > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{S_n(\lfloor ns \rfloor)}{n} - Y_S(s, m) \right| > \delta \right) = 0$$

et

$$\forall \delta > 0 \quad \forall t > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \frac{T_n(\lfloor ns \rfloor)}{n} - Y_T(s, m) \right| > \delta \right) = 0.$$

Démonstration. Soient $n \geq 1$ et $(u, v, w) \in \mathcal{T}$. Posons $\varepsilon_n = 2/\sqrt{n}$. Nous avons

$$\begin{aligned} n \sum_{(r,s,t) \in E_n} \left\| \begin{pmatrix} r-u \\ s-v \\ t-w \end{pmatrix} \right\| P_n((u, v, w), (r, s, t)) \\ \leq 2 \times \frac{w+u}{2} a h_{(u,v,w)}^n(-2, 0, 0) + \dots + \sqrt{3} \times \frac{1-w-v}{2} a h_{(u,v,w)}^n(-1, 1, 1) \\ \leq (w+u)a + \dots + \sqrt{3} \frac{1-w-v}{2} a \leq 1 + 2a + w(1-4a) \leq 2(1-a), \end{aligned}$$

et

$$n \sum_{\substack{(r,s,t) \in E_n \\ \|(r-u, s-v, t-w)\| > \varepsilon_n}} \left\| \begin{pmatrix} r-u \\ s-v \\ t-w \end{pmatrix} \right\| P_n((u, v, w), (r, s, t)) = 0.$$

Soit $(x, y, z) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}^2 \times \{-1, 0, 1\}$. Posons $U = uc + ve$, $V = wc^2 + (1-w)e^2 \neq 0$, $X = xc + ye$ et $Y = z(c^2 - e^2)$. La fonction dérivée de $x \mapsto (1 + e^x)^{-1}$ sur \mathbb{R} est bornée par 1 donc l'inégalité des accroissements finis nous assure que

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \exp \left(\frac{nU^2}{2V} - \frac{(nU+X)^2}{2(nV+Y)} \right) \right)^{-1} - \left(1 + \exp \left(-\frac{UX}{V} + \frac{U^2Y}{2V^2} \right) \right)^{-1} \right| \\ \leq \left| \frac{nU^2}{2V} - \frac{(nU+X)^2}{2(nV+Y)} + \frac{UX}{V} - \frac{U^2Y}{2V^2} \right| = \frac{(X - UY/V)^2}{2|nV+Y|}. \end{aligned}$$

De plus $|X| \leq 2c + 2e$, $|Y| \leq |c^2 - e^2|$ et

$$|(c \wedge e)U| = |uc(c \wedge e) + ve(c \wedge e)| \leq |u|c^2 + |v|e^2 \leq wc^2 + (1-w)e^2 = V,$$

si bien que $|UY/V| \leq |c^2 - e^2|/(c \wedge e)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \exp \left(\frac{nU^2}{2V} - \frac{(nU+X)^2}{2(nV+Y)} \right) \right)^{-1} - \left(1 + \exp \left(-\frac{UX}{V} + \frac{U^2Y}{2V^2} \right) \right)^{-1} \right| \\ \leq \frac{(2c + 2e + (c^2 + e^2)/(c \wedge e))^2}{n(c^2 \wedge e^2)}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que, pour tout $(x, y, z) \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}^2 \times \{-1, 0, 1\}$,

$$\sup_{(u,v,w) \in \mathcal{T}} \left| h_{(u,v,w)}^n(x, y, z) - \left(1 + \exp \left(-\frac{(uc+ve)(xc+ye)}{wc^2 + (1-w)e^2} + \frac{(uc+ve)^2 z(c^2 - e^2)}{2(wc^2 + (1-w)e^2)^2} \right) \right)^{-1} \right| = 0.$$

En sommant tous les termes, nous obtenons

$$\sup_{(u,v,w) \in \mathcal{T}} |F_n(u, v, w) - F_\infty(u, v, w)| = 0.$$

Enfin la fonction F_∞ est Lipschitzienne sur \mathcal{T} , par conséquent le théorème XI.13 découle du théorème XI.3. \square

Remarquons que $F_\infty(0, 0, 2a) = 0$ donc, si $m = (0, 0, 2a)$, alors Y_S est la fonction nulle et Y_T est la fonction constante égale à $\sigma^2 = 2ac^2 + (1-2a)e^2$. C'est notamment le cas si $X_n(0)$ suit la loi ρ (d'après la loi des grands nombres) ou la loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ d'après le lemme suivant :

Lemme XI.14. Soient $a \in]0, 1/2[$ et $e \neq c$ des réels strictement positifs. Si $X_n(0)$ suit la loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ avec

$$\rho = a(\delta_{-c} + \delta_c) + \left(\frac{1}{2} - a\right)(\delta_{-e} + \delta_e),$$

alors $(S_n^c(0)/n, S_n^e(0)/c, T_n^c(0)/n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $(0, 0, 2a)$.

Démonstration. Nous avons vu, au paragraphe 14.b), que $(S_n(0)/n, T_n(0)/n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $(0, 2ac^2 + (1 - 2a)e^2)$. Puisque $T_n^c(0)(c^2 - e^2) = T_n(0) - e^2$, nous en déduisons que $(T_n^c(0)/n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers $2a$. Pour montrer la convergence en loi de $(S_n^c(0)/n)_{n \geq 1}$, nous étudions la transformée de Cramér I_c de ν_ρ^c , la loi de $(Z, Z^2, c^{-1}Z\mathbb{1}_{|Z|=c})$, quand Z est une variable aléatoire de loi ρ . Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ avec $y > 0$. D'après la proposition IV.12,

$$\forall x \neq 0 \quad I_c(x, y, z) - \frac{x^2}{2y} \geq I(x, y) - \frac{x^2}{2y} > 0.$$

De plus ν_ρ^c est une mesure de probabilité non-dégénérée dans \mathbb{R}^3 donc $I_c(0, y, z) = 0$ si et seulement si $(y, z) = (\sigma^2, 0)$. Ensuite l'adhérence de l'enveloppe convexe du support de ν_ρ^c est disjointe de la droite $y = 0$ donc nous en déduisons que $I_c - F$ y admet un unique minimum en $(0, \sigma^2, 0)$. Soit A un fermé de \mathbb{R} ne contenant pas 0. En appliquant le lemme de Varadhan, nous obtenons

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mathbb{P} \left(\frac{S_n^c(0)}{n} \in A \right) \leq \sup_{\mathbb{R}^2 \times A} \{ I_c - F \} - \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_n < 0.$$

Cette quantité est strictement négative d'après le lemme V.2. Comme dans le paragraphe 14.b), nous en déduisons que $(S_n^c(0)/n)_{n \geq 1}$ converge en probabilité vers 0. C'est donc aussi le cas pour $(S_n^e(0)/n)_{n \geq 1}$. \square

Comme pour le cas du modèle d'Ising Curie-Weiss critique présenté au paragraphe 32, nous aimerions montrer que $(S_n(\lfloor n^{3/2}t \rfloor)/n^{3/4}, t \geq 0)$ converge en loi vers un processus qui est solution de l'équation différentielle stochastique

$$dz(t) = -\alpha_* z^3(t) dt + \sigma_* dB(t), \quad (\mathcal{E}_c)$$

avec $(B(t), t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard. Afin de déterminer quelles valeurs de α_* et σ_* nous devrions trouver, nous utilisons le fait que la solution d'une telle équation différentielle stochastique admet pour distribution stationnaire

$$C_* \exp \left(-\frac{\alpha_*}{2\sigma_*^2} x^4 \right) dx,$$

pour une certaine constante $C_* > 0$ (cf. théorème 2.1 de [52]). Pour être cohérent avec le théorème I.3, il faut que

$$\frac{\alpha_*}{\sigma_*^2} = \frac{\mu_4}{6\sigma_*^8} = \frac{2ac^4 + (1 - 2a)e^4}{6(2ac^2 + (1 - 2a)e^2)^4}.$$

Hélas nos tentatives de preuve (en utilisant le théorème XI.4) d'un tel résultat ont échoué. Nous avons alors choisi de concentrer nos efforts sur la piste développée dans le chapitre XII, qui a abouti à un théorème de fluctuations de ce type, mais pour un modèle différent.

34 Simulations

La figure page 23 (représentant l'histogramme renormalisé de $N = 4,91 \times 10^{12}$ simulations de $S_n/n^{3/4}$ et la courbe limite) a été obtenue en utilisant la dynamique de Metropolis. Plus précisément, nous avons utilisé l'algorithme XI.1 avec $n = 10000$, $\rho = \mathcal{N}(0, 1)$, $\varphi : z \mapsto \min(1, z)$ et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad \kappa_i(x, z) = \frac{1}{c} \exp\left(-\frac{(z - x_i)^2}{2c^2} + \frac{z^2}{2}\right),$$

pour un certain $c > 0$. Supposons qu'à l'étape j de l'algorithme nous avons $X_n(j) = x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Notons

$$s(x) = x_1 + \dots + x_n \quad \text{et} \quad t(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2.$$

Alors l'étape $j + 1$ de l'algorithme consiste à tirer aléatoirement $i \in \{1, \dots, n\}$, à choisir z selon la loi $\mathcal{N}(x_i, \sigma^2)$ et à remplacer x_i par z avec probabilité $\exp(\min\{0, \beta_i(x, z)\})$ avec

$$\beta_i(x, z) = \frac{(s(x) - x_i + z)^2}{2(t(x) - x_i^2 + z^2)} - \frac{z^2}{2} - \frac{s(x)^2}{2t(x)} + \frac{x_i^2}{2}.$$

Voici le programme (sous MATLAB) permettant la construction de la figure :

```

Fondation d'un histogramme de pas 1/p et de bornes -h et h :
p=50; h=4; v=-h:1/p:h; l=length(v); f=zeros(1,l);
Initialisation de l'algorithme (X_n(0) est un vecteur Gaussien standard) :
x=randn(n,1); s=sum(x); t=sum(x.^2);
N itérations de l'algorithme XI.1 et remplissage de l'histogramme au fur et à mesure :
for k=1:N
    i=floor(n*rand()+1); z=x(i)+c*randn;
    s0=s-x(i)+z; t0=t-x(i)^2+z^2;
    beta=s0^2/(2*t0)-z^2/2-s^2/(2*t)+x(i)^2/2;
    alpha=exp(min(0,beta));
    if rand < alpha
        x(i)=z; s=s0; t=t0;
    end
    a=3^(1/4)*s/n^(3/4); j=floor(p*(a+h)+1/2)+1;
    if j>0 & j<l+1
        f(j)=f(j)+1;
    end
end

```

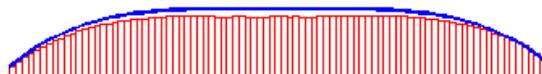
Tracé des courbes :

```

bar(v,f/trapz(v,f),'r'); hold on
g=exp(-v.^4/12)/3.3740; plot(v,g,'b'); hold off

```

Nous avons zoomé sur le haut de la figure page 23, qui peut laisser penser que l'histogramme coïncide complètement avec la courbe de la densité limite :



En fait nous avons choisi d'arrêter l'algorithme à un instant où la superposition était satisfaisante. Nous observons, en laissant N évoluer, que l'histogramme fluctue autour de cette courbe limite.

La figure page 161 (représentant l'histogramme renormalisé de $N = 6,17 \times 10^{11}$ simulations de $S_n/n^{5/6}$ et la courbe limite) a également été obtenue en utilisant la dynamique de Metropolis. Plus précisément, nous avons utilisé l'algorithme XI.1 avec $n = 10000$, ρ admettant une densité proportionnelle à $x \mapsto \exp(-x^4)$, $\varphi : z \mapsto \min(1, z)$ et

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \forall (x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \quad \kappa_i(x, z) = \frac{1}{c\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(z - x_i)^2}{2c^2} + z^4\right) \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^4) dt,$$

pour un certain $c > 0$. Voici le programme (sous MATLAB) permettant la construction de la figure :

```
p=50; h=2.5; v=-h:1/p:h; l=length(v); f=zeros(1,l);
x=randn(n,1); s=sum(x); t=sum(x.^2); u=sum(x.^4);

for k=1:N
    i=floor(n*rand()+1); z=x(i)+c*randn;
    s0=s-x(i)+z; t0=t-x(i)^2+z^2; u0=u-x(i)^4+z^4;
    beta=s0^2/(2*t0)+u0*s0^4/(12*t0^4)-z^4-s^2/(2*t)-u*s^4/(12*t^4)+x(i)^4;
    alpha=exp(min(0,beta));
    if rand < alpha
        x(i)=z; s=s0; t=t0; u=u0;
    end
    a=K*s/n^(5/6); j=floor(p*(a+h)+1/2)+1;
    if j>0 & j<l+1
        f(j)=f(j)+1;
    end
end
bar(v,f/trapz(v,f),'b'); hold on
g=exp(-v.^6/18)/3.0037; plot(v,g,'r'); hold off
```

Notons que la constante de normalisation \mathbf{K} , présente dans l'algorithme, est égale à

$$\mathbf{K} = \left(\frac{5\mu_4^2 - 2\mu_6\sigma^2}{5\sigma^{14}} \right)^{1/6},$$

où σ^2 , μ_4 et μ_6 sont les moments d'ordre 2, 4 et 6 de la mesure de probabilité de densité proportionnelle à $x \mapsto \exp(-x^4)$. Remarquons qu'il s'agit bien de la constante de normalisation de $S_n/n^{5/6}$ dans le théorème X.11.

Chapitre XII

Un modèle dynamique à temps continu

Sommaire

35	Une diffusion de Langevin pour un modèle champ moyen	218
a)	La diffusion de Langevin	218
b)	Dynamiques critiques et fluctuations pour un modèle champ moyen	220
36	Une diffusion de Langevin pour le modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC	222
a)	Définition du modèle d'Ising Curie-Weiss dynamique de SOC	222
b)	Convergence de $M_n(\cdot, \cdot)$	224
i)	Heuristique pour la convergence de $M_n(\cdot, \cdot)$	224
ii)	Les solutions stationnaires pour (\mathbf{E}_∞)	225
c)	Générateur de $U_n(\cdot, \cdot)$	227
d)	L'opérateur \mathcal{L}	229
i)	Noyau de \mathcal{L}	230
ii)	Quelques propriétés de Φ_0	230
iii)	Lien entre \mathcal{L} et L_∞^*	231
e)	Convergence de $\langle \Phi_0, U_n(\cdot, \cdot) \rangle$	232
i)	La méthode des perturbations	232
ii)	Heuristique pour l'inversion de G_1	233
iii)	Heuristique pour la convergence de $\langle \Phi_0, U_n(\cdot, \cdot) \rangle$	234
f)	Conjecture pour les fluctuations de $U_n(\cdot, \cdot)$	235
37	Un modèle d'Ising Curie-Weiss dynamique de SOC : le cas Gaussien	236
a)	Préliminaires	236
b)	Générateur de $S_n(\sqrt{n}\cdot)$ et perturbations	237
c)	Théorème de fluctuations	240
d)	Effondrement de processus	241
e)	Preuve du théorème XII.9	241

Dans ce chapitre, nous allons construire et étudier un modèle d'Ising Curie-Weiss dynamique de criticalité auto-organisée avec une approche différente de celle du chapitre précédent. Nous allons définir un tableau triangulaire infini $(X_n^k(t), t \geq 0)_{1 \leq k \leq n}$ de processus stochastiques tel que, pour tout $n \geq 1$,

$$\left((X_n^1(t), \dots, X_n^n(t)), t \geq 0 \right)$$

est la diffusion de Langevin associée à la mesure $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$, pour ρ une mesure de probabilité à densité. Sous certaines conditions de régularité sur ρ , cette diffusion est un processus de Markov sur \mathbb{R}^n , solution d'un système d'équations différentielles stochastiques, et $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$ est son unique distribution invariante. Nous souhaitons étudier les fluctuations de

$$S_n(t) = X_n^1(t) + \dots + X_n^n(t), \quad t \geq 0, \quad n \geq 1.$$

Dans le paragraphe 35.a), nous exposons des résultats généraux sur les diffusions de Langevin et nous présentons l'exemple d'un modèle champ moyen de particules en interaction dynamique, introduit par Donald A. Dawson dans [19], dont la loi d'équilibre est un cas particulier du modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé. Dans le paragraphe 36, nous commençons l'étude de la diffusion de Langevin associée à $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$ en employant la méthodologie utilisée par Dawson et nous aboutissons à des heuristiques et des conjectures.

Enfin nous traitons le cas où ρ est une Gaussienne dans le paragraphe 37 : nous montrons le théorème I.9 sur les fluctuations de $(S_n(t), t \geq 0)$, indiquant qu'il s'agit bien d'un modèle dynamique de SOC.

35 Une diffusion de Langevin pour un modèle champ moyen

a) La diffusion de Langevin

Soit f une densité de probabilité sur \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, qui est strictement positive et telle que $\ln f$ est de classe C^2 . La diffusion de Langevin associée à f est un processus de diffusion de Markov qui est construit de telle sorte que $f(x) dx$ soit son unique mesure invariante. Considérons l'équation différentielle stochastique

$$dY(t) = \frac{1}{2} \nabla \ln f(Y(t)) + dB(t), \quad (\mathcal{S}_f)$$

avec $(B(t), t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard n -dimensionnel. Elle est associée à l'opérateur linéaire A_f , défini sur $C^2(\mathbb{R}^n)$ par

$$\forall g \in C^2(\mathbb{R}^n) \quad A_f g = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{\partial(\ln f)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Pour tout $g \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des fonctions de classe C^2 à support compact sur \mathbb{R}^n , nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} A_f g(x) f(x) dx &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^2 g(x)}{\partial x_i^2} f(x) dx + \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial(\ln f)}{\partial x_i} \right) \frac{\partial g}{\partial x_i} f(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} g(x) \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} dx - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial(\ln f)}{\partial x_i} f(x) \right) g(x) dx \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{f(x)} \frac{\partial f}{\partial x_i} f(x) \right) \right) g(x) dx = 0, \end{aligned}$$

où nous avons procédé à des intégrations par parties à la deuxième ligne. Cela signifie que f est invariante pour A_f , restreint à $C_c^2(\mathbb{R}^n)$.

Théorème XII.1. *Soit f une densité de probabilité sur \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, qui est strictement positive et telle que $\ln f$ est de classe C^2 . Nous supposons qu'il existe $K > 0$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \langle \nabla \ln f(x), x \rangle \leq K(1 + \|x\|^2).$$

Si ξ est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}^n vérifiant $\mathbb{E}(\|\xi\|^2) < +\infty$, alors il existe une unique solution forte $(Y(t), t \geq 0)$ à l'équation différentielle stochastique (\mathcal{S}_f) avec la condition initiale $Y(0) = \xi$. Il s'agit d'un processus de diffusion de Markov¹ sur \mathbb{R}^n de générateur infinitésimal $(A_f, D(A_f))$, avec $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset D(A_f)$. Enfin elle admet $f(x) dx$ pour unique mesure invariante et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}} \left| \mathbb{P}(Y(t) \in A \mid Y(0) = x) - \int_A f(z) dz \right| = 0.$$

1. Un processus de diffusion de Markov est un processus de Markov à trajectoires continues qui satisfait la propriété de Markov forte.

Démonstration. Les théorèmes 3.7 et 3.11 du chapitre 5 de [27] nous assurent qu'il existe une unique solution forte à l'équation différentielle stochastique (\mathcal{S}_f) avec la condition initiale ξ , que ses trajectoires sont continues et qu'elle est solution du problème de martingale pour (A_f, ξ) . Ensuite les théorèmes 4.1 et 4.2 du chapitre 4 de [27] entraînent qu'il s'agit d'un processus de Markov fort, que son générateur est $(A_f, D(A_f))$ et que $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset D(A_f)$. Enfin l'unicité de la mesure invariante et la convergence en variation totale découlent du théorème 2.1 de [52]. \square

Notons que le théorème reste vrai si nous enlevons l'hypothèse sur le moment d'ordre 2 fini de ξ , mais alors la solution est faible (cf. théorème 3.10 du chapitre 5 de [27]).

Regardons un cas particulier. Soit φ une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R} telle que la fonction $\exp(2\varphi)$ est intégrable sur \mathbb{R} . Nous définissons la densité ρ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \rho(x) = Z^{-1} \exp(2\varphi(x)) \quad \text{avec} \quad Z = \int_{\mathbb{R}} \exp(2\varphi(t)) dt.$$

Nous notons encore ρ la mesure de probabilité de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} . Donnons-nous $n \geq 1$ et une fonction H de classe C^2 sur \mathbb{R}^n telle que

$$Z_{H,n} = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(H(x_1, \dots, x_n)) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(H(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n 2\varphi(x_i)\right) dx < +\infty.$$

Nous définissons $f_{H,\rho}$ sur \mathbb{R}^n par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad f_{H,\rho}(x) = \frac{1}{Z_{H,n}} \exp\left(H(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^n 2\varphi(x_i)\right).$$

Compte-tenu de ce qui précède, la diffusion de Langevin associée à $f_{H,\rho}$ est le système d'équations différentielles stochastiques

$$dX_n^j(t) = \varphi'(X_n^j(t)) dt + dB_j(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x_j}(X_n(t)) dt, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

avec (B_1, \dots, B_n) un mouvement Brownien standard n -dimensionnel et

$$\forall t \geq 0 \quad X_n(t) = (X_n^1(t), \dots, X_n^n(t)).$$

Si H et φ sont tels que $\ln f_{H,\rho}$ satisfait les hypothèses du théorème XII.1, alors la mesure $f_{H,\rho}(x) dx$ est l'unique distribution invariante pour la diffusion de Markov $(X_n(t), t \geq 0)$.

Notons que, pour le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé à la température inverse β , nous avons $H(x) = \beta(x_1 + \dots + x_n)^2 / (2n)$ et

$$\forall j \in \{1, \dots, n\} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial x_j}(x) = \beta \frac{x_1 + \dots + x_n}{2n}.$$

Dans le paragraphe suivant, nous exposons des résultats de Donald A. Dawson [19] sur ce modèle dans le cas où

$$\forall z \in \mathbb{R} \quad \varphi'(z) = -z^3 \sigma^2 + (1 - \theta) z,$$

où σ et $\theta = \beta/2$ sont des constantes strictement positives.

b) Dynamiques critiques et fluctuations pour un modèle champ moyen

Dans son article de 1982 [19], Donald A. Dawson a étudié un modèle dynamique d'oscillateurs non harmoniques avec une interaction attractive de type champ moyen. Il a montré un théorème de fluctuations critiques du type qui nous intéresse. Nous en présentons ici les résultats principaux :

Le modèle. Soient θ et σ des constantes strictement positives. Pour $n \geq 1$, considérons le système (\mathcal{S}_n) d'équations différentielles stochastiques

$$dX_n^j(t) = \left(- (X_n^j(t))^3 + X_n^j(t) \right) dt + \sigma dB_j(t) - \theta \left(X_n^j(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_n^k(t) \right) dt, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

avec (B_1, \dots, B_n) un mouvement Brownien standard n -dimensionnel et

$$\forall t \geq 0 \quad X_n(t) = (X_n^1(t), \dots, X_n^n(t)).$$

Remarquons que ce système est équivalent au système

$$dY_n^j(t) = \left(- (Y_n^j(t))^3 \sigma^2 + Y_n^j(t) \right) dt + dB_j(t) - \theta \left(Y_n^j(t) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n Y_n^k(t) \right) dt, \quad j \in \{1, \dots, n\},$$

avec $Y_n(t) = X_n(t)/\sigma$ pour tout $t \geq 0$. Nous retomons bien sur la diffusion de Langevin telle que nous l'avons exposée dans le paragraphe précédent.

Il existe une unique solution forte au système (\mathcal{S}_n) et il s'agit d'un processus de diffusion de Markov sur \mathbb{R}^n . Le domaine $D(L_n)$ de son générateur infinitésimal L_n contient $C_c^2(\mathbb{R}^n)$ et

$$\forall f \in C_c^2(\mathbb{R}^n) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad L_n f(x) = \frac{\sigma^2}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j^2} + \sum_{j=1}^n \left(-x_j^3 + (1-\theta)x_j + \frac{\theta}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}.$$

Le processus de Markov solution du système (\mathcal{S}_n) possède une unique mesure de probabilité invariante $p_n(x) dx$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad p_n(x) = \frac{1}{Z_n} \exp \left(\frac{\theta}{\sigma^2 n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) \prod_{i=1}^n p_0(x_i) dx_i,$$

où

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad p_0(x) = \frac{1}{Z_0} \exp \left(\sigma^{-2} [(1-\theta)x^2 - x^4/2] \right),$$

avec Z_0 et Z_n des constantes de normalisation.

Convergence de la suite des processus empiriques. Pour tout $t \geq 0$, nous introduisons la mesure empirique $M_n(t, \cdot)$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad M_n(t, A) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{X_n^j(t)}(A) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_A(X_n^j(t)),$$

où $(X_n^1(t), \dots, X_n^n(t))$ est l'unique solution de (\mathcal{S}_n) au temps t . Si la loi du vecteur $X_n(0)$ est invariante par permutation des coordonnées alors $(M_n(t), t \geq 0)$ est un processus de diffusion de Markov dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. De plus $(M_n(t), t \geq 0)_{n \geq 1}$ converge en loi dans $C([0, +\infty[, \mathcal{M}_1(\mathbb{R}))$ vers le processus déterministe $(p(t, x) dx, t \geq 0)$ où $p(\cdot, \cdot)$ est l'unique solution de l'équation

$$\frac{\partial p(t, y)}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\partial^2 p(t, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left([(1-\theta)y - y^3] p(t, y) \right) - \theta \left(\int_{\mathbb{R}} y p(t, y) dy \right) \frac{\partial p(t, y)}{\partial y}. \quad (\mathcal{E}_{\infty})$$

Il s'agit de l'équation de Fokker-Planck associée à l'équation différentielle stochastique

$$dy(t) = \left(-y^3(t) + y(t) \right) dt + \sigma dB(t) - \theta \left(y(t) - \mathbb{E}(y(t)) \right) dt,$$

où $(B(t), t \geq 0)$ est un mouvement Brownien standard. Elle admet une unique solution forte.

Existence de points critiques. La densité p_0 est solution de l'équation de Fokker-Planck (\mathcal{E}_∞) . La mesure $p_0(x) dx$ est l'unique distribution invariante solution de (\mathcal{E}_∞) admettant une densité et une espérance nulle. Pour tout $\theta > 0$ il existe une unique solution en σ^2 à l'équation

$$\frac{\sigma^2}{2\theta} = \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2}{Z_0} \exp(\sigma^{-2} [(1-\theta)x^2 - x^4/2]) dx = \int_{\mathbb{R}} x^2 p_0(x) dx.$$

Cette solution est notée σ_c^2 et le point (θ, σ_c^2) est appelée valeur critique.

Fluctuations critiques. Pour tous $n \geq 1$, $t \geq 0$ et $A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$, posons

$$U_n(t, A) = n^{1/4} \left(M_n(\sqrt{nt}, A) - \int_A p_0(x) dx \right).$$

La mesure $U_n(t, \cdot)$ appartient à $\mathcal{M}^\pm(\mathbb{R})$, l'ensemble des mesures signées sur \mathbb{R} .

Supposons que (θ, σ_c^2) soit une valeur critique et que la suite $(U_n(0, \cdot))_{n \geq 1}$ converge étroitement sur $\mathcal{M}^\pm(\mathbb{R})$ vers la mesure signée $axp_0(x) dx$ pour un certain $a \in \mathbb{R}$. Soit $(z(t), t \geq 0)$ l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$dz(t) = -\frac{3\mu_2^2 - \mu_4}{12} \sigma_*^2 z^3(t) + \sigma_* dB(t), \quad z(0) = a,$$

où $\sigma_* > 0$ et μ_2 et μ_4 sont les moments d'ordre 2 et 4 de $p_0(x) dx$ (ils vérifient $\mu_2 = \mu_4 = \sigma_c^2/(2\theta)$).

Pour tout $T > 0$, le processus $(U_n(t, \cdot), t \geq 0)$ converge en loi dans $C([0, T], \mathcal{M}^\pm(\mathbb{R}))$ vers le processus $(Z(t, \cdot), t \geq 0)$ où

$$\forall t \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad Z(t, A) = z(t) \int_A xp_0(x) dx.$$

Pour $n \geq 1$, notons $U_n(\infty, \cdot)$ l'état d'équilibre du processus U_n . Alors $(U_n(\infty, \cdot))_{n \geq 1}$ converge étroitement sur $\mathcal{M}^\pm(\mathbb{R})$ vers la mesure signée $\xi_\infty xp_0(x) dx$, où ξ_∞ est une variable aléatoire de loi

$$C \exp\left(-\frac{3\mu_2^2 - \mu_4}{24} x^4\right) dx,$$

avec C est une constante de normalisation. Enfin

$$\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{j=1}^n X_n^j(\infty) = \int_{\mathbb{R}} x U_n(\infty, dx) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mu_2 \xi_\infty.$$

Ce résultat est compatible avec les résultats de Richard S. Ellis et Charles M. Newman [26] (cf. théorème I.1) appliqués à la mesure $d\rho(x) = p_0(x) dx$.

36 Une diffusion de Langevin pour le modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC

Dans les chapitres précédents, nous avons étudié un modèle d'Ising Curie-Weiss « d'équilibre » de criticalité auto-organisée : pour ρ une mesure de probabilité sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0, il s'agit de la donnée d'un tableau triangulaire infini $(X_n^k)_{1 \leq k \leq n}$ de variables aléatoires réelles tel que, pour tout $n \geq 1$, (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$,

$$d\tilde{\mu}_{n,\rho}^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{Z_n^*} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i),$$

avec

$$Z_n^* = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\frac{1}{2} \frac{(x_1 + \dots + x_n)^2}{x_1^2 + \dots + x_n^2 + 1}\right) \prod_{i=1}^n d\rho(x_i).$$

Posons $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$ et notons σ^2 et μ_4 les moments d'ordre 2 et 4 de ρ . Nous avons montré en particulier que, si ρ admet une densité paire f telle que

$$\exists v_0 > 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{v_0 z^2} f(z) dz < +\infty,$$

alors, sous $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$,

$$\frac{\mu_4^{1/4} S_n}{\sigma^2 n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \left(\frac{4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{s^4}{12}\right) ds.$$

Il s'agit en fait de la version alternative de notre modèle (cf. paragraphe 3.d)). Nous allons l'utiliser dans la suite pour une raison technique : la fonction d'interaction dans l'exponentielle est bien définie sur tout \mathbb{R}^n , contrairement au modèle défini par la mesure $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ que nous avons présenté dans les paragraphes précédents.

Nous allons à présent construire la diffusion de Langevin associée au modèle (alternatif) de criticalité auto-organisée.

a) Définition du modèle d'Ising Curie-Weiss dynamique de SOC

Pour $n \geq 1$ et pour tout vecteur $y = (y_1, \dots, y_n)$ de \mathbb{R}^n , nous notons

$$S_n[y] = \sum_{i=1}^n y_i \quad \text{et} \quad T_n[y] = \sum_{i=1}^n y_i^2.$$

Le modèle. Soit φ une fonction paire et de classe C^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} telle que la fonction $\exp(2\varphi)$ est intégrable sur \mathbb{R} . Nous définissons la densité ρ par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \rho(x) = Z^{-1} \exp(2\varphi(x)) \quad \text{avec} \quad Z = \int_{\mathbb{R}} \exp(2\varphi(t)) dt.$$

Nous supposons que

$$\mu_4 = \int_{\mathbb{R}} x^4 \rho(x) dx < +\infty$$

et nous notons σ^2 la variance de $\rho(x) dx$. Pour $n \geq 1$, nous considérons le système (Σ_n) d'équations différentielles stochastiques

$$dX_n^j(t) = \varphi'(X_n^j(t)) dt + dB_j(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{S_n[X_n(t)]}{T_n[X_n(t)] + 1} - X_n^j(t) \left(\frac{S_n[X_n(t)]}{T_n[X_n(t)] + 1} \right)^2 \right) dt,$$

$j \in \{1, \dots, n\},$

avec (B_1, \dots, B_n) un mouvement Brownien standard n -dimensionnel et

$$\forall t \geq 0 \quad X_n(t) = (X_n^1(t), \dots, X_n^n(t)).$$

Nous notons encore ρ la mesure de densité ρ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} .

Remarquons que, pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \frac{\partial}{\partial y_j} \left(\frac{1}{2} \frac{(S_n[y])^2}{T_n[y] + 1} + 2 \sum_{i=1}^n \varphi(y_i) \right) = \frac{S_n[y]}{T_n[y] + 1} - y_j \left(\frac{S_n[y]}{T_n[y] + 1} \right)^2 + 2\varphi'(y_j),$$

donc le système (Σ_n) s'écrit aussi

$$dX_n(t) = \frac{1}{2} \nabla \ln f_{n,\rho}^*(X_n(t)) + dB(t),$$

où $B = (B_1, \dots, B_n)$ et $f_{n,\rho}^*$ est la densité de $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^n , définie par

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad f_{n,\rho}^*(y) = \frac{1}{Z_n^*} \exp \left(\frac{1}{2} \frac{(y_1 + \dots + y_n)^2}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 1} + 2 \sum_{i=1}^n \varphi(y_i) \right).$$

Ainsi la solution de (Σ_n) (si elle existe) est la diffusion de Langevin associée à $f_{n,\rho}^*$.

Introduisons l'opérateur L_n sur $C^2(\mathbb{R}^n)$ tel que, pour tout $f \in C^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad L_n f(y) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(y)}{\partial y_j^2} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \frac{S_n[y]}{T_n[y] + 1} - \frac{y_j}{2} \left(\frac{S_n[y]}{T_n[y] + 1} \right)^2 + \varphi'(y_j) \right) \frac{\partial f(y)}{\partial y_j}.$$

Théorème XII.2. *Supposons qu'il existe $C > 0$ tel que*

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad x\varphi'(x) \leq C(1 + x^2).$$

Alors, pour tout $n \geq 1$, il existe une unique solution forte $(X_n(t), t \geq 0)$ au système d'équations différentielles (Σ_n) de condition initiale $X_n(0)$ de loi admettant un moment d'ordre 2. De plus il s'agit d'un processus de diffusion de Markov sur \mathbb{R}^n de générateur infinitésimal $(L_n, D(L_n))$, avec $C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \subset D(L_n)$, et dont l'unique mesure invariante est $\tilde{\mu}_{n,\rho}^$.*

Démonstration. Soit $n \geq 1$. La fonction $\ln f_{n,\rho}^*$ est de classe C^2 sur \mathbb{R}^n et, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \ln f_{n,\rho}^*(x), x \rangle &= \sum_{j=1}^n x_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{2} \frac{(S_n[x])^2}{T_n[x] + 1} + 2 \sum_{i=1}^n \varphi(x_i) \right) \\ &= \sum_{j=1}^n x_j \left(\frac{S_n[x]}{T_n[x] + 1} - x_j \left(\frac{S_n[x]}{T_n[x] + 1} \right)^2 + 2\varphi'(x_j) \right) \\ &= \frac{(S_n[x])^2}{T_n[x] + 1} - \frac{T_n[x](S_n[x])^2}{(T_n[x] + 1)^2} + 2 \sum_{j=1}^n x_j \varphi'(x_j) \leq \frac{(S_n[x])^2}{(T_n[x] + 1)^2} + 2C(n + \|x\|^2). \end{aligned}$$

Ensuite la convexité de $t \mapsto t^2$ sur \mathbb{R} entraîne que

$$\forall y \in \mathbb{R}^n \quad \frac{(S_n[y])^2}{(T_n[y] + 1)^2} \leq \frac{nT_n[y]}{(T_n[x] + 1)^2} \leq n,$$

puisque $T_n[\cdot] \leq (T_n[\cdot] + 1)^2$. Ainsi $f_{n,\rho}^*$ vérifie les hypothèses du théorème XII.1. Le théorème XII.2 en est donc une conséquence. \square

Remarquons que nous avons choisi de construire ce modèle dynamique afin que $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$ soit une mesure invariante. Nous aurions pu également le construire afin que $\tilde{\mu}_{n,\rho}$ soit une mesure invariante. Mais alors le système d'équations différentielles stochastiques aurait été

$$dX_n^j(t) = \varphi'(X_n^j(t)) dt + dB_j(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{S_n[X_n(t)]}{T_n[X_n(t)]} - X_n^j(t) \left(\frac{S_n[X_n(t)]}{T_n[X_n(t)]} \right)^2 \right) dt, \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

Cette fois la fonction d'interaction n'est plus Lipschitzienne et il faut s'assurer que $T_n[X_n(t)] \neq 0$ pour tout $t \geq 0$: ce serait source de difficultés techniques pour montrer l'existence et l'unicité de solutions fortes.

Nous supposons dans toute la suite que φ est telle que, pour tout $n \geq 1$, (Σ_n) admet une unique solution forte $((X_n^1(t), \dots, X_n^n(t)), t \geq 0)$. Pour tous $n \geq 1$ et $t \geq 0$, nous introduisons la mesure empirique $M_n(t, \cdot)$ définie par

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad M_n(t, A) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{X_n^j(t)}(A) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}_A(X_n^j(t)).$$

Comme dans [19], la suite des processus empiriques $(M_n(t, \cdot), t \geq 0)_{n \geq 1}$ est l'objet central dans l'étude de ce modèle d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée.

Lemme XII.3. *Supposons que la loi du vecteur $X_n(0)$ est invariante par permutation des coordonnées. Alors $(M_n(t, \cdot), t \geq 0)$ est un processus de diffusion de Markov dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.*

La démonstration est indentique à celle du lemme 2.3.1 de [19] puisque \mathcal{H}_n est invariante par permutation de ses coordonnées.

b) Convergence de $M_n(\cdot, \cdot)$

i) Heuristique pour la convergence de $M_n(\cdot, \cdot)$

Nous donnons ici une heuristique pour la convergence de la suite $(M_n(t, \cdot), t \geq 0)_{n \geq 1}$ à l'image des sections 2.4 et 2.5 de [19].

Si $(M_n(t, \cdot), t \geq 0)_{n \geq 1}$ converge en loi dans $C([0, +\infty[, \mathcal{M}_1(\mathbb{R}))$ vers un processus $(Y(t, \cdot), t \geq 0)$ alors, sous des hypothèses de convergence des moments,

$$\frac{S_n[X_n(t)]}{T_n[X_n(t)] + 1} = \frac{\int_{\mathbb{R}} x M_n(t, dx)}{\int_{\mathbb{R}} x^2 M_n(t, dx) + 1/n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{\int_{\mathbb{R}} x Y(t, dx)}{\int_{\mathbb{R}} x^2 Y(t, dx)}.$$

En regardant la démonstration des théorèmes 2.4.1 et 2.5.1 de [19], nous pouvons conjecturer que la suite $(M_n(t, \cdot), t \geq 0)_{n \geq 1}$ converge en loi dans l'espace $C([0, +\infty[, \mathcal{M}_1(\mathbb{R}))$ vers le processus $(p(t, x) dx, t \geq 0)$, où $p(\cdot, \cdot)$ est solution de l'équation

$$\frac{\partial p(t, y)}{\partial t} = L_{\infty}^* p(t, y), \quad (\mathbf{E}_{\infty})$$

avec

$$L_{\infty}^* p(t, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(t, y)}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial y} \left(\left[\varphi'(y) + \frac{\int_{\mathbb{R}} z p(t, z) dz}{2 \int_{\mathbb{R}} z^2 p(t, z) dz} - \frac{y}{2} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} z p(t, z) dz}{\int_{\mathbb{R}} z^2 p(t, z) dz} \right)^2 \right] p(t, y) \right).$$

Il s'agit de l'équation de Fokker-Planck associée à l'équation différentielle stochastique

$$dy(t) = \varphi'(y(t)) dt + dB(t) + \left(\frac{\mathbb{E}(y(t))}{2\mathbb{E}(y^2(t))} - \frac{y(t)}{2} \left(\frac{\mathbb{E}(y(t))}{\mathbb{E}(y^2(t))} \right)^2 \right) dt.$$

ii) Les solutions stationnaires pour (\mathbf{E}_∞)

Si $p(x) dx$ est une mesure de probabilité solution stationnaire de l'équation (\mathbf{E}_∞) alors elle admet un moment d'ordre 2 et la fonction p vérifie

$$\frac{1}{2} \frac{\partial^2 p(y)}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\left(\varphi'(y) + \frac{a}{2b} - y \frac{a^2}{2b^2} \right) p(y) \right),$$

$$a = \int_{\mathbb{R}} zp(z) dz, \quad b = \int_{\mathbb{R}} z^2 p(z) dz, \quad 1 = \int_{\mathbb{R}} p(z) dz.$$

Donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$p'(y) = K + \left(2\varphi'(y) + \frac{a}{b} - y \frac{a^2}{b^2} \right) p(y).$$

Via la méthode de variation de la constante de l'équation différentielle ordinaire linéaire ci-dessus, nous obtenons qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad p(y) = \exp \left(2\varphi(y) - \frac{y^2 a^2}{2b^2} + \frac{ay}{b} \right) \left(C + K \int_0^x \exp \left(-2\varphi(z) + \frac{z^2 a^2}{2b^2} - \frac{az}{b} \right) dz \right).$$

Le lemme suivant nous donne une condition suffisante pour que $K = 0$.

Lemme XII.4. Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 vérifiant :

- ★ $\exp(f)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$,
- ★ il existe $m > 0$ tel que $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \geq m$,
- ★ $f''(t)/(f')^2(t)$ tend vers 0 quand t tend vers $+\infty$.

Soit $g : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ telle que $g \exp(f)$ est intégrable sur $[0, +\infty[$. Alors la fonction

$$F_{f,g} : x \mapsto g(x) \exp(f(x)) \int_0^x \exp(-f(t)) dt$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si g/f' est intégrable sur $[m, +\infty[$.

Démonstration. L'intégrabilité de $F_{f,g}$ sur $[0, m[$ est immédiate. Remarquons ensuite que l'intégrabilité de $F_{f,g}$ sur $[m, +\infty[$ est équivalente à celle de la fonction

$$x \mapsto g(x) \exp(f(x)) \int_m^x \exp(-f(t)) dt.$$

Cherchons un équivalent de cette fonction en $+\infty$. Soit $x \geq m$. Via une intégration par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_m^x \exp(-f(t)) dt &= \int_m^x \frac{f'(t) \exp(-f(t))}{f'(t)} dt \\ &= \frac{\exp(-f(m))}{f'(m)} - \frac{\exp(-f(x))}{f'(x)} - \int_m^x \frac{f''(t)}{(f')^2(t)} \exp(-f(t)) dt. \end{aligned}$$

La fonction $\exp(f)$ est intégrable sur \mathbb{R} donc, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, l'intégrale de $\exp(-f)$ diverge. Comme $f''(t)/(f')^2(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow +\infty$, nous en déduisons que

$$\int_m^x \frac{f''(t)}{(f')^2(t)} \exp(-f(t)) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{=} o \left(\int_m^x \exp(-f(t)) dt \right).$$

Ainsi

$$g(x) \exp(f(x)) \int_m^x \exp(-f(t)) dt \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} g(x) \frac{\exp(f(x) - f(m))}{f'(m)} - \frac{g(x)}{f'(x)}.$$

Comme $g \exp(f)$ est intégrable, nous obtenons l'équivalent annoncé. \square

Regardons un exemple. Pour tout $(a, b, y) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[^2$, nous posons

$$f_{a,b,\varphi}(y) = 2\varphi(y) - \frac{y^2 a^2}{2b^2} + \frac{ay}{b}.$$

Si φ est une fonction polynomiale paire de degré $d \geq 2$, alors la fonction f vérifie les hypothèses du lemme et donc, pour tout $j \in \mathbb{N}$, la fonction

$$x \mapsto x^j \exp(f_{a,b,\varphi}(x)) \int_0^x \exp(-f_{a,b,\varphi}(t)) dt$$

est intégrable sur $[0, +\infty[$ si et seulement si $t \mapsto t^j / f'_{a,b,\varphi}(t)$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. C'est le cas si et seulement si $d - j > 2$. Supposons que $K \neq 0$. En prenant $j = 0$, nous obtenons que p n'est pas intégrable (et donc n'est pas une densité) si $d = 2$. De plus, en prenant $j = 2$, nous obtenons que $b = \int_{\mathbb{R}} x^2 p(x) dx = +\infty$ si $d \leq 4$. Nous en déduisons que, si φ est une fonction polynomiale paire de degré $d = 2$ ou 4 , alors $K = 0$.

Plus généralement, si φ est une fonction polynomiale paire et si une mesure invariante admet un moment d'ordre j alors $K = 0$ dès que le degré de φ est inférieur ou égal à $j + 2$.

Supposons dans la suite que nous avons montré que $K = 0$. Nous obtenons alors que p vérifie

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad p(y) = \frac{\exp\left(2\varphi(y) - \frac{y^2 a^2}{2b^2} + \frac{ay}{b}\right)}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(2\varphi(z) - \frac{z^2 a^2}{2b^2} + \frac{az}{b}\right) dz}, \quad a = \int_{\mathbb{R}} zp(z) dz, \quad b = \int_{\mathbb{R}} z^2 p(z) dz.$$

Or φ est une fonction paire donc

$$\begin{aligned} 0 = a - b \frac{a}{b} &= \frac{\int_{\mathbb{R}} z \exp\left(2\varphi(z) - \frac{z^2 a^2}{2b^2} + \frac{az}{b}\right) dz - \int_{\mathbb{R}} \frac{az^2}{b} \exp\left(2\varphi(z) - \frac{z^2 a^2}{2b^2} + \frac{az}{b}\right) dz}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(2\varphi(z) - \frac{z^2 a^2}{2b^2} + \frac{az}{b}\right) dz} \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} 2z \operatorname{sh}\left(\frac{az}{b}\right) \exp\left(2\varphi(z) - \frac{z^2 a^2}{2b^2}\right) dz - \int_0^{+\infty} \frac{2az^2}{b} \operatorname{ch}\left(\frac{az}{b}\right) \exp\left(2\varphi(z) - \frac{z^2 a^2}{2b^2}\right) dz}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(2\varphi(z) - \frac{z^2 a^2}{2b^2} + \frac{az}{b}\right) dz} \\ &= \frac{\int_0^{+\infty} 2z \operatorname{ch}\left(\frac{az}{b}\right) \left(\operatorname{th}\left(\frac{az}{b}\right) - \frac{az}{b}\right) \exp\left(2\varphi(z) - \frac{z^2 a^2}{2b^2}\right) dz}{\int_{\mathbb{R}} \exp\left(2\varphi(z) - \frac{z^2 a^2}{2b^2} + \frac{az}{b}\right) dz}. \end{aligned}$$

Or $\operatorname{th}(u) \leq u$ pour tout $u \geq 0$, avec égalité si et seulement si $u = 0$. Ainsi la fonction à l'intérieur de l'intégrale du numérateur est strictement négative si $a > 0$, strictement positive si $a < 0$ et nulle si $a = 0$. Nous en déduisons que $a = 0$ et nous obtenons que $p = Z^{-1} \exp(2\varphi) = \rho$. Nous avons aussi $b = \sigma^2$.

Nous avons donc montré que si $K = 0$ alors $p = \rho$. Nous supposons que c'est le cas dans la suite.

c) Générateur de $U_n(\cdot, \cdot)$

Afin d'étudier les fluctuations pour la diffusion de Langevin associée au modèle d'Ising Curie-Weiss de SOC et compte-tenu de l'heuristique du paragraphe précédent, de la discussion sur les mesures invariantes et du théorème 4.2.2 de [19], nous sommes amenés à étudier la suite de processus $(U_n(t, \cdot), t \geq 0)_{n \geq 1}$, définie par

$$\forall n \geq 1 \quad \forall t \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad U_n(t, A) = n^{1/4} \left(M_n(\sqrt{nt}, A) - \int_A \rho(x) dx \right).$$

Pour tous $n \geq 1$ et $t \geq 0$, la mesure $U_n(t, \cdot)$ appartient à $\mathcal{M}^{\pm}(\mathbb{R})$, l'ensemble des mesures signées sur \mathbb{R} .

Donnons-nous $n \geq 1$. Nous introduisons la fonction

$$\nu_n : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto n^{1/4} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{x_j} - \rho \right) \in \mathcal{M}^{\pm}(\mathbb{R}).$$

Soient $\nu \in \mathcal{M}^{\pm}(\mathbb{R})$ et $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_p)$, où les Φ_k , $k \in \{1, \dots, p\}$, sont des fonctions ν -intégrables, nous notons

$$\langle \Phi, \nu \rangle = (\langle \Phi_1, \nu \rangle, \dots, \langle \Phi_p, \nu \rangle) = \left(\int_{\mathbb{R}} \Phi_1(z) d\nu(z), \dots, \int_{\mathbb{R}} \Phi_p(z) d\nu(z) \right).$$

Notons aussi \mathbf{z} et \mathbf{z}^2 les fonctions qui à $z \in \mathbb{R}$ associent respectivement z et z^2 .

Proposition XII.5. *Donnons-nous $f \in C^2(\mathbb{R}^p)$ et $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_p)$ telles que, pour tout $k \in \{1, \dots, p\}$, $\Phi_k \in C^2(\mathbb{R})$, $\Phi'_k \rho \in C_0(\mathbb{R})$ et les fonctions Φ_k , Φ'_k , Φ''_k et $\mathbf{z}\Phi'_k$ sont ρ -intégrables. Alors*

$$\sqrt{n}L_n f(\langle \Phi, \nu_n \rangle) = (\sqrt{n}G_1 + n^{1/4}G_2 + G_3 + R_n)f(\langle \Phi, \nu_n \rangle),$$

avec

$$G_1 f(\langle \Phi, \nu_n \rangle) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \langle \mathcal{L}\Phi_k, \nu_n \rangle,$$

$$\forall k \in \{1, \dots, p\} \quad \mathcal{L}\Phi_k = \frac{1}{2} \Phi''_k + \varphi' \Phi'_k + \frac{\mathbf{z}}{2\sigma^2} \langle \Phi'_k, \rho \rangle,$$

$$G_2 f(\langle \Phi, \nu_n \rangle) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \left(\frac{\langle \Phi'_k, \nu_n \rangle}{\sigma^2} - \frac{\langle \Phi'_k, \rho \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{\sigma^4} - \frac{\langle \mathbf{z}\Phi'_k, \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{\sigma^4} \right),$$

$$G_3 f(\langle \Phi, \nu_n \rangle) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \left(\frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2 \langle \Phi'_k, \rho \rangle}{\sigma^6} - \frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle \langle \Phi'_k, \nu_n \rangle}{\sigma^4} \right. \\ \left. - \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}\Phi'_k, \nu_n \rangle}{\sigma^4} + \frac{2\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}\Phi'_k, \rho \rangle}{\sigma^6} \right) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \langle \Phi'_k \Phi'_l, \rho \rangle,$$

$$R_n f(\langle \Phi, \nu_n \rangle) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) R_n^{(0)}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle, \langle \Phi'_k, \nu_n \rangle, \langle \Phi'_k, \rho \rangle, \langle \mathbf{z}\Phi'_k, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}\Phi'_k, \rho \rangle) \\ + \frac{1}{2n^{1/4}} \sum_{1 \leq k, l \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \langle \Phi'_k \Phi'_l, \nu_n \rangle,$$

où $(R_n^{(0)})_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions de \mathbb{R}^6 dans \mathbb{R} vérifiant

$$\forall k > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{v \in \mathbb{R}^6, \|v\| \leq k} |R_n^{(0)}(v)| = 0.$$

Démonstration. Nous calculons

$$\begin{aligned} L_n f(\langle \Phi, \nu_n \rangle) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^p \left(\frac{1}{n^{3/4}} \Phi_k''(x_j) \frac{\partial f}{\partial y_k}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) + \sum_{l=1}^p \frac{1}{n^{3/2}} \Phi_k'(x_j) \Phi_l'(x_j) \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \right) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \left(\frac{S_n[x]}{T_n[x] + 1} - x_j \left(\frac{S_n[x]}{T_n[x] + 1} \right)^2 + 2\varphi'(x_j) \right) \left(\sum_{k=1}^p \frac{1}{n^{3/4}} \Phi_k'(x_j) \frac{\partial f}{\partial y_k}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \right). \end{aligned}$$

Pour $g \in L^1(\rho)$, nous avons

$$\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{j=1}^n g(x_j) = \langle g, \nu_n + n^{1/4} \rho \rangle.$$

Nous remarquons que

$$\frac{S_n[x]}{T_n[x] + 1} = \frac{S_n[x]/n}{T_n[x]/n + 1/n} = \frac{\langle \mathbf{z}, n^{-1/4} \nu_n + \rho \rangle}{\langle \mathbf{z}^2, n^{-1/4} \nu_n + \rho \rangle + 1/n} = \frac{n^{-1/4} \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{\sigma^2 + n^{-1/4} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle + 1/n}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} L_n f(\langle \Phi, \nu_n \rangle) &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \langle \Phi_k'', \nu_n + n^{1/4} \rho \rangle \\ &+ \frac{1}{2n^{3/4}} \sum_{1 \leq k, l \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \langle \Phi_k' \Phi_l', \nu_n + n^{1/4} \rho \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \left(\langle \Phi_k', \nu_n + n^{1/4} \rho \rangle \frac{n^{-1/4} \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{\sigma^2 + n^{-1/4} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle + 1/n} \right. \\ &\quad \left. - \langle \mathbf{z} \Phi_k', \nu_n + n^{1/4} \rho \rangle \frac{n^{-1/2} \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^2}{(\sigma^2 + n^{-1/4} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle + 1/n)^2} + 2 \langle \varphi' \Phi_k', \nu_n + n^{1/4} \rho \rangle \right). \end{aligned}$$

Ensuite, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, nous avons $\Phi_k' \rho \in C_0(\mathbb{R})$ donc

$$0 = \int_{\mathbb{R}} (\Phi_k' \rho)'(z) dz = \langle \Phi_k'' + 2\varphi' \Phi_k', \rho \rangle,$$

si bien que

$$\langle \Phi_k'' + 2\varphi' \Phi_k', \nu_n + n^{1/4} \rho \rangle = \langle \Phi_k'' + 2\varphi' \Phi_k', \nu_n \rangle = 2 \langle \mathcal{L} \Phi_k, \nu_n \rangle - \frac{1}{\sigma^2} \langle \Phi_k', \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle.$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned} L_n f(\langle \Phi, \nu_n \rangle) &= \frac{1}{2} \sum_{1 \leq k, l \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial y_k \partial y_l}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \left(\frac{\langle \Phi_k' \Phi_l', \nu_n \rangle}{n^{3/4}} + \frac{\langle \Phi_k' \Phi_l', \rho \rangle}{n^{1/2}} \right) \\ &+ G_1 f(\langle \Phi, \nu_n \rangle) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k}(\langle \Phi, \nu_n \rangle) \left(G_{k,n} - \frac{1}{\sigma^2} \langle \Phi_k', \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right), \end{aligned}$$

avec, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} G_{k,n} &= \langle \Phi_k', \nu_n + n^{1/4} \rho \rangle \frac{n^{-1/4} \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{\sigma^2 + n^{-1/4} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle + 1/n} \\ &\quad - \langle \mathbf{z} \Phi_k', \nu_n + n^{1/4} \rho \rangle \frac{n^{-1/2} \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^2}{(\sigma^2 + n^{-1/4} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle + 1/n)^2}. \end{aligned}$$

De plus, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, quand $n \rightarrow +\infty$,

$$\frac{n^{-1/4}\alpha}{\sigma^2 + n^{-1/4}\beta + 1/n} = \frac{\alpha}{\sigma^2 n^{1/4}} - \frac{\alpha\beta}{\sigma^4 n^{1/2}} + \frac{\alpha\beta^2}{\sigma^6 n^{3/4}} + \frac{\alpha}{n^{3/4}} R_n^{(1)}(\beta),$$

$$\left(\frac{n^{-1/4}\alpha}{\sigma^2 + n^{-1/4}\beta + 1/n} \right)^2 = \frac{\alpha^2}{\sigma^4 n^{1/2}} - \frac{2\alpha^2\beta}{\sigma^6 n^{3/4}} + \frac{\alpha^2}{n^{3/4}} R_n^{(2)}(\beta),$$

avec $R_n^{(1)}$ et $R_n^{(2)}$ des fonctions telles que $R_n^{(1)}(\beta)$ et $R_n^{(2)}(\beta)$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, uniformément en β appartenant à un compact de \mathbb{R} . Par conséquent, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

$$\begin{aligned} G_{k,n} = & \langle \Phi'_k, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \left(\frac{1}{\sigma^2 n^{1/4}} - \frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{\sigma^4 n^{1/2}} + \frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2}{\sigma^6 n^{3/4}} + \frac{1}{n^{3/4}} R_n^{(1)}(\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right) \\ & + \langle \Phi'_k, \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \left(\frac{1}{\sigma^2} - \frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{\sigma^4 n^{1/4}} + \frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2}{\sigma^6 n^{1/2}} + \frac{1}{n^{1/2}} R_n^{(1)}(\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right) \\ & - \langle \mathbf{z} \Phi'_k, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^2 \left(\frac{1}{\sigma^4 n^{1/2}} - \frac{2\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{\sigma^6 n^{3/4}} + \frac{1}{n^{3/4}} R_n^{(2)}(\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right) \\ & - \langle \mathbf{z} \Phi'_k, \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^2 \left(\frac{1}{\sigma^4 n^{1/4}} - \frac{2\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{\sigma^6 n^{1/2}} + \frac{1}{n^{1/2}} R_n^{(2)}(\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right). \end{aligned}$$

Regroupons les termes :

$$\begin{aligned} G_{k,n} = & \frac{\langle \Phi'_k, \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{\sigma^2} + \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{n^{1/4}} \left(\frac{\langle \Phi'_k, \nu_n \rangle}{\sigma^2} - \frac{\langle \Phi'_k, \rho \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{\sigma^4} - \frac{\langle \mathbf{z} \Phi'_k, \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{\sigma^4} \right) \\ & + \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{n^{1/2}} \left(- \frac{\langle \Phi'_k, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{\sigma^4} + \frac{\langle \Phi'_k, \rho \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2}{\sigma^6} - \frac{\langle \mathbf{z} \Phi'_k, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{\sigma^4} \right) \\ & + \frac{2\langle \mathbf{z} \Phi'_k, \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^2 \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{\sigma^6 n^{1/2}} + \frac{1}{n^{1/2}} R_n^{(0)}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle, \langle \Phi'_k, \nu_n \rangle, \langle \Phi'_k, \rho \rangle, \langle \mathbf{z} \Phi'_k, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z} \Phi'_k, \rho \rangle), \end{aligned}$$

où, pour tout $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \in \mathbb{R}^6$,

$$R_n^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = \frac{x_1 x_2^2 x_3}{\sigma^6 n^{1/4}} + x_1 \left(\frac{x_3}{n^{1/4}} + x_4 \right) R_n^{(1)}(x_2) + \frac{2x_1^2 x_2 x_5}{\sigma^6 n^{1/4}} + x_1^2 \left(\frac{x_5}{n^{1/4}} + x_6 \right) R_n^{(2)}(x_2).$$

Finalement, en regroupant tous nos calculs, nous obtenons

$$L_n f(\langle \Phi, \nu_n \rangle) = (G_1 + n^{-1/4} G_2 + n^{-1/2} G_3 + n^{-1/2} R_n) f(\langle \Phi, \nu_n \rangle).$$

Notons enfin que $(R_n^{(0)})_{n \geq 1}$ est bien une suite de fonctions qui tend vers 0 uniformément sur tout compact. Ceci termine la démonstration de la proposition. \square

d) L'opérateur \mathcal{L}

Nous définissons l'opérateur \mathcal{L} sur $D(\mathcal{L}) \subset C^2(\mathbb{R})$ par

$$\forall \Phi \in D(\mathcal{L}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathcal{L}\Phi(x) = \frac{1}{2} \Phi''(x) + \varphi'(x) \Phi'(x) + \frac{x}{2\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} \Phi'(z) \rho(z) dz.$$

i) Noyau de \mathcal{L}

Soit $\Phi \in D(\mathcal{L})$ tel que $\mathcal{L}\Phi = 0$. Alors $\Phi'\rho$ est intégrable et

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \frac{1}{2} \Phi''(x) + \varphi'(x)\Phi'(x) + \frac{ax}{2\sigma^2} = 0 \quad \text{avec} \quad a = \int_{\mathbb{R}} \Phi'(z)\rho(z) dz.$$

Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\Phi'(x) = \exp(-2\varphi(x)) \left(C + \frac{a}{\sigma^2} \int_x^{+\infty} t \exp(2\varphi(t)) dt \right) = \frac{C}{Z\rho(x)} + \frac{a}{\sigma^2\rho(x)} \int_x^{+\infty} t\rho(t) dt.$$

Comme $\Phi'\rho$ est intégrable, il s'ensuit que $C = 0$. Donc il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \Phi(y) = K + a \int_0^y \frac{1}{\sigma^2\rho(x)} \left(\int_x^{+\infty} t\rho(t) dt \right) dx.$$

Nous définissons la fonction Φ_0 par

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \Phi_0(y) = \int_0^y \frac{1}{\sigma^2\rho(x)} \left(\int_x^{+\infty} t\rho(t) dt \right) dx.$$

Comme φ est paire, il s'ensuit que Φ'_0 est paire et donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} \Phi'_0(x)\rho(x) dx &= \frac{1}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_x^{+\infty} t\rho(t) dt \right) dx \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} \left(\int_x^{+\infty} t\rho(t) dt \right) dx = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} t\rho(t) \left(\int_0^t dx \right) dt, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le théorème de Fubini à la dernière intégrale. Ainsi

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi'_0(x)\rho(x) dx = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} t^2\rho(t) dt = 1.$$

Nous avons donc montré que

$$\text{Ker } \mathcal{L} = \text{Vect}(1, \Phi_0).$$

ii) Quelques propriétés de Φ_0

Rappelons que, par hypothèse, φ est paire, de classe C^1 sur \mathbb{R} et que la mesure ρ admet un moment d'ordre 4.

Proposition XII.6. (a) Φ_0 est une fonction de classe C^2 , impaire et strictement croissante sur \mathbb{R} .

(b) $\Phi'_0\rho \in C_0(\mathbb{R})$.

(c) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $z \mapsto z^k\Phi'_0(z)$ est ρ -intégrable si et seulement si ρ admet un moment d'ordre $k+2$. Dans ce cas

$$\int_{\mathbb{R}} z^k\Phi'_0(z)\rho(z) dz = \begin{cases} \frac{1}{\sigma^2(k+1)} \int_{\mathbb{R}} z^{k+2}\rho(z) dz & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair.} \end{cases}$$

(d) Φ''_0 est ρ -intégrable si et seulement si la fonction $t \mapsto t \int_0^t |\varphi'(z)| dz$ l'est.

(e) Si φ est la fonction $x \mapsto -x^2/(4\sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$, alors $\Phi_0(x) = x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Démonstration. Il est immédiat que Φ_0 est de classe C^2 . Si $y \geq 0$ alors

$$\begin{aligned}\Phi_0(-y) &= \int_0^{-y} \frac{1}{\sigma^2 \rho(x)} \left(\int_x^{+\infty} t \rho(t) dt \right) dx = - \int_0^y \frac{1}{\sigma^2 \rho(-z)} \left(\int_{-z}^{+\infty} t \rho(t) dt \right) dz \\ &= - \int_0^y \frac{1}{\sigma^2 \rho(z)} \left(\int_{-z}^z t \rho(t) dt + \int_z^{+\infty} t \rho(t) dt \right) dz \\ &= - \int_0^y \frac{1}{\sigma^2 \rho(z)} \left(0 + \int_z^{+\infty} t \rho(t) dt \right) dz = -\Phi_0(y).\end{aligned}$$

Ainsi Φ_0 est impaire. Ensuite

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \Phi_0'(y) = \frac{1}{\sigma^2 \rho(y)} \left(\int_y^{+\infty} t \rho(t) dt \right) > 0$$

donc Φ_0 est strictement croissante sur \mathbb{R} . De plus

$$\Phi_0'(y) \rho(y) = \frac{1}{\sigma^2} \left(\int_y^{+\infty} t \rho(t) dt \right) \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0,$$

si bien que $\Phi_0' \rho \in C_0(\mathbb{R})$. Nous avons montré les points (a) et (b). Ensuite, pour tout $k \in \mathbb{N}$, le théorème de Fubini nous assure que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} |z^k \Phi_0'(z)| \rho(z) dz &= \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} z^k \left(\int_z^{+\infty} t \rho(t) dt \right) dz \\ &= \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} t \rho(t) \left(\int_0^t z^k dz \right) dt = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} \frac{t^{k+2}}{k+1} \rho(t) dt.\end{aligned}$$

Nous en déduisons le point (c). Puisque $\Phi_0 \in \text{Ker } \mathcal{L}$, nous avons $\Phi_0''(x) = -2\varphi'(x)\Phi_0'(x) - x/\sigma^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi Φ_0'' est ρ -intégrable si et seulement si la fonction $\varphi'\Phi_0'$ l'est. Ceci entraîne le point (d) puisque

$$\int_{\mathbb{R}} |\varphi'(z)| \Phi_0'(z) \rho(z) dz = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} |\varphi'(z)| \left(\int_z^{+\infty} t \rho(t) dt \right) dz = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{+\infty} \left(t \int_0^t |\varphi'(z)| dz \right) \rho(t) dt.$$

Enfin, si $\varphi : x \mapsto -x^2/(4\sigma^2)$ avec $\sigma^2 > 0$, alors

$$\forall y \in \mathbb{R} \quad \Phi_0(y) = \int_0^y e^{x^2/(2\sigma^2)} \left(\int_x^{+\infty} \frac{t}{\sigma^2} e^{-t^2/(2\sigma^2)} dt \right) dx = \int_0^y e^{x^2/(2\sigma^2)} e^{-x^2/(2\sigma^2)} dx = y,$$

d'où le point (e). □

iii) Lien entre \mathcal{L} et L_∞^*

Enfin remarquons que, via des intégrations par parties, si Φ et g sont dans $C_c^2(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{L}^* g(x) \Phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} g(x) \mathcal{L} \Phi(x) dx,$$

où \mathcal{L}^* est défini sur $D(\mathcal{L}^*) \subset C^2(\mathbb{R})$ par

$$\forall g \in D(\mathcal{L}^*) \quad \mathcal{L}^* g = \frac{1}{2} g'' - (\varphi' g)' - \frac{1}{2\sigma^2} \rho' \int_{\mathbb{R}} z g(z) dz.$$

C'est-à-dire que \mathcal{L}^* est l'adjoint de \mathcal{L} si nous les restreignons à $C_c^2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire

$$\forall (f, g) \in C_c^2(\mathbb{R})^2 \quad \langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x) g(x) dx.$$

L'opérateur \mathcal{L}^* est en fait le linéarisé de L_∞^* autour de ρ . En effet, pour tout $h \in D(L_\infty^*)$,

$$\begin{aligned} L_\infty^*(\rho + h)(y) &= \frac{1}{2}(\rho + h)''(y) - \frac{\int_{\mathbb{R}} z(\rho + h)(z) dz}{2 \int_{\mathbb{R}} z^2(\rho + h)(z) dz}(\rho + h)'(y) \\ &\quad - \frac{\partial}{\partial y} \left(\left[\varphi'(y) - \frac{y}{2} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} z(\rho + h)(z) dz}{\int_{\mathbb{R}} z^2(\rho + h)(z) dz} \right)^2 \right] (\rho + h)(y) \right) \\ &= \frac{1}{2}h''(y) - \frac{\int_{\mathbb{R}} zh(z) dz}{2\sigma^2 + 2 \int_{\mathbb{R}} z^2h(z) dz}(\rho + h)'(y) - (\varphi'h)'(y) \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{2} \left(\frac{\int_{\mathbb{R}} zh(z) dz}{\sigma^2 + \int_{\mathbb{R}} z^2h(z) dz} \right)^2 (\rho + h)(y) \right) \\ &= \frac{1}{2}h''(y) - (\varphi'h)'(y) - \frac{1}{2\sigma^2}\rho'(y) \int_{\mathbb{R}} zh(z) dz + o(\|h\|_\infty + \|h'\|_\infty) \end{aligned}$$

(si nous faisons du moins l'hypothèse que les fonction ρ , ρ' et $\mathbf{z}\rho'$ sont bornées). L'opérateur \mathcal{L}^* est un objet central pour l'étude des fluctuations dans [19].

e) Convergence de $\langle \Phi_0, U_n(\cdot, \cdot) \rangle$

i) La méthode des perturbations

Donnons-nous $n \geq 1$ et $f \in C^2$. Nous notons toujours

$$\nu_n : (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto n^{1/4} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{x_j} - \rho \right) \in \mathcal{M}^\pm(\mathbb{R}).$$

Nous supposons que $t \mapsto t \int_0^t |\varphi'(z)| dz$ est ρ -intégrable. La proposition XII.6 nous assure alors que $\Phi'_0 \rho \in C_0(\mathbb{R})$ et les fonctions Φ_0 , Φ'_0 , Φ''_0 et $\mathbf{z}\Phi'_0$ sont ρ -intégrables. Nous pouvons donc appliquer la proposition XII.5 à Φ_0 .

Par construction, $\Phi_0 \in \text{Ker}\mathcal{L}$ donc $G_1f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) = 0$. Cependant $G_2f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) \neq 0$ a priori donc la convergence de $\sqrt{n}L_n f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle)$ n'est pas garantie. Comme dans [19], nous essayons d'utiliser la méthode des perturbations introduite par Papanicolaou, Stroock et Varadhan [47]. Nous posons

$$F_{n,f} = f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) + \frac{1}{n^{1/4}}H_f + \frac{1}{\sqrt{n}}K_f,$$

où H_f et K_f sont des fonctions sur \mathbb{R}^n bien choisies. Nous avons

$$\sqrt{n}L_n F_{n,f} = n^{1/4}(G_2f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) + G_1H_f) + (G_3f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) + G_2H_f + G_1K_f) + \tilde{R}_{n,f},$$

avec

$$\tilde{R}_{n,f} = R_n f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) + \frac{1}{n^{1/4}}(G_3H_f + R_n H_f + G_2K_f) + \frac{1}{\sqrt{n}}(G_3K_f + R_n K_f).$$

Il « suffit » de construire H_f et K_f tels que $G_2f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) + G_1H_f = 0$ et

$$G_3f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) + G_2H_f + G_1K_f = G_\infty f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle),$$

où G_∞ est le générateur du processus de Markov limite. Pour cela, nous sommes tentés de poser

$$H_f = -G_1^{-1}G_2f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle),$$

$$K_f = G_1^{-1}G_\infty f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) - G_1^{-1}G_3f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) - G_1^{-1}G_2H_f,$$

où G_1^{-1} est l'opérateur inverse de G_1 , s'il existe.

Dans le paragraphe 37, nous utilisons cette méthode pour obtenir un théorème de fluctuations dans le cas particulier où $\varphi(x) = -x^2/(4\sigma^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, avec $\sigma^2 > 0$. Par contre, pour des fonctions φ plus générales, nous ne sommes pas parvenus à écrire des preuves complètes en utilisant les idées de Dawson. C'est pourquoi nous préférons énoncer les résultats des paragraphes suivants – e)ii), e)iii) et f) – sous forme d'heuristiques et de conjectures.

ii) Heuristique pour l'inversion de G_1

La première difficulté dans la méthode des perturbations est de définir l'inversion de G_1 . Pour cela partons de l'heuristique suivante : supposons que \mathcal{L} est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(T_t, t \geq 0)$ et que les fonctions f et $\Phi = (\Phi_1, \dots, \Phi_p)$ sont telles que

$$t \longmapsto f(\langle T_t \Phi_1, \nu_n \rangle, \dots, \langle T_t \Phi_p, \nu_n \rangle)$$

est bien définie, est intégrable sur $[0, +\infty[$ et converge vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Nous avons « $T_t \mathcal{L} = \mathcal{L} T_t = dT_t/dt$ » et nous posons alors

$$G_1^{-1} f(\langle \Phi_1, \nu_n \rangle, \dots, \langle \Phi_p, \nu_n \rangle) = - \int_0^{+\infty} f(\langle T_t \Phi_1, \nu_n \rangle, \dots, \langle T_t \Phi_p, \nu_n \rangle) dt.$$

En effet, si nous supposons que nous pouvons inverser l'ordre de G_1 et $\int_0^{+\infty}$, alors

$$\begin{aligned} G_1 G_1^{-1} f(\langle \Phi_1, \nu_n \rangle, \dots, \langle \Phi_p, \nu_n \rangle) &= - \int_0^{+\infty} G_1 f(\langle T_t \Phi_1, \nu_n \rangle, \dots, \langle T_t \Phi_p, \nu_n \rangle) dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k}(\langle T_t \Phi, \nu_n \rangle) \langle \mathcal{L} T_t \Phi_k, \nu_n \rangle dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial y_k}(\langle T_t \Phi, \nu_n \rangle) \frac{d}{dt} \langle T_t \Phi_k, \nu_n \rangle dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (f(\langle T_t \Phi_1, \nu_n \rangle, \dots, \langle T_t \Phi_p, \nu_n \rangle)) dt \\ &= f(\langle \Phi_1, \nu_n \rangle, \dots, \langle \Phi_p, \nu_n \rangle). \end{aligned}$$

Ensuite, puisque Φ_0 est une fonction impaire, nous avons $\langle \mathbf{z} \Phi'_0, \rho \rangle = 0$ et donc

$$G_2 f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) = \frac{1}{2\sigma^4} f'(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle (\sigma^2 \langle \Phi'_0, \nu_n \rangle - \langle \Phi'_0, \rho \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle).$$

Nous souhaitons alors poser

$$H_f = -G_1^{-1} G_2 f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) = \frac{1}{2\sigma^4} f'(\langle \Phi_0, \mu \rangle) \int_0^{+\infty} \langle T_t \mathbf{z}, \mu \rangle (\sigma^2 \langle T_t \Phi'_0, \mu \rangle - \langle T_t \mathbf{z}^2, \mu \rangle) dt,$$

puisque $T_t \Phi_0 = \Phi_0$. Ensuite il nous faut calculer $G_2 H_f$. Pour cela, posons

$$\mathcal{K}_n(g) = \frac{1}{2\sigma^4} \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle (\sigma^2 \langle g', \nu_n \rangle - \langle g', \rho \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle - \langle \mathbf{z} g', \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle),$$

avec g telle que toutes les intégrales ci-dessus existent. Formellement nous obtenons

$$\begin{aligned} G_2 H_f(\nu_n) &= \frac{1}{2\sigma^4} f''(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle) \mathcal{K}_n(\Phi_0) \int_0^{+\infty} \langle T_t \mathbf{z}, \nu_n \rangle (\sigma^2 \langle T_t \Phi'_0, \nu_n \rangle - \langle T_t \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) dt \\ &\quad + \frac{f'(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle)}{2\sigma^4} \int_0^{+\infty} \left(\mathcal{K}_n(T_t \mathbf{z}) (\sigma^2 \langle T_t \Phi'_0, \nu_n \rangle - \langle T_t \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right. \\ &\quad \left. + \langle T_t \mathbf{z}, \nu_n \rangle (\sigma^2 \mathcal{K}_n(T_t \Phi'_0) - \mathcal{K}_n(T_t \mathbf{z}^2)) \right) dt. \end{aligned}$$

Bien sûr il ne s'agit que d'heuristiques et il n'est pas certain que nous pouvons définir correctement les objets précédents pour toutes les fonctions φ .

iii) Heuristique pour la convergence de $\langle \Phi_0, U_n(\cdot, \cdot) \rangle$

Dans [19], Donald A. Dawson a défini les opérateurs \mathcal{L} et \mathcal{L}^* analogues dans le cas du modèle qu'il considère. Il a montré que le processus limite de $(M_n)_{n \geq 1}$, s'il existe, appartient à l'ensemble

$$\{ \alpha q_0(x) dx : \alpha \in \mathbb{R} \} \subset \mathcal{M}^\pm(\mathbb{R}),$$

où q_0 est l'unique fonction du noyau de \mathcal{L}^* d'intégrale non-nulle. Dans notre modèle, nous avons vu que \mathcal{L}^* est défini par

$$\forall g \in D(\mathcal{L}^*) \quad \mathcal{L}^*g = \frac{1}{2}g'' - (\varphi'g)' - \frac{1}{2\sigma^2}\rho' \int_{\mathbb{R}} zg(z) dz.$$

Déterminons son noyau : soit $g \in D(\mathcal{L}^*)$ tel que $\mathcal{L}^*g = 0$. Alors $z \mapsto zg(z)$ est intégrable et

$$\frac{1}{2}g'' - (\varphi'g)' - \frac{a}{2\sigma^2}\rho' = 0 \quad \text{avec} \quad a = \int_{\mathbb{R}} zg(z) dz.$$

Il existe $K \in \mathbb{R}$ tel que $g' - 2\varphi'g = a\rho/\sigma^2 + K$ et donc il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) &= \exp(2\varphi(x)) \left(C + \int_0^x \left(\frac{a}{\sigma^2}\rho(t) + K \right) \exp(-2\varphi(t)) dt \right) \\ &= ZC\rho(x) + \frac{ax}{\sigma^2}\rho(x) + K\rho(x) \int_0^x \frac{dt}{\rho(t)}. \end{aligned}$$

De plus

$$a = \int_{\mathbb{R}} zg(z) dz = 0 + a + K \int_{\mathbb{R}} x\rho(x) \int_0^x \frac{dt}{\rho(t)} dx = a + 2K \int_0^{+\infty} x\rho(x) \int_0^x \frac{dt}{\rho(t)} dx.$$

Ainsi $K = 0$ et donc $g(x) = ZC\rho(x) + ax\rho(x)/\sigma^2$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Par conséquent

$$\text{Ker } \mathcal{L}^* = \text{Vect}(\rho, q),$$

avec $q(x) = x\rho(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Ainsi nous conjecturons que le processus limite de $(M_n)_{n \geq 1}$, s'il existe, appartient à l'ensemble

$$\{ \alpha q(x) dx : \alpha \in \mathbb{R} \} \subset \mathcal{M}^\pm(\mathbb{R}).$$

Donnons-nous f une fonction vérifiant les hypothèses de la proposition XII.5 et reprenons l'expression de $\sqrt{n}L_n f(\langle \Phi_0, \nu_n \rangle)$ en remplaçant ν_n par $\nu_\alpha = \alpha q(x) dx$, pour un certain $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$G_1 f(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) = 0,$$

$$G_2 f(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) = \frac{1}{2\sigma^4} f'(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_\alpha \rangle (\sigma^2 \langle \Phi'_0, \nu_\alpha \rangle - \langle \Phi'_0, \rho \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_\alpha \rangle) = 0,$$

puisque les fonctions $\mathbf{z}^2 q$ et $\Phi'_0 q$ sont impaires. Ensuite nous calculons que

$$G_3 f(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) = -\frac{1}{2\sigma^4} f''(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_\alpha \rangle^2 \langle \mathbf{z} \Phi'_0, \nu_\alpha \rangle + \frac{1}{2} f''(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) \langle (\Phi'_0)^2, \rho \rangle.$$

En utilisant le théorème de Fubini, nous avons

$$\langle \mathbf{z} \Phi'_0, q \rangle = \int_{\mathbb{R}} z^2 \Phi'_0(z) \rho(z) dz = 2 \int_0^{+\infty} \frac{z^2}{\sigma^2} \int_z^{+\infty} u \rho(u) du dz = 2 \int_0^{+\infty} \int_0^u u \rho(u) \frac{z^2}{\sigma^2} dz du.$$

Donc

$$\langle \mathbf{z}\Phi'_0, q \rangle = 2 \int_0^{+\infty} \frac{u^4}{3\sigma^2} \rho(u) du = \frac{\mu_4}{3\sigma^2}.$$

De plus, via une intégration par parties, nous calculons que

$$\langle (\Phi'_0)^2, \rho \rangle = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma^2} \left(\int_z^{+\infty} u\rho(u) du \right) \Phi'_0(z) dz = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sigma^2} z\rho(z)\Phi_0(z) dz = \frac{\langle \Phi_0, q \rangle}{\sigma^2}.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} G_3 f(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) &= -\frac{\mu_4}{6\sigma^2} \alpha^3 f'(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) + \frac{1}{2\sigma^2} f''(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) \langle \Phi_0, q \rangle \\ &= -\frac{\mu_4 \gamma_*^2}{6} \alpha^3 f'(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) \langle \Phi_0, q \rangle + \frac{\gamma_*^2}{2} f''(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) \langle \Phi_0, q \rangle^2 \\ &= G_{Z_\alpha} f(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle), \end{aligned}$$

avec $\gamma_*^2 = (\sigma^2 \langle \Phi_0, q \rangle)^{-1}$ et $(Z_\alpha(t, \cdot), t \geq 0)$ le processus tel que

$$\forall t \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad Z_\alpha(t, A) = z_\alpha(t) \int_A x\rho(x) dx,$$

où $(z_\alpha(t), t \geq 0)$ est la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dz_\alpha(t) = -\frac{\mu_4 \gamma_*^2}{6} z_\alpha^3(t) + \gamma_* dB(t), \quad z_\alpha(0) = \alpha,$$

avec $(B(t), t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard (cf. théorème XII.1). Ainsi

$$\sqrt{n} L_n f(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) = G_{Z_\alpha} f(\langle \Phi_0, \nu_\alpha \rangle) + \text{un reste}.$$

Nous déduisons de cette convergence de générateurs la conjecture suivante :

Conjecture. Soient $T > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que

$$\int_{\mathbb{R}} \Phi_0(x) U_n(0, dx) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \alpha \int_{\mathbb{R}} \Phi_0(x) x\rho(x) dx.$$

Alors

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \Phi_0(x) U_n(t, dx), 0 \leq t \leq T \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \left(z_\alpha(t) \int_{\mathbb{R}} \Phi_0(x) x\rho(x) dx, 0 \leq t \leq T \right),$$

pour la convergence en loi dans $C([0, T], \mathbb{R})$.

f) Conjecture pour les fluctuations de $U_n(\cdot, \cdot)$

En analysant la preuve du théorème 4.2.2 de [19] et de son corollaire, et compte-tenu des résultats du paragraphe précédent, nous avons la conjecture suivante :

Conjecture. Soient $T > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Supposons que la suite $(U_n(0, \cdot))_{n \geq 1}$ converge dans $\mathcal{M}^\pm(\mathbb{R})$ vers la mesure $\alpha q(x) dx$. Il existe $\sigma_* > 0$ tel que le processus $(U_n(t, \cdot), t \geq 0)$ converge en loi dans $C([0, T], \mathcal{M}^\pm(\mathbb{R}))$ vers le processus $(Z(t, \cdot), t \geq 0)$, défini par

$$\forall t \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad Z(t, A) = z(t) \int_A x\rho(x) dx,$$

où $(z(t), t \geq 0)$ est l'unique solution de l'équation différentielle stochastique

$$dz(t) = -\frac{\mu_4 \sigma_*^2}{6} z^3(t) + \sigma_* dB(t), \quad z(0) = \alpha,$$

et $(B(t), t \geq 0)$ est un mouvement Brownien standard. Pour $n \geq 1$, notons $U_n(\infty, \cdot)$ l'état d'équilibre du processus U_n . Alors $(U_n(\infty, \cdot))_{n \geq 1}$ converge étroitement dans $\mathcal{M}^\pm(\mathbb{R})$ vers la mesure signée $\xi_\infty x \rho(x) dx$, où ξ_∞ est une variable aléatoire de loi

$$\left(\frac{4\mu_4}{3}\right)^{1/4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{\mu_4 s^4}{12}\right) ds.$$

Enfin

$$\frac{1}{\sigma^2 n^{3/4}} \sum_{j=1}^n X_n^j(\infty) = \frac{1}{\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} x U_n(\infty, dx) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \xi_\infty.$$

Cette dernière convergence, si elle est vraie, est cohérente avec le théorème 1.5 puisque $(X_n^1(\infty), \dots, X_n^n(\infty))$ a pour loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$ pour tout $n \geq 1$.

37 Un modèle d'Ising Curie-Weiss dynamique de SOC : le cas Gaussien

a) Préliminaires

Soit $\sigma^2 > 0$. Dans ce paragraphe, nous allons examiner le cas où $\varphi(x) = -x^2/(4\sigma^2)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. La mesure ρ est alors la loi Gaussienne centrée de variance σ^2 .

Donnons-nous $n \geq 1$. Nous supposons dans la suite que $X_n^1(0), \dots, X_n^n(0)$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi ρ . D'après le théorème XII.2, il existe une unique solution forte $((X_n^1(t), \dots, X_n^n(t)), t \geq 0)$ au système d'équations différentielles (Σ_n)

$$dX_n^j(t) = -\frac{1}{2\sigma^2} X_n^j(t) dt + dB_j(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{S_n[X_n(t)]}{T_n[X_n(t)] + 1} - X_n^j(t) \left(\frac{S_n[X_n(t)]}{T_n[X_n(t)] + 1} \right)^2 \right) dt, \\ j \in \{1, \dots, n\},$$

de condition initiale $X_n(0)$ de loi donnée, avec (B_1, \dots, B_n) un mouvement Brownien standard n -dimensionnel et

$$\forall t \geq 0 \quad X_n(t) = (X_n^1(t), \dots, X_n^n(t)).$$

Remarquons qu'il s'agit de n processus d'Ornstein-Uhlenbeck auxquels nous rajoutons une auto-interaction.

Le noyau de l'opérateur \mathcal{L} , défini au théorème XII.5, est engendré par la fonction constante égale à 1 et par la fonction Φ_0 qui est, dans ce cas, la fonction identité. Nous la notons \mathbf{z} , comme dans les paragraphes précédents. Nous avons

$$\forall t \geq 0 \quad \langle \Phi_0, U_n(t, \cdot) \rangle = \langle \mathbf{z}, U_n(t, \cdot) \rangle = \frac{1}{n^{3/4}} \sum_{i=1}^n X_n^i(\sqrt{nt}) = \frac{S_n(\sqrt{nt})}{n^{3/4}},$$

où

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad S_n(t) = X_n^1(t) + \dots + X_n^n(t).$$

Dans ce cas précis, nous allons pouvoir déterminer les fluctuations du processus $(S_n(t), t \geq 0)$, qui n'est pas un processus de Markov. D'après le théorème XII.1, $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$ est l'unique mesure invariante du processus de Markov $(X_n(t), t \geq 0)$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}} |\mathbb{P}(X_n(t) \in A \mid X_n(0) = x) - \tilde{\mu}_{n,\rho}^*(A)| = 0.$$

Nous en déduisons que, pour tout $n \geq 1$,

$$S_n(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} S_n(\infty),$$

où $S_n(\infty) = X_n^1 + \dots + X_n^n$ avec (X_n^1, \dots, X_n^n) de loi $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$. Enfin, d'après le théorème I.5¹, nous avons

$$\frac{S_n(\infty)}{n^{3/4}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{s^4}{4\sigma^4}\right) ds.$$

b) Générateur de $S_n(\sqrt{n} \cdot)$ et perturbations

Soit $f \in C^2(\mathbb{R})$. Comme nous l'avons vu dans le paragraphe 36.e), nous souhaitons déterminer des fonctions H_f et K_f sur \mathbb{R}^n telles que $G_2 f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + G_1 H_f = 0$ et

$$G_3 f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + G_2 H_f + G_1 K_f = G_\infty f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle),$$

où G_∞ est le générateur du processus de Markov limite (à déterminer aussi). Dans ce cas, si nous posons,

$$F_{n,f} = f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + \frac{1}{n^{1/4}} H_f + \frac{1}{\sqrt{n}} K_f,$$

alors

$$\sqrt{n} L_n F_{n,f} = G_\infty f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + \tilde{R}_{n,f},$$

où $\tilde{R}_{n,f}$ est un terme de reste. La construction de H_f et K_f repose essentiellement sur la possibilité d'inverser l'opérateur G_1 . Nous avons $\langle \Phi'_0, \nu_n \rangle = \langle 1, \nu_n \rangle = 0$ donc

$$G_2 f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) = -\frac{1}{2\sigma^4} f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle.$$

Nous avons vu (sous réserve que tout est bien défini) qu'il faut poser

$$H_f = -G_1^{-1} G_2 f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) = \int_0^{+\infty} \frac{-1}{2\sigma^4} f'(\langle T_t \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle T_t \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle T_t \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle dt,$$

où $(T_t, t \geq 0)$ est le semi-groupe engendré par \mathcal{L} . Nous allons définir cela correctement. Commençons par remarquer que $T_t \mathbf{z} = \mathbf{z}$ puisque $\mathcal{L} \mathbf{z} = 0$, si bien qu'il nous reste à définir $T_t \mathbf{z}^2$. Nous avons

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} \quad \mathcal{L} \mathbf{z}^2(x) &= \frac{1}{2} (\mathbf{z}^2)''(x) + \varphi'(x) (\mathbf{z}^2)'(x) + \frac{x}{2\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} (\mathbf{z}^2)'(y) \rho(y) dy \\ &= 1 - \frac{x}{2\sigma^2} 2x + \frac{x}{2\sigma^2} \int_{\mathbb{R}} 2y \rho(y) dy = 1 - \frac{x^2}{\sigma^2}. \end{aligned}$$

Une récurrence simple nous assure que

$$\forall k \geq 1 \quad \mathcal{L}^k \mathbf{z}^2 = \left(\frac{-1}{\sigma^2}\right)^k (\mathbf{z}^2 - \sigma^2).$$

La théorie des semi-groupes (cf. le chapitre 1 de [27]) nous suggère de poser

$$\begin{aligned} \forall t \geq 0 \quad T_t \mathbf{z}^2 &= \mathbf{z}^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k!} \mathcal{L}^k \mathbf{z}^2 = \mathbf{z}^2 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{-t}{\sigma^2}\right)^k (\mathbf{z}^2 - \sigma^2) \\ &= \mathbf{z}^2 + (\mathbf{z}^2 - \sigma^2) (e^{-t/\sigma^2} - 1) = \sigma^2 + (\mathbf{z}^2 - \sigma^2) e^{-t/\sigma^2}. \end{aligned}$$

1. Ce résultat peut se montrer plus simplement en adaptant au modèle alternatif la preuve du cas Gaussien (cf. chapitre II) du modèle d'Ising Curie-Weiss de criticalité auto-organisée.

Ainsi $\langle T_t \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle = e^{-t/\sigma^2} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle$ pour tout $t \geq 0$ et donc

$$H_f = -\frac{1}{2\sigma^4} f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \int_0^{+\infty} \langle T_t \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle dt = -\frac{1}{2\sigma^2} f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle.$$

Il s'agit bien sûr d'une construction formelle. Vérifions donc que $G_2 f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + G_1 H_f = 0$:

$$\begin{aligned} G_1 H_f &= -\frac{1}{2\sigma^2} \left(f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathcal{L} \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle + f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathcal{L} \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle \right. \\ &\quad \left. + f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathcal{L} \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle \right) = -\frac{1}{2\sigma^2} \left(0 + 0 + f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle 1 - \mathbf{z}^2 / \sigma^2, \nu_n \rangle \right) \\ &= \frac{1}{2\sigma^4} f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle = -G_2 f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle). \end{aligned}$$

Nous avons donc défini H_f . Définissons à présent K_f et G_∞ . Pour cela commençons par calculer $G_2 H_f$:

$$G_2 H_f = -\frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{2\sigma^2} \left(f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right) \mathcal{K}_n(\mathbf{z}) - \frac{1}{2\sigma^2} f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \mathcal{K}_n(\mathbf{z}^2),$$

où

$$\mathcal{K}_n(\mathbf{z}) = \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{2\sigma^4} \left(\sigma^2 \langle \mathbf{z}', \nu_n \rangle - \langle \mathbf{z}', \rho \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle - \langle \mathbf{z} \mathbf{z}', \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right) = -\frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{2\sigma^4} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle,$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_n(\mathbf{z}^2) &= \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{2\sigma^4} \left(\sigma^2 \langle (\mathbf{z}^2)', \nu_n \rangle - \langle (\mathbf{z}^2)', \rho \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle - \langle \mathbf{z} (\mathbf{z}^2)', \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right) \\ &= \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{2\sigma^4} \left(2\sigma^2 \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle - 0 - 2 \langle \mathbf{z}^2, \rho \rangle \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right) = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$G_2 H_f = \frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2 \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{4\sigma^6} \left(f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right).$$

Nous souhaitons donc que K_f et G_∞ soient tels que

$$\begin{aligned} G_\infty f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) - G_1 K_f &= G_3 f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + G_2 H_f \\ &= \frac{1}{2} f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \left(\frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2}{\sigma^6} - 0 - \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^2}{\sigma^4} + 0 \right) + \frac{1}{2} f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \\ &\quad + \frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2 \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{4\sigma^6} \left(f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right) \\ &= \underbrace{\frac{1}{2} f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) - \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^3}{2\sigma^4} f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle)}_{\in \text{Ker } G_1} + \underbrace{\frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2 \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{4\sigma^6} \left(3f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right)}_{\in \text{Im } G_1}, \end{aligned}$$

le terme de droite étant dans l'image de G_1 , pour les mêmes raisons que H_f (cf. ci-dessus). Nous sommes donc amenés à poser (formellement)

$$\begin{aligned} K_f &= -G_1^{-1} \left(\frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2 \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{4\sigma^6} \left(3f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right) \right) \\ &= \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{4\sigma^6} \left(3f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right) \int_0^{+\infty} \langle T_t \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2 dt \\ &= \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{4\sigma^6} \left(3f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right) \int_0^{+\infty} e^{-2t/\sigma^2} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2 dt \\ &= \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2}{8\sigma^4} \left(3f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \right). \end{aligned}$$

Posons $\Psi_f : x \mapsto 3xf'(x) + x^2f''(x)$. Nous vérifions que

$$\begin{aligned} G_1K_f &= G_1 \left(\frac{\Psi_f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2}{8\sigma^4} \right) = \frac{\Psi'_f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathcal{L}\mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2}{8\sigma^4} \\ &+ \frac{\Psi_f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle \langle \mathcal{L}\mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{4\sigma^4} = 0 + \frac{\Psi_f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle \langle 1 - \mathbf{z}^2/\sigma^2, \nu_n \rangle}{4\sigma^4} \\ &= -\frac{\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2 \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{4\sigma^6} (3f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle). \end{aligned}$$

Nous définissons alors G_∞ sur $C^2(\mathbb{R})$ par

$$\forall f \in C^2(\mathbb{R}) \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad G_\infty f(x) = \frac{1}{2}f''(x) - \frac{x^3}{2\sigma^4}f'(x).$$

Nous terminons en remarquant que, pour que les calculs de $(G_3 + R_n)H_f$ et de $(G_2 + G_3 + R_n)K_f$ soient possibles, il faut que f' et f'' soient de classe C^2 sur \mathbb{R} . Nous résumons l'étude dans la proposition suivante :

Proposition XII.7. *Soient $n \geq 1$ et $f \in C^4(\mathbb{R})$. Nous posons*

$$F_{n,f} = f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + \frac{1}{n^{1/4}}H_f + \frac{1}{\sqrt{n}}K_f,$$

avec

$$\begin{aligned} H_f &= -\frac{1}{2\sigma^2}f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle, \\ K_f &= \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2}{8\sigma^4} (3f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\sqrt{n}L_n F_{n,f} = G_\infty f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + \tilde{R}_{n,f},$$

où

$$\tilde{R}_{n,f} = R_n f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + \frac{1}{n^{1/4}}(G_3 H_f + R_n H_f + G_2 K_f) + \frac{1}{\sqrt{n}}(G_3 K_f + R_n K_f).$$

Nous terminons ce paragraphe en examinant la convergence de $\tilde{R}_{n,f}$. Pour cela, regardons l'effet de G_2 , G_3 et R_n sur une fonction du type $\Psi(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle)$, avec Ψ de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 . Nous calculons que

$$G_2 \Psi(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) = -\frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{4\sigma^4} \frac{\partial \Psi}{\partial x}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle),$$

$$\begin{aligned} G_3 \Psi(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) &= \frac{1}{2\sigma^6} \frac{\partial \Psi}{\partial x}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle (\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2 - \sigma^2 \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^2) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) + 2\sigma^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_n \Psi(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) &= \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial x}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) R_n^{(0)}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle, 0, 1, \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, 0) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial \Psi}{\partial y}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) R_n^{(0)}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle, 2\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, 0, 2\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle, 2\sigma^2) \\ &+ \frac{1}{n^{1/4}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial y}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle + \frac{2}{n^{1/4}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle. \end{aligned}$$

Remarquons ensuite que $H_f = \Psi_f^H(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle)$ et $K_f = \Psi_f^K(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle)$, où Ψ_f^H et Ψ_f^K sont définies sur \mathbb{R}^2 par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \Psi_f^H(x, y) = -\frac{xyf'(x)}{2\sigma^2} \quad \text{et} \quad \Psi_f^K(x, y) = \frac{xy^2}{8\sigma^4}(3f'(x) + xf''(x)).$$

Puisque f est de classe C^4 sur \mathbb{R} , il s'ensuit que les fonctions Ψ_f^H , Ψ_f^K , ainsi que leurs dérivées partielles premières et secondes, sont bornées sur tout compact de \mathbb{R}^2 . Rappelons enfin que $(R_n^{(0)})_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions sur \mathbb{R}^6 qui converge vers 0 uniformément sur tout compact. Nous en déduisons le lemme suivant :

Lemme XII.8. *Pour tous $f \in C^4(\mathbb{R})$ et $n \geq 1$, il existe une fonction $\Psi_{n,f}$ continue sur \mathbb{R}^2 telle que $\tilde{R}_{n,f} = \Psi_{n,f}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle)$. De plus*

$$\forall k > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \|(u,v)\| \leq k} |\Psi_{n,f}(u, v)| = 0.$$

c) Théorème de fluctuations

Nous avons vu à la proposition XII.7 que, si $n \geq 1$ et $f \in C^4(\mathbb{R})$, alors

$$\sqrt{n}L_n F_{n,f} = \frac{1}{2}f''(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) - \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^3}{2\sigma^4}f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + \tilde{R}_{n,f},$$

où $F_{n,f} = f(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + n^{-1/4}H_f + n^{-1/2}K_f$ et $\tilde{R}_{n,f}$ est un terme de reste. Cette convergence de générateur nous amène à énoncer le théorème de fluctuations :

Théorème XII.9. *Supposons que, pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires $X_n^1(0), \dots, X_n^n(0)$ sont indépendantes et de même loi $\rho = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ¹. Notons $(\mathcal{U}(t), t \geq 0)$ l'unique solution forte de l'équation différentielle stochastique*

$$dz(t) = -\frac{z^3(t)}{2\sigma^4} dt + dB(t), \quad z(0) = 0,$$

avec $(B(t), t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard sur \mathbb{R} . Alors, pour tout $T > 0$,

$$\left(\frac{S_n(\sqrt{nt})}{n^{3/4}}, 0 \leq t \leq T \right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} (\mathcal{U}(t), 0 \leq t \leq T),$$

pour la convergence en loi dans $C([0, T], \mathbb{R})$.

Remarquons que, d'après le théorème XII.1, l'équation différentielle stochastique du théorème admet une unique solution forte dont l'unique distribution invariante est

$$\frac{\sqrt{2}}{\sigma} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \exp\left(-\frac{s^4}{4\sigma^4}\right) ds.$$

D'après le théorème XII.1, il s'agit donc de l'unique mesure invariante du processus de Markov $(\mathcal{U}(t), t \geq 0)$ et

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}} \left| \mathbb{P}(\mathcal{U}(t) \in A) - \frac{\sqrt{2}}{\sigma} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} \int_A \exp\left(-\frac{s^4}{4\sigma^4}\right) ds \right| = 0.$$

Cette convergence, combinée à la convergence en loi du théorème et à celles obtenues à la fin du paragraphe 37.a), nous permet de compléter le diagramme commutatif de convergences en loi présenté au paragraphe 5.b).

1. Les variables aléatoires $X_n^1(0), \dots, X_n^n(0)$ sont indépendantes et de même loi $\rho = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ donc

$$\frac{S_n(0)}{n^{3/4}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} 0 = \mathcal{U}(0).$$

d) Effondrement de processus

Pour montrer le théorème XII.9, nous aurons besoin de la notion suivante :

Définition XII.10. Une suite de processus stochastiques $(\xi_n(t), t \geq 0)_{n \geq 1}$ s'effondre vers 0 si

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \forall T > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_n(t)| > \varepsilon \right) = 0.$$

La notion de processus s'effondrant vers 0 (*collapsing processes* en anglais) a été développée par Comets et Eisele dans [18].

Proposition XII.11. Soit $(\xi_n(t), t \geq 0)_{n \geq 1}$ une suite de semi-martingales positives sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Pour tout $n \geq 1$, donnons-nous un entier $m_n \geq 1$ et $(B_i)_{1 \leq i \leq m_n}$ des mouvements Browniens standards indépendants qui génèrent une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$. Nous supposons qu'il existe des processus $(\zeta_n(t), t \geq 0)$ et $(Z_{n,i}(t), t \geq 0)_{1 \leq i \leq m_n}$ adaptés à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ et tels que

$$d\xi_n(t) = \zeta_n(t)dt + \sum_{i=1}^{m_n} Z_{n,i}(t)dB_i(t).$$

Nous supposons aussi qu'il existe $d > 1$, des constantes positives C_1, \dots, C_5 , des suites de réels $(\kappa_n)_{n \geq 1}$, $(\alpha_n)_{n \geq 1}$, $(\beta_n)_{n \geq 1}$ strictement croissantes et une suite de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n \geq 1}$ vérifiant

$$\kappa_n^{\frac{1}{d}} \alpha_n^{-1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \kappa_n^{-1} \alpha_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad \kappa_n^{-1} \beta_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad (1)$$

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{E} \left[\left(\xi_n(0) \right)^d \right] \leq C_1 \alpha_n^{-d}, \quad (2)$$

$$\forall n \geq 1 \quad \forall t \in [0, \tau_n] \quad \zeta_n(t) \leq -\kappa_n C_2 \xi_n(t) + \beta_n C_3 + C_4 \quad (3)$$

et

$$\forall n \geq 1 \quad \forall t \in [0, \tau_n] \quad \sum_{i=1}^{m_n} Z_{n,i}(t)^2 \leq C_5. \quad (4)$$

Alors, pour tous $\varepsilon > 0$ et $T > 0$, il existe $M > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que

$$\sup_{n \geq n_0} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n} \xi_n(t) > M \left(\kappa_n^{\frac{1}{d}} \alpha_n^{-1} \vee \alpha_n \kappa_n^{-1} \right) \right) \leq \varepsilon.$$

Cette proposition est énoncée au chapitre 4 de [17]. Il s'agit d'une simple adaptation de la proposition de l'annexe A de [18].

e) Preuve du théorème XII.9

Soit $n \geq 1$. Dans ce paragraphe, nous notons simplement $U_n(t)$ au lieu de $U_n(t, \cdot)$ pour tout $t \geq 0$. Rappelons que

$$\forall x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \quad \nu_n(x) = n^{1/4} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \delta_{x_j} - \rho \right).$$

Ainsi, avec les notations du paragraphe 37.b), pour tout $x \in \mathbb{R}^n$,

$$F_{n,f}(x) = f \left(\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{j=1}^n x_j \right) + \left(\frac{1}{n^{1/4}} \Psi_f^H + \frac{1}{n^{1/2}} \Psi_f^K \right) \left(\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{j=1}^n x_j, \frac{1}{n^{3/4}} \sum_{j=1}^n x_j^2 - n^{1/4} \sigma^2 \right).$$

Remarquons aussi que

$$\forall t \geq 0 \quad U_n(t) = \nu_n(X_n(\sqrt{nt})) \quad \text{et} \quad \frac{S_n(\sqrt{nt})}{n^{3/4}} = \langle \mathbf{z}, \nu_n(X_n(\sqrt{nt})) \rangle.$$

Donnons-nous $f \in C^4(\mathbb{R})$. Nous avons

$$\forall t \geq 0 \quad f\left(\frac{S_n(\sqrt{nt})}{n^{3/4}}\right) = f(\langle \mathbf{z}, U_n(t) \rangle) = \left(F_{n,f} - \frac{1}{n^{1/4}}H_f - \frac{1}{\sqrt{n}}K_f\right)(X_n(\sqrt{nt})).$$

Etape 1 : vers un problème de martingale.

Nous définissons le processus $(\mathcal{M}_{n,f}(t), t \geq 0)$ par

$$\forall t \geq 0 \quad \mathcal{M}_{n,f}(t) = n^{1/4} \sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{\partial F_{n,f}}{\partial x_j}(X_n(\sqrt{ns})) dB_j(s).$$

Il s'agit d'une martingale locale (cf. théorème 5.5 de [43]). En appliquant la formule d'Itô (théorème 5.8 de [43]) au processus $(X_n(\sqrt{nt}), t \geq 0)$, nous obtenons

$$\forall t \geq 0 \quad \mathcal{M}_{n,f}(t) = F_{n,f}(X_n(\sqrt{nt})) - F_{n,f}(X_n(0)) - \int_0^t \sqrt{n}L_n F_{n,f}(X_n(\sqrt{ns})) ds.$$

Nous avons

$$\forall t \geq 0 \quad \langle \mathcal{M}_{n,f}, \mathcal{M}_{n,f} \rangle_t = \sqrt{n} \sum_{j=1}^n \int_0^t \left(\frac{\partial F_{n,f}}{\partial x_j}\right)^2(X_n(\sqrt{ns})) ds.$$

Pour tout $k > 0$, nous introduisons le temps d'arrêt τ_n^k défini par

$$\tau_n^k = \inf_{t \geq 0} \left\{ |\langle \mathbf{z}, U_n(t) \rangle| \geq k \quad \text{ou} \quad |\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle| \geq k \right\}.$$

Donnons-nous $T > 0$. Nous notons $\mathcal{M}_{n,f}^k(t) = \mathcal{M}_{n,f}(t \wedge \tau_n^k \wedge T)$ pour tout $t \geq 0$.

Lemme XII.12. *Pour tous $k \geq 1$, $n \geq 1$ et $f \in C^4(\mathbb{R})$, le processus $\mathcal{M}_{n,f}^k$ est une martingale bornée dans L^2 . De plus*

$$\forall t \geq 0 \quad \sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \left(\mathcal{M}_{n,f}^k(t)^2 \right) < +\infty.$$

Démonstration. Pour tout $t \geq 0$, nous avons

$$\langle \mathcal{M}_{n,f}^k, \mathcal{M}_{n,f}^k \rangle_t = \langle \mathcal{M}_{n,f}, \mathcal{M}_{n,f} \rangle_{t \wedge \tau_n^k \wedge T} = \sqrt{n} \sum_{j=1}^n \int_0^{t \wedge \tau_n^k \wedge T} \left(\frac{\partial F_{n,f}}{\partial x_j}\right)^2(X_n(\sqrt{ns})) ds.$$

De plus, pour tous $i \in \{1, \dots, n\}$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{n,f}}{\partial x_i}(x) &= \frac{1}{n^{3/4}} f' \left(\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{j=1}^n x_j \right) \\ &+ \frac{1}{n^{3/4}} \left(\frac{1}{n^{1/4}} \frac{\partial \Psi_f^H}{\partial x} + \frac{1}{n^{1/2}} \frac{\partial \Psi_f^K}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{j=1}^n x_j, \frac{1}{n^{3/4}} \sum_{j=1}^n x_j^2 - n^{1/4} \sigma^2 \right) \\ &+ \frac{2x_i}{n^{3/4}} \left(\frac{1}{n^{1/4}} \frac{\partial \Psi_f^H}{\partial y} + \frac{1}{n^{1/2}} \frac{\partial \Psi_f^K}{\partial y} \right) \left(\frac{1}{n^{3/4}} \sum_{j=1}^n x_j, \frac{1}{n^{3/4}} \sum_{j=1}^n x_j^2 - n^{1/4} \sigma^2 \right). \end{aligned}$$

En prenant le carré de ces expressions puis en sommant sur tous les $i \in \{1, \dots, n\}$, nous obtenons

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_{n,f}}{\partial x_j} \right)^2 &= \frac{n}{n^{3/2}} \left(f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + \left[\frac{1}{n^{1/4}} \frac{\partial \Psi_f^H}{\partial x} + \frac{1}{n^{1/2}} \frac{\partial \Psi_f^K}{\partial x} \right] (\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right)^2 \\ &+ \frac{4}{n^{3/2}} (n^{3/4} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle + n\sigma^2) \left(\left[\frac{1}{n^{1/4}} \frac{\partial \Psi_f^H}{\partial y} + \frac{1}{n^{1/2}} \frac{\partial \Psi_f^K}{\partial y} \right] (\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right)^2 \\ &+ \frac{2n^{3/4} \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{n^{3/2}} \left(f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + \left[\frac{1}{n^{1/4}} \frac{\partial \Psi_f^H}{\partial x} + \frac{1}{n^{1/2}} \frac{\partial \Psi_f^K}{\partial x} \right] (\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right) \\ &\quad \times \left(\left[\frac{1}{n^{1/4}} \frac{\partial \Psi_f^H}{\partial y} + \frac{1}{n^{1/2}} \frac{\partial \Psi_f^K}{\partial y} \right] (\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right). \end{aligned}$$

Nous en déduisons qu'il existe une constante $C_f^k > 0$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $|\langle \mathbf{z}, \nu_n(x) \rangle| < k$ et $|\langle \mathbf{z}^2, \nu_n(x) \rangle| < k$, alors

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_{n,f}}{\partial x_j} \right)^2 \leq \frac{C_f^k}{\sqrt{n}}.$$

Nous en déduisons que, pour tout $t \geq 0$,

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \left(\langle \mathcal{M}_{n,f}^k, \mathcal{M}_{n,f}^k \rangle_t \right) \leq C_f^k T.$$

Ainsi, pour tout $n \geq 1$, le processus $\mathcal{M}_{n,f}^k$ est une martingale bornée dans L^2 (cf. théorème 4.8 de [43]) et

$$\forall t \geq 0 \quad \mathbb{E} \left(\mathcal{M}_{n,f}^k(t)^2 \right) = \mathbb{E} \left(\langle \mathcal{M}_{n,f}^k, \mathcal{M}_{n,f}^k \rangle_t \right) \leq C_f^k T.$$

Ceci termine la preuve du lemme. □

Etape 2 : étude du comportement asymptotique de $(\tau_n^k)_{n \geq 1}$.

Lemme XII.13. *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_\varepsilon \geq 1$ et $k_\varepsilon \geq 1$ tels que*

$$\sup_{n \geq n_\varepsilon} \mathbb{P} \left(\tau_n^{k_\varepsilon} \leq T \right) \leq \varepsilon.$$

De plus le processus $(\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle, t \geq 0)_{n \geq 1}$ s'effondre vers 0, c'est-à-dire

$$\forall \eta > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle| > \eta \right) = 0.$$

Démonstration. Donnons-nous $k, \varepsilon > 0$ et $n \geq 1$. Nous avons

$$\mathbb{P} \left(\tau_n^k \leq T \right) \leq \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^k} |\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle| \geq \frac{k}{2} \right) + \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^k} |\langle \mathbf{z}, U_n(t) \rangle| \geq \frac{k}{2} \right).$$

Nous notons $\mathbb{P}(A_n^k) + \mathbb{P}(B_n^k)$ la somme dans le membre de droite de cette inégalité.

Occupons-nous d'abord de la majoration de $\mathbb{P}(A_n^k)$. Pour cela nous allons appliquer la proposition XII.11 à la semi-martingale positive $(\xi_n(t), t \geq 0)_{n \geq 1}$ telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \forall t \geq 0 \quad \xi_n(t) = \langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle^2 = \langle \mathbf{z}^2, \nu_n(X_n(\sqrt{nt})) \rangle^2.$$

En appliquant la formule d'Itô au processus $(X_n(\sqrt{nt}), t \geq 0)$, nous obtenons

$$d\xi_n(t) = \sqrt{n}L_n(\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle^2) + n^{1/4} \sum_{i=1}^n \frac{4X_n^i(\sqrt{nt})}{n^{3/4}} \langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle dB_i(t).$$

Avec les notations de la proposition [XII.11](#), nous avons alors $\zeta_n(t) = \sqrt{n}L_n(\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle^2)$ et $Z_{n,i}(t) = 4n^{-1/2}X_n^i(\sqrt{nt}) \langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle$ pour tous $t \geq 0$, $n \geq 1$ et $i \in \{1, \dots, n\}$. Nous avons

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1 \quad \forall t \in [0, \tau_n^k] \quad \sum_{i=1}^n Z_{n,i}(t)^2 &= 16 \langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_n^i(\sqrt{nt})^2 \\ &= 16 \langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle^2 \left(\sigma^2 + \frac{\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle}{n^{1/4}} \right). \end{aligned}$$

Ainsi la condition (4) est vérifiée avec $C_5 = 16k^2(\sigma^2 + k)$. Ensuite, pour tout $n \geq 1$,

$$G_1(\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2) = 2 \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle \langle \mathcal{L}\mathbf{z}^2, \nu_n \rangle = 2 \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle \langle 1 - \mathbf{z}^2/\sigma^2, \nu_n \rangle = -\frac{2}{\sigma^2} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2.$$

A la fin du paragraphe [37.b](#)), nous avons vu l'action de G_2 , G_3 et R_n sur une fonction du type $\Psi(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle)$, avec Ψ de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 . En prenant $\Psi : (x, y) \mapsto y^2$, nous obtenons

$$G_2(\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2) = 0, \quad G_3(\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2) = 4\sigma^2,$$

$$\begin{aligned} R_n(\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2) &= \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle R_n^{(0)}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle, 2\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, 0, 2\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle, 2\sigma^2) + \frac{4}{n^{1/4}} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle \\ &= \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle \widehat{R}_n^{(0)}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) + \frac{4}{n^{1/4}} \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle, \end{aligned}$$

avec

$$\widehat{R}_n^{(0)}(x, y) = \frac{4x^2y^2}{\sigma^6n^{1/4}} + \frac{2x^2}{n^{1/4}}R_n^{(1)}(y) + 2x^2 \left(\frac{y}{n^{1/4}} + \sigma^2 \right) R_n^{(2)}(y),$$

où $R_n^{(1)}(y)$ et $R_n^{(2)}(y)$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$, uniformément en y appartenant à un compact de \mathbb{R} (cf. démonstration de la proposition [XII.5](#)). Ainsi

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \tau_n^k] \quad \zeta_n(t) &= (\sqrt{n}G_1 + n^{1/4}G_2 + G_3 + R_n)(\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2) \\ &= -\frac{2\sqrt{n}}{\sigma^2} \xi_n(t) + 4\sigma^2 + \sqrt{\xi_n(t)} \widehat{R}_n^{(0)}(\langle \mathbf{z}, U_n(t) \rangle, \sqrt{\xi_n(t)}) + \frac{4}{n^{1/4}} \sqrt{\xi_n(t)} \\ &= -\frac{2\sqrt{n}}{\sigma^2} \xi_n(t) + 4\sigma^2 + k \sup_{\|(x,y)\| \leq k} \left| \widehat{R}_n^{(0)}(x, y) \right| + \frac{4k}{n^{1/4}}. \end{aligned}$$

La condition (3) est donc vérifiée avec $\kappa_n = \sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$, $C_2 = 2/\sigma^2$,

$$C_4 = 4\sigma^2 + k \sup_{n \geq 1} \sup_{\|(x,y)\| \leq k} \left| \widehat{R}_n^{(0)}(x, y) \right| + 4k < +\infty$$

et $C_3, (\beta_n)_{n \geq 1}$ pouvant être choisies arbitrairement. Nous prenons $(\beta_n)_{n \geq 1}$ telle que β_n/κ_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

Examinons la condition (2) : nous posons $Y_n^i = (X_n^i(0))^2 - \sigma^2$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$. Puisque $X_n^1(0), \dots, X_n^n(0)$ sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, il s'ensuit que Y_n^1, \dots, Y_n^n sont indépendantes, identiquement distribuées, centrées et admettant des moments de tout ordre. Le théorème 2 de [\[11\]](#) nous assure alors que, pour tout $v \geq 2$, il existe $K_v > 0$ tel que

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{E} \left(\left| Y_n^1 + \dots + Y_n^n \right|^v \right) \leq K_v n^{v/2}.$$

Ainsi, pour tout $d > 1$,

$$\forall n \geq 1 \quad \mathbb{E} \left[\left(\xi_n(0) \right)^d \right] = \mathbb{E} \left[\left(\frac{1}{n^{3/4}} \left(Y_n^1 + \dots + Y_n^n \right) \right)^{2d} \right] \leq K_{2d} \frac{n^{v/2}}{n^{3d/2}} = K_{2d} n^{-d/2}.$$

La condition (2) est alors vérifiée pour tout $d > 1$ (avec $C_1 = K_{2d}$) et $\alpha_n \leq \sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$. Afin que la condition (1) soit satisfaite, nous prenons $d > 2$ et $\alpha_n = n^{1/4}$ pour tout $n \geq 1$. Nous avons

$$\kappa_n^{\frac{1}{d}} \alpha_n^{-1} \vee \alpha_n \kappa_n^{-1} = n^{1/(2d)-1/4} \vee n^{-1/4} = n^{1/(2d)-1/4}.$$

Ainsi la proposition XII.11 nous assure qu'il existe $M > 0$ et $n_1 \geq 1$ tels que

$$\sup_{n \geq n_1} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^k} |\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle|^2 > Mn^{1/(2d)-1/4} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}. \quad (*)$$

Nous pouvons augmenter la valeur de n_1 pour que

$$\sup_{n \geq n_1} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^k} |\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle| > \frac{k}{2} \right) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Regardons maintenant le terme $\mathbb{P}(B_n^k)$. Dans la suite de la démonstration, nous supposons que f désigne la fonction $x \mapsto x^2$. Nous avons alors

$$\forall n \geq 1 \quad \langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^2 = F_{n,f} + \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^2 \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{n^{1/4} \sigma^2} - \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^2 \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle^2}{\sqrt{n} \sigma^4}.$$

Nous en déduisons que, pour n assez grand,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_n^k) &= \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^k} |\langle \mathbf{z}, U_n(t) \rangle|^2 > \frac{k^2}{4} \right) \leq \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^k} F_{n,f}(X_n(\sqrt{nt})) > \frac{k^2}{8} \right) \\ &\leq \mathbb{P} \left(F_{n,f}(X_n(0)) > \frac{k^2}{24} \right) + \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^k} \sqrt{n} L_n F_{n,f}(X_n(\sqrt{nt})) > \frac{k^2}{24T} \right) \\ &\quad + \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^k} \mathcal{M}_{n,f}(t) > \frac{k^2}{24} \right). \end{aligned}$$

Pour tout $n \geq 1$, les variables aléatoires $X_n^1(0), \dots, X_n^n(0)$ sont indépendantes et de même loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$ donc le théorème central limite entraîne que $(\langle \mathbf{z}, U_n(0) \rangle)_{n \geq 1}$ et $(\langle \mathbf{z}^2, U_n(0) \rangle)_{n \geq 1}$ convergent en loi vers 0. Nous en déduisons que, pour n assez grand,

$$\mathbb{P} \left(F_{n,f}(X_n(0)) > \frac{k^2}{24} \right) \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Ensuite, puisque f est la fonction carrée, la proposition XII.7 donne

$$\sqrt{n} L_n F_{n,f} = 1 - \frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^4}{\sigma^4} + \tilde{R}_{n,f} \leq 1 + |\tilde{R}_{n,f}|.$$

D'après le lemme XII.8, nous avons $\tilde{R}_{n,f} = \Psi_{n,f}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle)$ avec

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|(u,v)\| \leq k} |\Psi_{n,f}(u,v)| = 0.$$

Si nous prenons $k > \sqrt{24T}$ et n assez grand, alors

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^k} \sqrt{n} L_n F_{n,f}(X_n(\sqrt{nt})) > \frac{k^2}{24T} \right) \leq \mathbb{P} \left(1 + \sup_{\|(u,v)\| \leq k} |\Psi_{n,f}(u,v)| > \frac{k^2}{24T} \right) \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Enfin, d'après le lemme XII.12, $\mathcal{M}_{n,f}^k$ est une martingale donc l'inégalité maximale de Doob entraîne que

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^k} \mathcal{M}_{n,f}(t) > \frac{k^2}{24} \right) \leq \frac{\mathbb{E} \left(\mathcal{M}_{n,f}^k(T)^2 \right)}{(k^2/24)^2}.$$

Le lemme XII.12 nous assure aussi que $(\mathbb{E}(\mathcal{M}_{n,f}^k(T)^2))_{n \geq 1}$ est une suite bornée. Ainsi, pour k assez grand,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^k} \mathcal{M}_{n,f}(t) > \frac{k^2}{24} \right) \leq \frac{\varepsilon}{6}.$$

Nous en déduisons qu'il existe $n_2 \geq 1$ et $k_\varepsilon \geq 1$ tels que $\mathbb{P}(B_n^{k_\varepsilon}) \leq \varepsilon/2$ pour tout $n \geq n_2$. Posons alors $n_\varepsilon = n_1 \vee n_2$. Nous avons montré que

$$\forall n \geq n_\varepsilon \quad \mathbb{P} \left(\tau_n^{k_\varepsilon} \leq T \right) \leq \mathbb{P}(A_n^{k_\varepsilon}) + \mathbb{P}(B_n^{k_\varepsilon}) \leq \varepsilon.$$

Montrons la deuxième assertion du lemme : pour tout $\eta > 0$, nous avons

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle| > \eta \right) \leq \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^{k_\varepsilon}} |\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle|^2 > \eta^2 \right) + \mathbb{P} \left(\tau_n^{k_\varepsilon} \leq T \right).$$

D'après (*), pour n assez grand,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle| > \eta \right) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \mathbb{P} \left(\tau_n^{k_\varepsilon} \leq T \right) \leq \frac{3\varepsilon}{2}.$$

En faisant tendre ε vers 0, nous obtenons que $(\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle, t \geq 0)_{n \geq 1}$ s'effondre vers 0. Ceci termine la démonstration du lemme. \square

Etape 3 : tension de $(S_n(\sqrt{n} \cdot)/n^{3/4})_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$.

Puisque $(X_n(t), 0 \leq t \leq T)$, $n \geq 1$, et le processus limite $(\mathcal{U}(t), 0 \leq t \leq T)$ appartiennent à $C([0, T], \mathbb{R})$, il suffit de montrer que la suite $(S_n(\sqrt{nt})/n^{3/4}, 0 \leq t \leq T)_{n \geq 1}$ est relativement compacte pour la convergence faible dans $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$, qui est un espace polonais¹ (cf. théorème 12.2 de [8]). Le théorème de Prohorov (théorème 5.1 de [8]) nous assure alors qu'il suffit de montrer que $(S_n(\sqrt{nt})/n^{3/4}, 0 \leq t \leq T)_{n \geq 1}$ est une suite tendue. Comme dans [18] et [17], nous utilisons le critère de tension suivant :

Proposition XII.14. *Une suite $(\xi_n(t), 0 \leq t \leq T)_{n \geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$ si*

(a) *pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $M > 0$ tel que*

$$\sup_{n \geq 1} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\xi_n(t)| \geq M \right) \leq \varepsilon,$$

(b) *pour tous $\varepsilon > 0$ et $\eta > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que*

$$\sup_{n \geq 1} \sup_{\substack{\tau_1, \tau_2 \in \mathcal{T}_n \\ 0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq (\tau_1 + \delta) \wedge T}} \mathbb{P} \left(|\xi_n(\tau_2) - \xi_n(\tau_1)| \geq \eta \right) \leq \varepsilon,$$

où, pour tout $n \geq 1$, \mathcal{T}_n désigne l'ensemble des temps d'arrêts adaptés à la filtration canonique du processus ξ_n .

1. Un espace polonais est un espace séparable pouvant être muni d'une distance le rendant complet.

Lemme XII.15. *La suite*

$$\left(\frac{S_n(\sqrt{nt})}{n^{3/4}}, 0 \leq t \leq T \right)_{n \geq 1}$$

est relativement compacte pour la convergence faible dans $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$.

Démonstration. Il suffit de s'assurer que $(S_n(\sqrt{nt})/n^{3/4}, 0 \leq t \leq T)_{n \geq 1}$ vérifie les conditions (a) et (b) de la proposition XII.14. Dans la preuve du lemme XII.13, nous avons vu que, pour tout $\alpha > 0$, il existe $k_\alpha > 0$ et $n_\alpha \geq 1$ tels que

$$\sup_{n \geq n_\alpha} \mathbb{P} \left(\tau_n^{k_\alpha} \leq T \right) \leq \alpha$$

et, pour tout $n \geq n_\alpha$,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^{k_\alpha}} \left| \frac{S_n(\sqrt{nt})}{n^{3/4}} \right| > \frac{k_\alpha}{2} \right) = \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^{k_\alpha}} |\langle \mathbf{z}, U_n(t) \rangle| > \frac{k_\alpha}{2} \right) \leq \frac{\alpha}{2}.$$

Donnons-nous $\varepsilon > 0$ et posons $\alpha = 2\varepsilon/3$. Nous en déduisons que, pour tout $n \geq n_\alpha$,

$$\mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left| \frac{S_n(\sqrt{nt})}{n^{3/4}} \right| > \frac{k_\alpha}{2} \right) \leq \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T \wedge \tau_n^{k_\alpha}} \left| \frac{S_n(\sqrt{nt})}{n^{3/4}} \right| > \frac{k_\alpha}{2} \right) + \mathbb{P} \left(\tau_n^{k_\alpha} \leq T \right) \leq \frac{3\alpha}{2} = \varepsilon.$$

La condition (a) est ainsi vérifiée.

Montrons maintenant le point (b) : donnons-nous $n \geq 1$ et $\varepsilon, \eta, \delta > 0$. Soient τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêts adaptés à la filtration canonique de $S_n(\sqrt{n} \cdot)/n^{3/4}$ et tels que $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq (\tau_1 + \delta) \wedge T$. Nous notons $\alpha = 2\varepsilon/3$ et nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n(\sqrt{n}\tau_2)}{n^{3/4}} - \frac{S_n(\sqrt{n}\tau_1)}{n^{3/4}} \right| \geq \eta \right) \\ \leq \mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n(\sqrt{n}(\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))}{n^{3/4}} - \frac{S_n(\sqrt{n}(\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))}{n^{3/4}} \right| \geq \eta \right) + \mathbb{P} \left(\tau_n^{k_\alpha} \leq T \right) \\ \leq \frac{1}{\eta} \mathbb{E} \left(\left| \frac{S_n(\sqrt{n}(\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))}{n^{3/4}} - \frac{S_n(\sqrt{n}(\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))}{n^{3/4}} \right| \right) + \alpha, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé l'inégalité de Markov. Dans la suite de la démonstration, nous supposons que f est la fonction identité. Nous avons

$$\begin{aligned} \left| \frac{S_n(\sqrt{n}(\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))}{n^{3/4}} - \frac{S_n(\sqrt{n}(\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))}{n^{3/4}} \right| \\ \leq \frac{1}{n^{1/4}} \left| H_f(X_n(\sqrt{n}(\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))) - H_f(X_n(\sqrt{n}(\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))) \right| \\ + \frac{1}{\sqrt{n}} \left| K_f(X_n(\sqrt{n}(\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))) - K_f(X_n(\sqrt{n}(\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))) \right| \\ + \int_{\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}}^{\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}} |\sqrt{n} L_n F_{n,f}(X_n(\sqrt{n}u))| du + \left| \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_2) - \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_1) \right|. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left(\left| \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_2) - \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_1) \right| \right)^2 &\leq \mathbb{E} \left(\left(\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_2) - \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_1) \right)^2 \right) \\ &= \mathbb{E} \left(\mathbb{E} \left[\left(\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_2) - \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_1) \right)^2 \middle| \mathcal{G}_{\tau_1}^n \right] \right), \end{aligned}$$

où $\mathcal{G}_t^n = \sigma(\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(s), 0 \leq s \leq t)$ pour tout $t \geq 0$. D'après le lemme XII.12, $\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}$ est une martingale bornée dans L^2 donc elle est uniformément intégrable. Le théorème d'arrêt (théorème 3.16 de [43]) nous assure que

$$\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_1) = \mathbb{E} \left[\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_2) \middle| \mathcal{G}_{\tau_1}^n \right].$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\left(\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_2) - \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_1) \right)^2 \middle| \mathcal{G}_{\tau_1}^n \right] &= \mathbb{E} \left[\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_2)^2 \middle| \mathcal{G}_{\tau_1}^n \right] + \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_1)^2 \\ &\quad - 2\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_1) \mathbb{E} \left[\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_2) \middle| \mathcal{G}_{\tau_1}^n \right] = \mathbb{E} \left[\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_2)^2 \middle| \mathcal{G}_{\tau_1}^n \right] - \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_1)^2 \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\left(\mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_2) - \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_1) \right)^2 \middle| \mathcal{G}_{\tau_1}^n \right] \right] &= \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[\langle \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}, \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha} \rangle_{\tau_2} - \langle \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}, \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha} \rangle_{\tau_1} \middle| \mathcal{G}_{\tau_1}^n \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left(\sqrt{n} \sum_{j=1}^n \int_{\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}}^{\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}} \left(\frac{\partial F_{n,f}}{\partial x_j} \right)^2 (X_n(\sqrt{n}u)) du \right) \leq C_f^{k_\alpha} \delta, \end{aligned}$$

où $C_f^{k_\alpha}$ est la constante introduite dans la preuve du lemme XII.12 pour $k = k_\alpha$. Nous en déduisons que

$$\mathbb{E} \left(\left| \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_2) - \mathcal{M}_{n,f}^{k_\alpha}(\tau_1) \right| \right) \leq \sqrt{C_f^{k_\alpha} \delta}.$$

Ensuite, puisque f est l'identité, la proposition XII.7 et le lemme XII.8 nous assurent que

$$\sqrt{n} L_n F_{n,f} = -\frac{\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle^3}{2\sigma^4} + \Psi_{n,f}(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle)$$

et

$$\forall k > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|(u,v)\| \leq k} |\Psi_{n,f}(u,v)| = 0.$$

Par conséquent

$$\int_{\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}}^{\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}} |\sqrt{n} L_n F_{n,f}(X_n(\sqrt{n}u))| du \leq \left(\frac{k_\alpha^3}{2\sigma^4} + \sup_{\|(u,v)\| \leq k_\alpha} |\Psi_{n,f}(u,v)| \right) \delta.$$

Enfin

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^{1/4}} \left| H_f(X_n(\sqrt{n}(\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))) - H_f(X_n(\sqrt{n}(\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))) \right| \\ \leq \frac{1}{n^{1/4}} \left| H_f(X_n(\sqrt{n}(\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))) \right| + \frac{1}{n^{1/4}} \left| H_f(X_n(\sqrt{n}(\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))) \right| \leq \frac{k_\alpha^2}{\sigma^2 n^{1/4}} \end{aligned}$$

et, de même,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \left| K_f(X_n(\sqrt{n}(\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))) - K_f(X_n(\sqrt{n}(\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))) \right| \leq \frac{3k_\alpha^3}{4\sigma^4 \sqrt{n}}.$$

Ainsi, pour n assez grand et δ assez petit,

$$\mathbb{E} \left(\left| \frac{S_n(\sqrt{n}(\tau_2 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))}{n^{3/4}} - \frac{S_n(\sqrt{n}(\tau_1 \wedge \tau_n^{k_\alpha}))}{n^{3/4}} \right| \right) \leq \frac{\eta \alpha}{2}.$$

Finalement

$$\mathbb{P} \left(\left| \frac{S_n(\sqrt{n}\tau_2)}{n^{3/4}} - \frac{S_n(\sqrt{n}\tau_1)}{n^{3/4}} \right| \geq \eta \right) \leq \frac{3\alpha}{2} = \varepsilon.$$

Le point (b) de la proposition XII.14 est donc satisfait et la preuve du lemme est terminée. \square

Etape 4 : identification du processus limite et convergence.

Il nous reste maintenant à caractériser le processus limite. D'après le lemme XII.15, il existe une sous-suite $(\langle \mathbf{z}, U_{m_n}(\cdot) \rangle)_{n \geq 1}$ qui converge en loi vers un processus $(\mathcal{U}(t), t \geq 0)$ dans $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$. D'après la proposition XII.13, $(\langle \mathbf{z}^2, U_{m_n}(\cdot) \rangle)_{n \geq 1}$ converge en loi vers le processus nul dans $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$.

Pour tout $k > 0$, introduisons le temps d'arrêt

$$\tilde{\tau}_n^k = \min \left(T, \inf_{t \geq 0} \left\{ |\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle| \geq k \right\} \right).$$

Si $t \geq T$ alors $\mathbb{P}(\tilde{\tau}_n^k \leq t) = 1$ et, si $t < T$, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(\tilde{\tau}_n^k \leq t) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} \left(\sup_{0 \leq t \leq T} |\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle| \geq k \right) = 0,$$

d'après le lemme XII.13. Nous en déduisons que $(\tilde{\tau}_n^k)_{n \geq 1}$ converge en loi vers T .

Donnons-nous $f \in C^4(\mathbb{R})$. Avec les notations du paragraphe 37.b), pour tout $n \geq 1$,

$$\forall t \in [0, T] \quad F_{n,f}(X_n(\sqrt{nt})) = f(\langle \mathbf{z}, U_n(t) \rangle) + \left(\frac{1}{n^{1/4}} \Psi_f^H + \frac{1}{n^{1/2}} \Psi_f^K \right) (\langle \mathbf{z}, U_n(t) \rangle, \langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle),$$

les fonctions Ψ_f^H et Ψ_f^K étant continues. Ensuite la proposition XII.7 et le lemme XII.8 entraînent que, pour tous $n \geq 1$ et $t \in [0, T]$,

$$\sqrt{n} L_n F_{n,f}(X_n(\sqrt{nt})) = G_\infty f(\langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle) + \Psi_{n,f}(\langle \mathbf{z}, U_n(t) \rangle, \langle \mathbf{z}^2, U_n(t) \rangle),$$

où $\Psi_{n,f}$ est une fonction continue sur \mathbb{R}^2 telle que

$$\forall k > 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{(u,v) \in \mathbb{R}^2, \|(u,v)\| \leq k} |\Psi_{n,f}(u,v)| = 0.$$

Donnons-nous $k > 0$. Nous en déduisons que

$$\forall t \geq 0 \quad \mathcal{M}_{m_n,f}(t \wedge \tilde{\tau}_n^k) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{M}_f(t) = f(\mathcal{U}(t \wedge T)) - f(\mathcal{U}(0)) - \int_0^{t \wedge T} G_\infty f(\mathcal{U}(s)) ds.$$

Pour tous $n \geq 1$ et $t \in [0, T]$, nous avons

$$\langle \mathcal{M}_{n,f}(\cdot \wedge \tilde{\tau}_n^k), \mathcal{M}_{n,f}(\cdot \wedge \tilde{\tau}_n^k) \rangle_t = \sqrt{n} \sum_{j=1}^n \int_0^{t \wedge \tilde{\tau}_n^k} \left(\frac{\partial F_{n,f}}{\partial x_j} \right)^2 (X_n(\sqrt{ns})) ds,$$

et nous avons vu, à la page 243, que

$$\begin{aligned} \sqrt{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_{n,f}}{\partial x_j} \right)^2 &= \left(f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + \left[\frac{1}{n^{1/4}} \frac{\partial \Psi_f^H}{\partial x} + \frac{1}{n^{1/2}} \frac{\partial \Psi_f^K}{\partial x} \right] (\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{4\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle}{n^{1/4}} + 4\sigma^2 \right) \left(\left[\frac{1}{n^{1/4}} \frac{\partial \Psi_f^H}{\partial y} + \frac{1}{n^{1/2}} \frac{\partial \Psi_f^K}{\partial y} \right] (\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right)^2 \\ &\quad + \frac{2\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle}{n^{1/4}} \left(f'(\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle) + \left[\frac{1}{n^{1/4}} \frac{\partial \Psi_f^H}{\partial x} + \frac{1}{n^{1/2}} \frac{\partial \Psi_f^K}{\partial x} \right] (\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right) \\ &\quad \times \left(\left[\frac{1}{n^{1/4}} \frac{\partial \Psi_f^H}{\partial y} + \frac{1}{n^{1/2}} \frac{\partial \Psi_f^K}{\partial y} \right] (\langle \mathbf{z}, \nu_n \rangle, \langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle) \right). \end{aligned}$$

Supposons que f est à support compact. Alors nous montrons facilement l'existence de $\tilde{C}_f^k > 0$ tel que

$$|\langle \mathbf{z}^2, \nu_n \rangle| \leq k \quad \implies \quad \sqrt{n} \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial F_{n,f}}{\partial x_j} \right)^2 \leq \tilde{C}_f^k.$$

Nous en déduisons que $\mathcal{M}_{n,f}(\cdot \wedge \tilde{\tau}_n^k)$ est une martingale et que

$$\forall t \geq 0 \quad \sup_{n \geq 1} \mathbb{E} \left(\mathcal{M}_{n,f}(t \wedge \tilde{\tau}_n^k)^2 \right) \leq \tilde{C}_f^k T < +\infty.$$

Ceci entraîne que, pour tout $t \geq 0$, $(\mathcal{M}_{m_n,f}(t \wedge \tilde{\tau}_{m_n}^k))_{n \geq 1}$ est une famille uniformément intégrable. Par conséquent \mathcal{M}_f est une martingale.

Le théorème 1.7 du chapitre 8 de [27] nous assure que le problème de martingale associé à $\{(f, G_\infty f) : f \in C_c^\infty(\mathbb{R})\}$ admet une unique solution : il s'agit de la solution forte de l'équation différentielle stochastique

$$dz(t) = -\frac{z^3(t)}{2\sigma^4} dt + dB(t), \quad z(0) = 0,$$

où $(B(t), t \geq 0)$ est un mouvement Brownien standard sur \mathbb{R} . Par conséquent le processus limite $(\mathcal{U}(t), 0 \leq t \leq T)$ est uniquement déterminé. Nous en déduisons que la suite

$$\left(\frac{S_n(\sqrt{nt})}{n^{3/4}}, 0 \leq t \leq T \right)_{n \geq 1} = (\langle \mathbf{z}, U_n(t) \rangle, 0 \leq t \leq T)_{n \geq 1}$$

converge en loi vers $(\mathcal{U}(t), 0 \leq t \leq T)$ dans $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$. Enfin, puisque les trajectoires de $(\mathcal{U}(t), 0 \leq t \leq T)$ sont continues, cette convergence en loi a lieu dans $C([0, T], \mathbb{R})$. Ceci termine la preuve du théorème XII.9.

Annexe

Sommaire

A	Résultats sur le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé	251
1)	Preuve du théorème I.1	251
2)	Estimation de la variance	258
B	Quelques résultats de grandes déviations	259
1)	Fonctions semi-continues	259
2)	Principe de grandes déviations	260
3)	Le lemme de Varadhan et ses conséquences	261
4)	Le théorème de Cramér en dimension finie	265
5)	Le théorème de Sanov	265

A Résultats sur le modèle d'Ising Curie-Weiss généralisé

1) Preuve du théorème I.1

Nous donnons une démonstration complète inspirée des articles [24] et [26].

Etape 1 : grandes déviations pour S_n/n sous $\mu_{n,\rho,\beta}$.

Soit ρ une mesure de probabilité symétrique sur \mathbb{R} qui n'est pas la masse de Dirac en 0. L'intérieur de l'enveloppe convexe du support de ρ est alors $] -L, L[$ pour un certain $L \in]0, +\infty[$. Supposons que ρ vérifie

$$\forall t \geq 0 \quad \int_{\mathbb{R}} \exp(tx^2) d\rho(x) < \infty \quad \text{et} \quad \Lambda^{(3)}(t) \leq 0,$$

où Λ est la Log-Laplace de ρ définie par

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \Lambda(u) = \ln \int_{\mathbb{R}} e^{uz} d\rho(z).$$

L'hypothèse ci-dessus assure que Λ est analytique réelle sur \mathbb{R} tout entier et qu'elle admet des moments de tout ordre. Pour tout $n \geq 1$, notons ν_n la loi de S_n/n quand S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi ρ . Le théorème de Cramér dans \mathbb{R} (cf. paragraphe B de l'annexe) implique que $(\nu_n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la transformée de Cramér I de ρ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad I(x) = \sup_{u \in \mathbb{R}} (ux - \Lambda(u)).$$

Donnons quelques propriétés de I :

(a) I est une bonne fonction de taux paire et convexe.

(b) Λ' est une bijection de \mathbb{R} sur $] -L, L[$. Sa fonction réciproque $(\Lambda')^{-1}$ est analytique réelle sur \mathbb{R} , strictement croissante et

$$\forall x \in] -L, L[\quad I(x) = x (\Lambda')^{-1}(x) - \Lambda((\Lambda')^{-1}(x)).$$

La fonction I est donc analytique réelle sur $] -L, L[$. De plus

$$\forall x \in] -L, L[\quad I'(x) = (\Lambda')^{-1}(x) \quad \text{et} \quad I''(x) = \frac{1}{\Lambda''((\Lambda')^{-1}(x))}.$$

(c) Si $L < +\infty$ et $x \notin [-L, L]$ alors $I(x) = +\infty$. De plus $I(L) = -\ln \rho(\{L\})$.

(d) $I'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers L .

(e) $I(0) = I'(0) = 0$ et $I''(0) = 1/\Lambda''(0) = 1/\sigma^2$.

Nous renvoyons à [25] pour la démonstration de ces propriétés. Notons qu'elles découlent aussi des résultats du paragraphe 10 avec $d = 1$.

Pour tout $\beta > 0$, nous avons

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \quad \mu_{n,\rho,\beta} \left(\frac{S_n}{n} \in A \right) = \frac{1}{Z_n(\beta)} \int_A \exp \left(\frac{n\beta x^2}{2} \right) d\nu_n(x).$$

La fonction $x \mapsto \beta x^2/2$ est convexe donc la proposition B.9 et le corollaire B.8 nous assurent que la loi de S_n/n , sous $\mu_{n,\rho,\beta}$, satisfait le principe de grandes déviations sur \mathbb{R} de vitesse n , gouverné par

$$J_\beta : x \mapsto I(x) - \frac{\beta x^2}{2} - \inf_{y \in \mathbb{R}} \left(I(y) - \frac{\beta y^2}{2} \right).$$

Cela signifie que la loi de S_n/n , sous $\mu_{n,\rho,\beta}$, se concentre asymptotiquement autour des minima de J_β .

Etape 2 : étude des minima de la fonction de taux de grandes déviations.

Nous introduisons $G_\beta : x \in \mathbb{R} \mapsto I(x) - \beta x^2/2$. Il s'agit d'une fonction paire puisque ρ est symétrique. Nous allons donc l'étudier sur $[0, +\infty[$. Commençons par le lemme suivant :

Lemme A.1. Pour tout $\beta > 0$, il existe $m \in] -L, L[$ tel que

$$G_\beta(m) = \inf_{y \in \mathbb{R}} G_\beta(y).$$

Démonstration. Soit $\beta > 0$. Le lemme de Varadhan nous assure que

$$\sup_{y \in \mathbb{R}} \left(\frac{\beta y^2}{2} - I(y) \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(\beta) < +\infty.$$

Supposons qu'il existe $A > 0$ tel que, pour c assez grand,

$$\sup_{|u| \geq c} \left(\frac{\beta u^2}{2} - I(u) \right) \geq -2A.$$

Alors, pour tout $u \in \mathbb{R}$ tel que $|u| \geq c$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(\beta + 1) = \sup_{y \in \mathbb{R}} \left(\frac{y^2}{2} + \frac{\beta y^2}{2} - I(y) \right) \geq \frac{u^2}{2} + \frac{\beta u^2}{2} - I(u) \geq \frac{c^2}{2} + \frac{\beta u^2}{2} - I(u).$$

En prenant le supremum sur $|u| \geq c$ nous obtenons

$$\frac{c^2}{2} - 2A \leq \frac{c^2}{2} + \sup_{|u| \geq c} \left(\frac{\beta u^2}{2} - I(u) \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln Z_n(\beta + 1) < +\infty.$$

En faisant tendre c vers $+\infty$, nous obtenons une contradiction. Ainsi $G_\beta(y)$ tend vers $+\infty$ quand $|y|$ tend vers $+\infty$. Par conséquent, il existe $c > 0$ assez grand tel que

$$\inf_{y \in \mathbb{R}} G_\beta(y) = \inf_{y \in [-c, c]} G_\beta(y).$$

La fonction G_β est semi-continue inférieurement donc elle atteint son minimum sur tout compact. Ainsi, il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que

$$G_\beta(m) = \inf_{y \in \mathbb{R}} G_\beta(y).$$

Si $L = +\infty$ alors la preuve du lemme est terminée. Si $L < +\infty$ et $\rho(\{L\}) = 0$ alors $I(x) = +\infty$ pour $x \geq L$ et donc $m \in]-L, L[$. Par contre, si $L < +\infty$ et $\rho(\{L\}) > 0$, il se pourrait que $m \in \{-L, L\}$. Supposons que $m = L$ (le cas $m = -L$ est analogue puisque G_β est paire) : nous avons

$$I'(u) - \frac{\beta(L^2 - u^2)}{2(L - u)} = I'(u) - \frac{\beta(L + u)}{2} \xrightarrow{u \rightarrow L^-} +\infty$$

et donc, pour $\varepsilon > 0$ assez grand,

$$I'(L - \varepsilon) - \frac{\beta(L^2 - (L - \varepsilon)^2)}{2\varepsilon} > 0.$$

De plus, par convexité de I ,

$$\frac{I(L) - I(L - \varepsilon)}{\varepsilon} \geq \lim_{t \rightarrow (L - \varepsilon)} \frac{I(t) - I(L - \varepsilon)}{t - (L - \varepsilon)} = I'(L - \varepsilon).$$

Il vient que

$$I(L) - \frac{\beta L^2}{2} > I(L - \varepsilon) - \frac{\beta(L - \varepsilon)^2}{2}.$$

Ceci contredit le fait que $m = L$ est un minimum de G_β . Ainsi $m \in]-L, L[$. □

Le lemme précédent assure que G_β atteint son minimum en un point $m \in]-L, L[$. La fonction G_β est analytique sur $] -L, L[$ donc

$$I'(m) - \beta m = G'_\beta(m) = 0 \quad \text{et} \quad I''(m) - \beta = G''_\beta(m) \geq 0.$$

Si $m = 0$ nous avons alors $I''(0) \geq \beta$, c'est-à-dire $1/\sigma^2 \geq \beta$.

Nous définissons la fonction b par

$$\forall x \in]-L, 0[\cup]0, L[\quad b(x) = \frac{I'(x)}{x}.$$

Au voisinage de 0,

$$b(x) = \frac{I'(0) + I''(0)x + o(x)}{x} = I''(0) + o(1) = \frac{1}{\sigma^2} + o(1).$$

Nous posons alors $b(0) = 1/\sigma^2$. La fonction b est alors analytique réelle et paire sur $] -L, L[$.

Lemme A.2. *Supposons que ρ n'est pas la gaussienne centrée de variance σ^2 et que $\Lambda^{(3)}(t) \leq 0$ pour tout $t \geq 0$. Alors la fonction Λ'' est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$, la fonction b est strictement croissante sur $[0, L[$ et*

$$\lim_{x \rightarrow L} b(x) = +\infty.$$

Démonstration. L'hypothèse sur $\Lambda^{(3)}$ entraîne que la fonction Λ'' est décroissante sur $[0, +\infty[$. Elle est même strictement décroissante. En effet, si elle est constante sur un petit intervalle $]a, b[\subset [0, +\infty[$ alors $L^{(3)}$ est nulle sur cet intervalle et le théorème de prolongement analytique entraîne que $L^{(3)}$ est nulle sur tout \mathbb{R} . Il s'ensuit que $\Lambda(t) = \sigma^2 t^2/2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et donc que ρ est la gaussienne centrée de variance σ^2 . Nous en déduisons que, si ρ n'est pas une gaussienne, alors Λ' est strictement concave et donc que I' est strictement convexe sur $[0, L[$. Ainsi

$$\forall x \in]0, L[\quad \frac{I'(x)}{x} = \frac{I'(0) - I'(x)}{0 - x} < I''(x)$$

et donc

$$\forall x \in]0, L[\quad b'(x) = \frac{xI''(x) - I'(x)}{x^2} = \frac{1}{x} \left(I''(x) - \frac{I'(x)}{x} \right) > 0.$$

La fonction b est donc strictement croissante sur $[0, L[$.

Dans le cas où $L < +\infty$, comme $I'(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers L , il en est de même pour $b(x)$. Supposons que $L = +\infty$ et que b est bornée sur $[0, +\infty[$ par $A > 0$. Donnons-nous $\beta > A$. Nous avons vu dans la démonstration du lemme A.1 que $G_\beta(y)$ tend vers $+\infty$ quand $|y|$ tend vers $+\infty$. Il s'ensuit que, pour x assez grand, $I(x) > \beta x^2/2$ et donc

$$\frac{\beta x^2}{2} - I(1) \leq I(x) - I(1) = \int_0^x I'(t) dt \leq A \int_0^x t dt = \frac{Ax^2}{2} - \frac{A}{2}.$$

En faisant tendre x vers $+\infty$ nous aboutissons à une contradiction. Par conséquent, si $L = +\infty$, alors b n'est pas bornée sur $[0, +\infty[$ et, comme elle est y croissante, nous en déduisons que $b(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers L . \square

Supposons que $\beta > 1/\sigma^2$. Il s'ensuit que $m \neq 0$ et donc que m est la solution de l'équation $b(m) = \beta$. La parité de I (et donc de b) entraîne que $-m$ est aussi un minimum de G_β et que $b(-m) = \beta$. Nous pouvons donc supposer que $m > 0$. De plus

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x^2/2} e^{-x^2/(2\sigma^2)} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} = +\infty$$

donc ρ n'est pas la gaussienne centrée de variance σ^2 et le lemme A.2 implique que b est une bijection de $[0, L[$ sur $[1/\sigma^2, +\infty[$. Nous en déduisons qu'il existe une unique solution $m = m(\beta)$ sur $]0, +\infty[$ à l'équation $b(m) = \beta$. Par conséquent, pour tout $\beta > 1/\sigma^2$, la fonction G_β admet exactement deux minima sur \mathbb{R} : $m(\beta)$ et $-m(\beta)$. Il en est de même pour la fonction J_β .

Supposons que $\beta \leq 1/\sigma^2$ et que nous avons seulement l'hypothèse d'intégrabilité plus faible suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{\beta x^2/2} d\rho(x) < +\infty.$$

Si ρ est la gaussienne centrée de variance σ^2 alors $\beta \neq 1/\sigma^2$ (sinon l'hypothèse d'intégrabilité de ρ est mise en défaut) et

$$\forall x \neq 0 \quad G_\beta(x) = I(x) - \frac{\beta x^2}{2} = \frac{x^2}{2\sigma^2} - \frac{\beta x^2}{2} > 0 = G_\beta(0)$$

donc G_β admet un unique minimum en 0. Supposons donc que ρ n'est pas la gaussienne centrée de variance σ^2 . Alors le lemme A.2 entraîne que Λ'' est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Comme $(\Lambda')^{-1}$ est strictement croissante, il vient

$$\forall x > 0 \quad \frac{1}{I''(x)} = \Lambda''((\Lambda')^{-1}(x)) < \Lambda''((\Lambda')^{-1}(0)) = \frac{1}{I''(0)} = \sigma^2.$$

Par intégrations successives et par parité de I , nous obtenons que $I(x) > x^2/(2\sigma^2)$ pour tout $x \neq 0$. Ainsi

$$\forall x \neq 0 \quad G_\beta(x) > \left(\beta - \frac{1}{\sigma^2}\right) \frac{x^2}{2} > 0 = G_\beta(0).$$

Par conséquent $J_\beta = G_\beta$ admet un unique minimum en 0.

Etape 3 : propriétés de la fonction $\beta \mapsto m(\beta)$.

Si $\beta \leq 1/\sigma^2$, comme 0 est l'unique minimum de G_β , nous pouvons poser $m(\beta) = 0$. La fonction $\beta \in]1/\sigma^2, +\infty[\mapsto m(\beta)$ est la réciproque de la fonction b qui est une bijection analytique réelle sur $]0, L[$. Elle est donc également analytique réelle. Par construction elle est aussi strictement positive sur $]1/\sigma^2, +\infty[$. Nous avons

$$m(\beta) = b^{-1}(\beta) \xrightarrow{\beta \rightarrow (1/\sigma^2)^+} 0,$$

donc la fonction $\beta \mapsto m(\beta)$ est une fonction continue sur $]0, +\infty[$. De plus, au voisinage de 0,

$$b(x) = \frac{1}{x} \left(I'(0) + I''(0)x + I^{(3)}(0) \frac{x^2}{2} + I^{(4)}(0) \frac{x^3}{6} + o(x^3) \right) = \frac{1}{\sigma^2} + I^{(4)}(0) \frac{x^2}{6} + o(x^2).$$

Il s'ensuit que $b'(0) = 0$. Ainsi $b'(m(\beta))$ tend vers 0 quand β tend vers $(1/\sigma^2)^+$. Par conséquent

$$m'(\beta) = \frac{1}{b'(m(\beta))} \xrightarrow{\beta \rightarrow (1/\sigma^2)^+} +\infty.$$

Ainsi la fonction m n'est pas la restriction d'une fonction analytique réelle au voisinage de $1/\sigma^2$.

Etape 4 : loi des grands nombres sous $\mu_{n,\rho,\beta}$.

Supposons que $\beta > 1/\sigma^2$ et notons $m = m(\beta) > 0$. Soit f une fonction continue bornée sur \mathbb{R} à valeurs dans \mathbb{R} . Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta \in]0, m[$ tel que

$$\forall \alpha \in \{-m, m\} \quad \forall x \in]\alpha - \eta, \alpha + \eta[\quad |f(x) - f(\alpha)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

L'ensemble $U =]-m - \eta, -m + \eta[\cup]m - \eta, m + \eta[$ est un ouvert contenant m et $-m$, les minima de J_β . Le principe de grandes déviations satisfait par S_n/n sous $\mu_{n,\rho,\beta}$ entraîne que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_{n,\rho,\beta} \left(\frac{S_n}{n} \in U^c \right) \leq - \inf_{x \in U^c} J_\beta(x) < 0.$$

Donc il existe $n_0 \geq 1$ tel que

$$\forall n \geq n_0 \quad \mu_{n,\rho,\beta} \left(\frac{S_n}{n} \in U^c \right) \leq \frac{\varepsilon}{6\|f\|_\infty}.$$

Ainsi, pour $n \geq n_0$, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$,

$$\forall \alpha \in \{-m, m\} \quad \mathbb{E} \left(\left| f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(\alpha) \right| \mathbb{1}_{S_n/n \in U^c} \right) \leq 2\|f\|_\infty \mu_{n,\rho,\beta} \left(\frac{S_n}{n} \in U^c \right) \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Décomposons

$$\begin{aligned} & 2f \left(\frac{S_n}{n} \right) - (f(-m) + f(m)) \\ &= \left(f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(-m) \right) \mathbb{1}_{S_n/n \in U^c} + \left(f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(-m) \right) \mathbb{1}_{|S_n/n+m| < \eta} \\ &+ \left(f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(m) \right) \mathbb{1}_{S_n/n \in U^c} + \left(f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(m) \right) \mathbb{1}_{|S_n/n-m| < \eta} \\ &+ \left(f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(-m) \right) \mathbb{1}_{|S_n/n-m| < \eta} + \left(f \left(\frac{S_n}{n} \right) - f(m) \right) \mathbb{1}_{|S_n/n+m| < \eta}. \end{aligned}$$

Notons cette somme (1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6). D'après la construction de U et l'inégalité ci-dessus, nous avons que, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$,

$$|\mathbb{E}((1) + (2) + (3) + (4))| \leq \frac{4\varepsilon}{3}.$$

Enfin, par symétrie de ρ , nous avons que S_n/n et $-S_n/n$ ont la même loi sous $\mu_{n,\rho,\beta}$. Ainsi

$$\mathbb{E}((5)+(6)) = \mathbb{E}\left(\left(f\left(-\frac{S_n}{n}\right) - f(-m)\right) \mathbf{1}_{|S_n/n+m|<\eta} + \left(f\left(-\frac{S_n}{n}\right) - f(m)\right) \mathbf{1}_{|S_n/n-m|<\eta}\right) \leq \frac{2\varepsilon}{3},$$

et donc $|\mathbb{E}((5) + (6))| \leq 2\varepsilon/3$. Par conséquent, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$,

$$\left| \mathbb{E}\left(f\left(\frac{S_n}{n}\right)\right) - \frac{1}{2}(f(-m) + f(m)) \right| = \frac{1}{2} |\mathbb{E}((1) + (2) + (3) + (4) + (5) + (6))| \leq \varepsilon.$$

Ceci entraîne la convergence en loi de S_n/n vers $(\delta_{-m(\beta)} + \delta_{m(\beta)})/2$.

Supposons que $\beta \leq 1/\sigma^2$. Alors un raisonnement analogue (avec $m = 0$) entraîne la convergence en loi de S_n/n vers δ_0 .

Etape 5 : théorème central limite sous $\mu_{n,\rho,\beta}$.

Nous définissons la fonction ψ_β par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \psi_\beta(x) = \frac{\beta x^2}{2} - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{\beta xy} d\rho(y).$$

Appliquons la proposition IX.1 à $d = 1$: si $S_n = X_n^1 + \dots + X_n^n$, où (X_n^1, \dots, X_n^n) a pour loi $\mu_{n,\rho,\beta}$, et si W_β est une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance $1/\beta$ et indépendante de S_n , alors nous avons

$$\forall \gamma > 0 \quad \frac{W_\beta}{n^{1/2-\gamma}} + \frac{S_n}{n^{1-\gamma}} \stackrel{\mathcal{L}}{=} \frac{\exp(-n\psi_\beta(xn^{-\gamma})) dx}{\int_{\mathbb{R}} \exp(-n\psi_\beta(zn^{-\gamma})) dz}.$$

Le lemme IX.2 nous assure que la fonction ψ_β est de classe C^∞ et $\psi_\beta(x)$ tend vers $+\infty$ quand $|x|$ tend vers $+\infty$. Nous en déduisons que, pour $\delta > 0$, $\varepsilon_\delta = \inf \{ \psi_\beta(x) : |x| \geq \delta \} > 0$. Ainsi

$$\begin{aligned} \int_{|x| \geq \delta} e^{-n\psi_\beta(x)} dx &\leq e^{-(n-1)\varepsilon_\delta} \int_{|x| \geq \delta} e^{-\psi_\beta(x)} dx \\ &\leq e^{-(n-1)\varepsilon_\delta} \int_{\mathbb{R}} e^{-\beta x^2/2} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{\beta xy} d\rho(y) \right) dx \\ &= e^{-(n-1)\varepsilon_\delta} \int_{\mathbb{R}^2} e^{-\beta(x-y)^2/2} e^{\beta y^2/2} d\rho(y) dx \\ &= e^{-(n-1)\varepsilon_\delta} \sqrt{\frac{2\pi}{\beta}} \int_{\mathbb{R}} e^{\beta y^2/2} d\rho(y) = O(e^{-n\varepsilon_\delta}). \end{aligned}$$

Supposons que $\beta \leq 1/\sigma^2$ et que ρ n'est la gaussienne centrée de variance σ^2 . Le lemme A.2 entraîne alors que Λ'' est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$. Par intégrations successives, et par parité de Λ , nous obtenons que $\Lambda(x) < \sigma^2 x^2/2$ pour tout $x \neq 0$. Par conséquent la fonction ψ_β admet un unique minimum en 0. Si ρ est la gaussienne centrée de variance σ^2 et $\beta \neq 1/\sigma^2$ alors il est direct que ψ_β admet un unique minimum en 0.

Remarquons qu'il nous suffirait en fait d'avoir l'hypothèse (plus faible que $\Lambda^{(3)}(t) \leq 0$ pour $t \geq 0$) que

$$\forall t \neq 0 \quad \int_{\mathbb{R}} e^{tx} d\rho(x) < e^{t^2/(2\beta)}.$$

a) **Cas où** $\beta < 1/\sigma^2$: au voisinage de 0,

$$\psi_\beta(x) = \frac{\beta x^2}{2} - \Lambda(0) - \Lambda'(0)\beta x - \Lambda''(0)\frac{\beta^2 x^2}{2} + o(x^2) = \frac{\beta x^2}{2} - \frac{\beta^2 \sigma^2 x^2}{2} + o(x^2) \sim \kappa(\beta)\frac{x^2}{2}$$

avec $\kappa(\beta) = \beta(1 - \beta\sigma^2) > 0$. Donc il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\delta, \delta[\quad -\psi_\beta(x) < -\kappa(\beta)x^2/4.$$

Soit h une fonction continue bornée de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . Le théorème de convergence dominée implique que

$$A_n = \int_{|x| < \delta\sqrt{n}} h(x)e^{-n\psi_\beta(x/\sqrt{n})} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)e^{-\kappa(\beta)x^2/2} dx.$$

Ensuite

$$B_n = \int_{|x| \geq \delta\sqrt{n}} h(x)e^{-n\psi_\beta(x/\sqrt{n})} dx = \sqrt{n} \int_{|x| \geq \delta} h(x\sqrt{n})e^{-n\psi_\beta(x)} dx = O(\sqrt{n}e^{-n\varepsilon\delta}).$$

Donc B_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et

$$A_n + B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x)e^{-\kappa(\beta)x^2/2} dx.$$

Si $h = 1$ nous obtenons la convergence du dénominateur et donc, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$, $W_\beta + S_n/\sqrt{n}$ converge en loi vers la gaussienne de variance $1/\kappa(\beta)$. Ensuite, pour tout $u \in \mathbb{R}$, par indépendance de W_β et S_n sous $\mu_{n,\rho,\beta}$, nous avons

$$\mathbb{E}(e^{iuW_\beta}) \mathbb{E}(e^{iuS_n/\sqrt{n}}) = \mathbb{E}(e^{iu(W_\beta + S_n/\sqrt{n})}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(-\frac{u^2}{2\kappa(\beta)}\right).$$

Or W_β est une gaussienne de variance $1/\sqrt{\beta}$ donc

$$\mathbb{E}(e^{iuS_n/\sqrt{n}}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \exp\left(\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\kappa(\beta)}\right)\frac{u^2}{2}\right) = \exp\left(-\frac{\sigma^2}{1 - \beta\sigma^2}\frac{u^2}{2}\right).$$

Si bien que, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$, S_n/\sqrt{n} converge vers $\mathcal{N}(0, \sigma^2(1 - \beta\sigma^2)^{-1})$ comme annoncé.

b) **Cas où** $\beta = 1/\sigma^2$: au voisinage de 0, $\psi_\beta(x) = o(x^2)$. Il nous faut donc pousser le développement de ψ_β plus loin. Si $\Lambda^{(k)}(0) = 0$ pour tout $k \geq 3$ alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \Lambda(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \Lambda^{(2k)}(0) \frac{t^{2k}}{(2k)!} = \frac{\sigma^2 t^2}{2}$$

si bien que ρ est la gaussienne centrée de variance σ^2 , ce qui est exclu car elle ne vérifie par l'hypothèse d'intégrabilité. Ainsi il existe $k \geq 2$ tel que $\Lambda^{(2k)}(0) \neq 0$ et nous choisissons le plus petit. Nous avons alors, au voisinage de 0,

$$\psi_\beta(x) = \frac{\beta x^2}{2} - \Lambda(\beta x) \sim -\Lambda^{(2k)}(0) \frac{\beta^{2k} x^{2k}}{(2k)!}.$$

Notons $\alpha_k = -\Lambda^{(2k)}(0)\beta^{2k}/(2k)!$. Le fait que 0 est l'unique minimum de ψ_β entraîne que $\alpha_k > 0$. Ensuite il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in]-\delta, \delta[\quad -\psi_\beta(x) < -\alpha_k x^{2k}/2.$$

Soit h une fonction continue bornée de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R} . Le théorème de convergence dominée implique que

$$A_n = \int_{|x| < \delta n^{1/2k}} h(x) e^{-n\psi_\beta(x/n^{1/2k})} dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-\alpha_k x^{2k}} dx.$$

Ensuite

$$B_n = \int_{|x| \geq \delta n^{1/2k}} h(x) e^{-n\psi_\beta(x/n^{1/2k})} dx = n^{1/2k} \int_{|x| \geq \delta} h(x n^{1/2k}) e^{-n\psi_\beta(x)} dx = O(n^{1/2k} e^{-n\varepsilon_\delta}).$$

Donc B_n tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$ et

$$A_n + B_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} h(x) e^{-\alpha_k x^{2k}} dx.$$

Si $h = 1$ nous obtenons la convergence du dénominateur et donc, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$,

$$\frac{W_\beta}{n^{1/2-\gamma}} + \frac{S_n}{n^{1-\gamma}} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{\mathcal{L}} \frac{e^{-\alpha_k x^{2k}} dx}{\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha_k y^{2k}} dy}.$$

D'après le lemme de Slutsky (théorème 3.9 de [8]), c'est donc aussi le cas de $S_n/n^{1-1/2k}$ puisque $W_\beta/n^{1/2-1/2k}$ converge en loi vers 0 quand n tend vers $+\infty$. Notons enfin que

$$\alpha_k = -\Lambda^{(2k)}(0)/((2k)! \sigma^{4k}).$$

2) Estimation de la variance

Proposition A.3. *Supposons que ρ est une mesure de probabilité symétrique de variance $\sigma^2 > 0$ et qui satisfait les hypothèses du théorème I.1. Si $\beta \leq 1/\sigma^2$ alors, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$,*

$$\frac{(X_n^1)^2 + \dots + (X_n^n)^2}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \sigma^2.$$

Démonstration. Pour tout $n \geq 1$, posons $T_n = (X_n^1)^2 + \dots + (X_n^n)^2$ et notons $\nu_{2,n}$ la loi de

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (Y_k, Y_k^2),$$

où $(Y_k)_{k \geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi ρ . Le théorème de Cramér dans \mathbb{R}^2 (cf. paragraphe B de l'annexe) implique que $(\nu_{2,n})_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la fonction de taux I_2 définie par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad I_2(x, y) = \sup_{(u,v) \in \mathbb{R}^2} \left\{ xu + yv - \ln \int_{\mathbb{R}} e^{uz+vy^2} d\rho(z) \right\}.$$

Pour tout $\beta > 0$, nous avons

$$\forall A \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2} \quad \mu_{n,\rho,\beta} \left(\left(\frac{S_n}{n}, \frac{T_n}{n} \right) \in A \right) = \frac{1}{Z_n(\beta)} \int_A e^{n\beta x^2/2} d\nu_{2,n}(x, y).$$

La fonction $x \mapsto \beta x^2/2$ est convexe donc la proposition B.9 et le corollaire B.8 nous assurent que la loi de $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\mu_{n,\rho,\beta}$, satisfait le principe de grandes déviations sur \mathbb{R}^2 de vitesse n , gouverné par

$$J_{2,\beta} : (x, y) \mapsto I_2(x, y) - \frac{\beta x^2}{2} - \inf_{(u,v) \in \mathbb{R}^2} \left(I_2(u, v) - \frac{\beta v^2}{2} \right).$$

Or, en prenant $v = 0$ dans le supremum définissant I_2 , nous obtenons que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad I_2(x, y) \geq I(x).$$

Nous avons vu dans l'étape 2 du paragraphe précédent que, si $\beta \geq 1/\sigma^2$, alors $I(x) > \beta x^2/2$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nous en déduisons que, si $x \neq 0$, alors $I_2(x, y) > \beta x^2/2$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. Et, si $x = 0$, alors

$$\forall y \in \mathbb{R} \setminus \{\sigma^2\} \quad I_2(x, y) - \beta x^2/2 = I_2(0, y) > 0.$$

La dernière inégalité découle du point (d) de la proposition III.4. Nous en déduisons que la fonction $J_{2,\beta}$ admet un unique minimum en $(0, \sigma^2)$.

Soit U un ouvert de \mathbb{R} contenant σ^2 . Alors $\mathbb{R} \times U^c$ est un fermé de \mathbb{R}^2 ne contenant pas $(0, \sigma^2)$. Le principe de grandes déviations satisfait par $(S_n/n, T_n/n)$ sous $\mu_{n,\rho,\beta}$ entraîne que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_{n,\rho,\beta} \left(\frac{T_n}{n} \in U^c \right) \leq \inf_{(x,y) \in \mathbb{R} \times U^c} J_{2,\beta}(x) < 0.$$

Nous en déduisons que, pour tout ouvert U de \mathbb{R} contenant σ^2 ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mu_{n,\rho,\beta} \left(\frac{T_n}{n} \in U^c \right) = 0.$$

Ainsi, sous $\mu_{n,\rho,\beta}$, T_n/n converge en probabilité vers σ^2 . □

B Quelques résultats de grandes déviations

Voici quelques résultats de grandes déviations issus de [12], [22] et [25].

1) Fonctions semi-continues

Soient \mathcal{X} un espace topologique et f une fonction définie sur \mathcal{X} et à valeurs dans $[-\infty, +\infty]$.

Fonctions semi-continues. La fonction f est dite semi-continue supérieurement (s.c.s en abrégé) sur \mathcal{X} si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau $\{x \in \mathcal{X} : f(x) < \alpha\}$ est un ouvert de \mathcal{X} . Elle est dite semi-continue inférieurement (s.c.i en abrégé) sur \mathcal{X} si $-f$ est semi-continue supérieurement sur \mathcal{X} .

Dans la proposition suivante, nous résumons quelques propriétés usuelles des fonctions semi-continues.

Proposition B.4. (a) Une fonction $f : \mathcal{X} \rightarrow [-\infty, +\infty]$ est continue si et seulement si elle est semi-continue supérieurement et inférieurement.

(b) Si $(f_i)_{i \in I}$ est une famille de fonctions semi-continues supérieurement sur \mathcal{X} , indexée par un ensemble non vide I , alors la fonction $x \in \mathcal{X} \mapsto \inf \{f_i(x) : i \in I\}$ est semi-continue supérieurement.

(c) Une fonction semi-continue supérieurement atteint son maximum sur tout sous-ensemble compact.

(d) Si \mathcal{X} est un espace métrique alors f est semi-continue supérieurement si et seulement si

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \leq f(x),$$

pour tout $x \in \mathcal{X}$ et pour toute suite $(x_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de \mathcal{X} qui converge vers x dans \mathcal{X} .

Enveloppe semi-continue supérieure. Pour tout $x \in \mathcal{X}$, nous notons $\mathcal{V}(x)$ l'ensemble des voisinages de x et nous définissons f^o l'enveloppe semi-continue supérieure de f par

$$\forall x \in \mathcal{X} \quad f^o(x) = \inf_{V \in \mathcal{V}(x)} \sup_{y \in V} f(y).$$

Proposition B.5. *L'enveloppe semi-continue supérieure f^o de f est la plus petite fonction semi-continue supérieurement qui soit supérieure ou égale à f sur \mathcal{X} .*

Démonstration. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et $x \in \mathcal{X}$ tels que $f^o(x) < \alpha$. Par définition, il existe $V_\alpha \in \mathcal{V}(x)$ tel que

$$\sup_{y \in V_\alpha} f(y) < \alpha.$$

Ainsi l'ensemble $\{x \in \mathcal{X} : f^o(x) < \alpha\}$ contient V_α , il s'agit donc d'un ouvert de \mathcal{X} . Cela montre que f^o est s.c.s. De plus il est immédiat que $f^o(x) \geq f(x)$. Nous notons alors \tilde{f} la plus petite fonction s.c.s qui soit supérieure ou égale à f sur \mathcal{X} . Elle vérifie donc $f^o \geq \tilde{f}$.

Montrons l'autre sens de l'inégalité : la fonction \tilde{f} est s.c.s sur \mathcal{X} donc, pour tous $x \in \mathcal{X}$ et $\varepsilon > 0$, il existe $V_\varepsilon \in \mathcal{V}(x)$ tel que

$$\forall y \in V_\varepsilon \quad \tilde{f}(y) < \tilde{f}(x) + \varepsilon,$$

puisque $\tilde{f}(x) < \tilde{f}(x) + \varepsilon$. Par conséquent

$$\tilde{f}(x) \leq f^o(x) = \inf_{V \in \mathcal{V}(x)} \sup_{y \in V} \tilde{f}(y) \leq \sup_{y \in V_\varepsilon} \tilde{f}(y) < \tilde{f}(x) + \varepsilon.$$

Ceci est valable pour tout $\varepsilon > 0$ si bien que $\tilde{f}^o(x) = \tilde{f}(x)$. Enfin, par définition, nous avons $\tilde{f} \geq f$ si bien que $\tilde{f} = \tilde{f}^o \geq f^o$. Nous en déduisons que $f^o = \tilde{f}$. \square

2) Principe de grandes déviations

Soit \mathcal{X} un espace topologique muni de \mathcal{B} sa tribu borélienne.

Fonction de taux. Une fonction de taux J sur \mathcal{X} est une application semi-continue inférieurement sur \mathcal{X} qui prend ses valeurs dans $[0, +\infty]$. Une bonne fonction de taux J sur \mathcal{X} est une fonction de taux pour laquelle les ensembles de niveaux

$$\{x \in \mathcal{X} : J(x) \leq \alpha\}, \quad \alpha \geq 0$$

sont des compacts de \mathcal{X} .

Principe de grandes déviations. Une suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ de mesures de probabilité sur \mathcal{X} satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la fonction de taux J , si les conditions (BI) et (BS) ci-dessous sont satisfaites :

★ pour tout ouvert O de \mathcal{B} ,

$$-\inf \{J(x) : x \in O\} \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(O), \quad (BI)$$

★ pour tout fermé F de \mathcal{B} ,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(F) \leq -\inf \{J(x) : x \in F\}. \quad (BS)$$

Principe de grandes déviations faible. Une suite $(\mu_n)_{n \geq 1}$ de mesures de probabilité sur \mathcal{X} satisfait le principe de grandes déviations faible de vitesse n , gouverné par la fonction de taux J , si l'inégalité (BI) est vraie pour tout ouvert de \mathcal{B} et si l'inégalité (BS) est vraie pour tout compact de \mathcal{B} .

3) Le lemme de Varadhan et ses conséquences

Commençons par un résultat très pratique dans la manipulation des limsup :

Lemme B.6. Si $(u_1(n))_{n \geq 1}, \dots, (u_k(n))_{n \geq 1}$ sont k suites à valeurs positives ou nulles alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \left(\sum_{i=1}^k u_i(n) \right) = \max_{1 \leq i \leq k} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln u_i(n).$$

Un espace topologique \mathcal{X} est dit séparé si, pour tous points distincts x et y dans \mathcal{X}^2 , il existe deux voisinages disjoints de x et y . Il est dit régulier s'il est séparé et si, pour tout fermé F de \mathcal{X} et pour tout $x \notin F$, il existe deux ouverts disjoints O_1 et O_2 tels que $F \subset O_1$ et $x \in O_2$.

Le lemme suivant est une version généralisée du lemme de Varadhan :

Lemme B.7 (Varadhan). Soit \mathcal{X} un espace régulier muni de sa tribu borélienne \mathcal{B} . Soit $(\nu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ satisfaisant le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la bonne fonction de taux J . Soient f une fonction de \mathcal{X} dans \mathbb{R} et A un borélien de \mathcal{X} .

(a) Si f est semi-continue inférieurement alors

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf(x)} d\nu_n(x) \geq \sup_o (f(x) - J(x)).$$

(b) Si f est semi-continue supérieurement¹ et vérifie

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\{f(x) \geq M\} \cap \bar{A}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) = -\infty, \tag{*}$$

alors

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf(y)} d\nu_n(y) \leq \sup_{x \in \bar{A}} (f(x) - J(x)).$$

(c) Si f est continue et vérifie (*) alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\mathcal{X}} e^{nf(y)} d\nu_n(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} (f(x) - J(x)) < +\infty.$$

Notons que, si f est bornée, alors elle vérifie la condition (*).

Démonstration. (a) Soit $x \in \overset{\circ}{A}$ et $\alpha > 0$. Par continuité de f , il existe V_x un voisinage ouvert de x tel que, pour tout $y \in V_x$, $f(y) \geq f(x) - \alpha$. Pour $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf(y)} d\nu_n(y) \geq \frac{1}{n} \ln \left(\exp \left(n \inf_{V_x} f \right) \nu_n(V_x) \right) \geq \inf_{V_x} f + \frac{1}{n} \ln \nu_n(V_x).$$

Le principe de grandes déviations que satisfait $(\nu_n)_{n \geq 1}$ entraîne que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf(y)} d\nu_n(y) \geq \inf_{V_x} f - \inf_{V_x} J \geq \inf_{V_x} f - J(x) \geq f(x) - \alpha - J(x).$$

En faisant tendre α vers 0 et en prenant le supremum sur tous les $x \in \overset{\circ}{A}$, nous obtenons

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf(x)} d\nu_n(x) \geq \sup_o (f(x) - J(x)).$$

1. En fait il suffit que f soit semi-continue supérieurement sur \bar{A} pour la topologie induite sur \bar{A} , c'est-à-dire, pour tous $x \in \bar{A}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) < \alpha$, il existe un ouvert O_α de \mathcal{X} contenant x et tel que $f(y) < \alpha$ pour tout $y \in O_\alpha \cap \bar{A}$.

(b) Soient $M, \lambda, \alpha > 0$. Posons

$$J^{-1}([0, \lambda]) = \{x \in \mathcal{X} : J(x) \leq \lambda\}$$

et $f_M = \min(f, M)$. Il s'agit d'une fonction semi-continue supérieurement et bornée par M . Soit $x \in J^{-1}([0, \lambda])$. Comme f_M est semi-continue supérieurement et J est semi-continue inférieurement, il existe V_x un voisinage ouvert de x tel que

$$\sup_{y \in V_x} f_M(y) \leq f_M(x) + \alpha \quad \text{et} \quad \inf_{y \in \bar{V}_x} J(y) \geq J(x) - \alpha.$$

Cela est possible car \mathcal{X} est régulier donc, pour tout $x \in \mathcal{X}$ et pour tout voisinage ouvert W_x de x , il existe deux ouverts U_x et V_x disjoints tels que

$$x \in V_x \subset \bar{V}_x \subset U_x^c \subset W_x.$$

La collection $(V_x, x \in J^{-1}([0, \lambda]) \cap \bar{A})$ est un recouvrement ouvert du compact $J^{-1}([0, \lambda]) \cap \bar{A}$, nous pouvons en extraire un sous-recouvrement fini $(V_{x_i}, 1 \leq i \leq k)$. Notons $U = \bigcup_{i=1}^k V_{x_i}$. Alors

$$\begin{aligned} \int_A e^{nf_M(y)} d\nu_n(y) &\leq \sum_{i=1}^k \int_{V_{x_i}} e^{nf_M(y)} d\nu_n(y) + \int_{\bar{A} \setminus U} e^{nf_M(y)} d\nu_n(y) \\ &\leq \sum_{i=1}^k e^{nf_M(x_i) + n\alpha} \nu_n(V_{x_i}) + e^{nM} \nu_n(\bar{A} \setminus U). \end{aligned}$$

Nous avons

$$\inf \{J(x) : x \in \bar{A} \setminus U\} \geq \inf \{J(x) : x \notin J^{-1}([0, \lambda])\} \geq \lambda.$$

Le principe de grandes déviations que satisfait $(\nu_n)_{n \geq 1}$ et le lemme B.6 entraînent alors que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf_M(y)} d\nu_n(y) &\leq \max \left(\max_{1 \leq i \leq k} (f_M(x_i) - J(x_i) + 2\alpha), M - \lambda \right) \\ &\leq \max \left(\sup_{x \in \bar{A}} (f_M(x) - J(x)) + 2\alpha, M - \lambda \right). \end{aligned}$$

En faisant tendre α vers 0 et λ vers $+\infty$, nous obtenons

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf_M(y)} d\nu_n(y) \leq \sup_{x \in \bar{A}} (f_M(x) - J(x)) \leq \sup_{x \in \bar{A}} (f(x) - J(x)).$$

Remarquons que, si f est bornée, il suffit de prendre $M = \|f\|_\infty$ et la démonstration est terminée. Sinon nous avons

$$\int_A e^{nf(y)} d\nu_n(y) \leq \int_A e^{nf_M(y)} d\nu_n(y) + \int_{\{f(y) \geq M\} \cap \bar{A}} e^{nf(y)} d\nu_n(y)$$

et le lemme B.6 entraîne que

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf(y)} d\nu_n(y) \leq \max \left(\sup_{x \in \bar{A}} (f(x) - I(x)), G_{M,f} \right),$$

avec

$$G_{M,f} = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\{f(x) \geq M\} \cap \bar{A}} e^{nf(x)} d\nu_n(x).$$

En faisant tendre M vers $+\infty$, nous obtenons

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf(y)} d\nu_n(y) \leq \sup_{x \in \bar{A}} (f(x) - J(x)).$$

Ceci démontre le point (b).

(c) Si f est continue et vérifie (*), alors elle vérifie les hypothèses des points (a) et (b) avec l'ensemble $A = \mathcal{X} = \overset{\circ}{A} = \overline{A}$. Ainsi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\mathcal{X}} e^{nf(y)} d\nu_n(y) = \sup_{x \in \mathcal{X}} (f(x) - J(x)).$$

Et cette quantité est finie puisque, pour $M > 0$ assez grand,

$$\int_{\mathcal{X}} e^{nf(y)} d\nu_n(y) \leq e^{nM} + \int_{\{f(y) \geq M\}} e^{nf(y)} d\nu_n(y)$$

donc, d'après le lemme B.6,

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\mathcal{X}} e^{nf(y)} d\nu_n(y) \leq \max(M, G_{M,f}) < +\infty.$$

Ceci termine la démonstration du lemme. □

Corollaire B.8. Soit \mathcal{X} un espace régulier muni de sa tribu borélienne \mathcal{B} . Soit $(\nu_n)_{n \geq 1}$ une suite de mesures de probabilité sur (\mathcal{X}, d) satisfaisant le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la bonne fonction de taux J . Soit $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue telle que

$$\forall n \geq 1 \quad \int_{\mathcal{X}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) < +\infty.$$

Supposons que f est bornée ou vérifie

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\{f(x) \geq M\}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) = -\infty.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons μ_n la mesure de probabilité sur \mathcal{X} de densité

$$x \mapsto e^{nf(x)} \left(\int_{\mathcal{X}} e^{nf(y)} d\nu_n(y) \right)^{-1}$$

par rapport à ν_n . Alors $(\mu_n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations sur \mathcal{X} de vitesse n , gouverné par la fonction de taux

$$J - f - \inf_{y \in \mathcal{X}} (J(y) - f(y)).$$

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{X}$. Nous avons

$$\frac{1}{n} \ln \mu_n(A) = \frac{1}{n} \ln \int_A e^{nf(x)} d\nu_n(x) - \frac{1}{n} \ln \int_{\mathcal{X}} e^{nf(x)} d\nu_n(x).$$

Comme f est continue, le lemme B.7 implique que

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(A) \geq \sup_{\overset{\circ}{A}} (f - J) - \sup_{\mathcal{X}} (f - J) = - \inf_{\overset{\circ}{A}} \left(J - f - \inf_{\mathcal{X}} (J - f) \right),$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \mu_n(A) \leq \sup_{\overline{A}} (f - J) - \sup_{\mathcal{X}} (f - J) = - \inf_{\overline{A}} \left(J - f - \inf_{\mathcal{X}} (J - f) \right).$$

D'où le principe de grandes déviations annoncé. □

Terminons ce paragraphe par une proposition donnant une condition pour que l'hypothèse conduisant à la borne supérieure du lemme de Varadhan soit vérifiée.

Proposition B.9. Soit ν une mesure de probabilité sur \mathbb{R}^d . Notons ν_n la loi de S_n/n où S_n est la somme de n variables aléatoires indépendantes et de même loi ν . Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^d et à valeurs dans \mathbb{R} . Supposons qu'il existe une fonction convexe h sur \mathbb{R}^d telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \quad f(x) \leq h(x)$$

et vérifiant

$$\forall \alpha > 0 \quad \int_{\mathbb{R}^d} e^{\alpha h(x)} d\nu(x) < +\infty.$$

Alors

$$\lim_{M \rightarrow +\infty} \limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\{f(x) \geq M\}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) = -\infty.$$

La démonstration de ce résultat s'inspire de celle du théorème 2.2 de [24].

Démonstration. Notons $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Pour $M > 0$, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\{f(x) \geq M\}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{kM \leq f(x) \leq (k+1)M\}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{n(k+1)M} \mathbb{P} \left(f \left(\frac{S_n}{n} \right) \geq kM \right). \end{aligned}$$

Le fait que $f \leq h$ et la convexité de h entraînent que

$$\begin{aligned} \int_{\{f(x) \geq M\}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{n(k+1)M} \mathbb{P} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n h(X_j) \geq kM \right) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{n(k+1)M} \mathbb{P} \left(\exp \left(3 \sum_{j=1}^n h(X_j) \right) \geq e^{3nkM} \right). \end{aligned}$$

Il découle de l'inégalité de Markov et de l'indépendance des X_i que

$$\begin{aligned} \mathbb{P} \left(\exp \left(3 \sum_{j=1}^n h(X_j) \right) \geq e^{3nkM} \right) &\leq e^{-3nkM} \mathbb{E} \left(\exp \left(3 \sum_{j=1}^n h(X_j) \right) \right) \\ &= e^{-3nkM} \mathbb{E} \left(\prod_{j=1}^n e^{3h(X_j)} \right). \end{aligned}$$

Notons

$$K = \mathbb{E} \left(e^{3h(X_1)} \right) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{3h(x)} d\nu(x) < +\infty.$$

Il vient alors

$$\begin{aligned} \int_{\{f(x) \geq M\}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} e^{n(k+1)M} e^{-3nkM} K^n \\ &= e^{nM} K^n \sum_{k=1}^{\infty} e^{-2knM} = K^n e^{-nM} (1 - e^{-2nM})^{-1}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln \int_{\{f(x) \geq M\}} e^{nf(x)} d\nu_n(x) = -M + \ln K$$

et cette quantité tend vers $-\infty$ quand M tend vers $+\infty$. □

4) Le théorème de Cramér en dimension finie

Théorème B.10 (Cramér). Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées et à valeurs dans \mathbb{R}^d , $d \geq 1$. Définissons la Log-Laplace de X_1 par

$$L : \lambda \in \mathbb{R}^d \mapsto \ln \mathbb{E}(e^{\langle \lambda, X_1 \rangle}) \in] - \infty, +\infty]$$

et sa transformée de Cramér par

$$J : x \in \mathbb{R}^d \mapsto L^*(x) = \sup_{\lambda \in \mathbb{R}^d} (\langle \lambda, x \rangle - L(\lambda)).$$

Pour tout $n \geq 1$, posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors

(a) $(S_n/n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations faible de vitesse n , gouverné par la fonction de taux convexe J .

(b) Si $d = 1$ alors $(S_n/n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par J .

(c) Si L est finie au voisinage de 0 alors $(S_n/n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par la bonne fonction de taux J .

En particulier, si la loi des X_i , $i \geq 1$, est $(\delta_{-1} + \delta_1)/2$, alors $(S_n/n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations de vitesse n , gouverné par

$$J : x \in [0, 1] \mapsto \frac{1+x}{2} \ln(1+x) + \frac{1-x}{2} \ln(1-x).$$

5) Le théorème de Sanov

Soit E un espace quelconque muni d'une tribu \mathcal{E} . Notons $B(E)$ l'ensemble des fonctions mesurables bornées sur E . Nous munissons $\mathcal{M}_1(E)$, l'ensemble des mesures de probabilité sur E , de la τ -topologie. Il s'agit de la topologie la moins fine sur $\mathcal{M}_1(E)$ qui rende continues les applications

$$\nu \in \mathcal{M}_1(E) \mapsto \int_E f(z) d\nu(z), \quad f \in B(E).$$

Nous munissons aussi $\mathcal{M}_1(E)$ de la tribu cylindrique \mathcal{B}^{cy} , la tribu la moins fine sur $\mathcal{M}_1(E)$ qui rende mesurables les applications ci-dessus.

Soit $\nu \in \mathcal{M}_1(E)$. Nous définissons $H(\cdot | \nu)$ l'entropie relative par rapport à ν par

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E) \quad H(\mu | \nu) = \begin{cases} \int_E f(z) \ln f(z) d\nu(z) & \text{si } \mu \ll \nu \text{ et } f = \frac{d\mu}{d\nu}, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Théorème B.11 (Sanov). Soient $\nu \in \mathcal{M}_1(E)$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi ν . Pour tout $n \geq 1$, nous définissons la mesure empirique

$$M_n = \frac{1}{n} (\delta_{X_1} + \dots + \delta_{X_n}).$$

Alors $(M_n)_{n \geq 1}$ satisfait le principe de grandes déviations sur $(\mathcal{M}_1(E), \mathcal{B}^{cy})$ muni de la τ -topologie, de vitesse n et gouverné par la bonne fonction de taux convexe $H(\cdot | \nu)$.

Index

- (C) , 98
 (V) , 105
 (Σ_n) , 222
 $(u(x, y), v(x, y))$, 66
 $(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$, 164
 A_I , 66, 148
 A_J , 54
 A_L , 164
 $A_{n,\gamma}$, 203
 $C_0(E)$, 199
 C_n , 37
 D_I , 148
 D_J , 47
 D_L , 46
 D_M , 98
 D_L , 162
 D_{Λ} , 162
 D_{Λ} , 66, 148
 D_n^+ , 27, 145
 E_n , 201, 209
 $E_{n,\gamma}$, 203
 $F(x, M)$, 147
 $F(x, y)$, 45
 $F^o(x, M)$, 149
 $F_{\beta}(u)$, 202
 $F_{\infty}(u, v, w)$, 212
 $F_{n,\beta}(u)$, 202
 $F_{n,f}$, 232, 237
 $F_n(u, v, w)$, 211
 $G(x, y)$, 46
 G_1, G_2, G_3, R_n , 227
 $G_{\beta}(x)$, 252
 $H(\mu|\rho)$, 123, 125
 $H(x, y, z)$, 178
 H_f, K_f , 232, 237
 $H_{n,\beta}(x)$, 200
 $H_n(x)$, 207
 $I(x)$, 251
 $I(x, M)$, 148
 $I(x, y)$, 23, 45
 $I_{\bullet}(x, y, z)$, 162
 $J(x)$, 47
 $J_{\beta}(x)$, 252
 $L(x)$, 46
 L_{∞}^* , 224
 L_n , 223
 $M(z)$, 98
 $M_4(z)$, 152
 M_n , 24, 121
 $M_n(t, A)$, 224
 $M_{n,\beta}$, 122
 O_d , 148
 $P_n((u, v, w), (r, s, t))$, 209
 $P_n(u, v)$, 201
 $P_{n,\gamma}(u, v)$, 203
 $Q_n(x, A)$, 196
 $Q_{n,i}(x, A)$, 196
 $R(x, y, z)$, 162
 $R_n^{(0)}$, 227
 $R_n(x, y, z)$, 178
 $S_n^c(j), S_n^e(j)$, 209
 $S_n(j)$, 201, 209
 $S_n(t)$, 236
 $S_n[y]$, 222
 $T_n(j), T_n^c(j)$, 209
 $T_n[y]$, 222
 $U_n(t, A)$, 227
 X_n^k , 19, 21, 27, 28
 $X_n^k(j)$, 196, 200, 207
 $X_n^k(t)$, 31, 223
 $Z_{n,g}^*$, 26
 Z_n , 21, 27, 97, 145
 $Z_{H,n}$, 178
 Z_n , 160
 $Z_{n,H,\rho}$, 195
 $Z_{n,g}$, 26
 $Z_n(\beta)$, 19
 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^d}$, 44
 \mathcal{C} , 48
 \mathcal{C}_{ρ} , 66, 148
 Δ , 45
 Δ^* , 45, 146
 $\mathcal{D}([0, +\infty[, E])$, 199
 $\mathcal{D}([0, T], \mathbb{R})$, 246
 \mathcal{F} , 124, 127
 $\Gamma(x)$, 19, 34
 $\Lambda(u)$, 251
 $\Lambda(u, A)$, 147
 $\Lambda(u, v)$, 45
 $\Lambda_{\bullet}(u, v, w)$, 162
 \mathcal{L} , 227, 229
 \mathcal{L}^* , 231
 $\mathcal{M}^{\pm}(\mathbb{R})$, 227
 \mathcal{M}_1 , 24, 121
 $\mathcal{M}_{n,f}$, 242
 $\Phi_0(x)$, 230
 $S_d^{++}(\mathbb{R})$, 137
 $S_d^+(\mathbb{R})$, 146

Θ , 162
 Θ^* , 162
 \mathcal{Y} , 124
 \mathcal{Y}_L , 122
 $\alpha_i(x, y)$, 196
 ε_δ , 256
 $\kappa_i(x, u)$, 195
 $\langle \Phi, \nu \rangle$, 227
 \mathbf{z}, \mathbf{z}^2 , 227
 D_x^2 , 54
 D_x , 54
 Log , 34
 \mathcal{T} , 209
 μ_{2k} , 22, 28
 $\mu_{n,H,\rho}$, 195
 $\mu_{n,\rho,\beta}$, 19
 μ_x , 56
 ∇ , 54
 ν_n , 97
 $\nu_n(x_1, \dots, x_n)$, 227
 ν_ρ , 34, 147
 $\xrightarrow{\mathcal{L}}$, 17
 $\varphi_{n,c}$, 99
 $\psi_n(x)$, 97
 ψ_β , 256
 $\rho_{u,A}$, 149
 σ^2 , 19, 22, 28
 τ_n^k , 242
 $\hat{x}_i(z)$, 196
 $\tilde{R}_{n,f}$, 232
 $\tilde{\mu}_{n,\rho}^*$, 25
 $\tilde{\mu}_{n,\rho,g}^*$, 26
 $\tilde{\mu}_{H,n,\rho}$, 28
 $\tilde{\mu}_{\bullet,n,\rho}$, 160
 $\tilde{\mu}_{n,\rho,g}$, 26
 $\tilde{\mu}_{n,\rho}$, 21, 145
 $\tilde{\nu}_{\bullet,n,\rho}$, 162
 $\tilde{\nu}_{n,\rho}$, 45, 147
 $\tilde{\theta}_{n,\rho}$, 122
 a , 168
 $b(x)$, 253
 $f_2(x, y)$, 90
 $f_3(x, y, z)$, 186
 $f_j(u, v)$, 80
 $f_j(u, v, w)$, 164
 $g \in C_c^2(\mathbb{R}^n)$, 218
 $k(x)$, 98
 $k_c(x)$, 98
 $m(\beta)$, 19
 $p(x_1, \dots, x_d)$, 105
 $q(y, z)$, 168, 176

Bibliographie

- [1] Cristina Andriani and Paolo Baldi. Sharp estimates of deviations of the sample mean in many dimensions. *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.*, 33(3):371–385, 1997.
- [2] Markus Josef Aschwanden (Editor). *Self-Organized Criticality Systems*. Open Academic Press, 2013.
- [3] Raghu Raj Bahadur and R. Ranga Rao. On deviations of the sample mean. *Ann. Math. Statist.*, 31:1015–1027, 1960.
- [4] Per Bak. *How nature works*. Copernicus, 1996. The science of self-organized criticality.
- [5] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality: An explanation of $1/f$ noise. *Phys. Rev. Lett.*, 59:381–384, 1987.
- [6] Per Bak, Chao Tang, and Kurt Wiesenfeld. Self-organized criticality. *Phys. Rev. A (3)*, 38(1):364–374, 1988.
- [7] Jöran Bergh and Jörgen Löfström. *Interpolation spaces. An introduction*. Springer-Verlag, 1976. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223.
- [8] Patrick Billingsley. *Convergence of probability measures*. Wiley Series in Probability and Statistics: Probability and Statistics. John Wiley & Sons Inc., second edition, 1999. A Wiley-Interscience Publication.
- [9] A. A. Borovkov and A. A. Mogulskii. Large deviations and testing statistical hypotheses. I. Large deviations of sums of random vectors. *Siberian Adv. Math.*, 2(3):52–120, 1992. Siberian Advances in Mathematics.
- [10] Stéphane Boucheron, Gábor Lugosi, and Pascal Massart. *Concentration Inequalities: A Nonasymptotic Theory of Independence*. Oxford University Press, 2013.
- [11] David R. Brillinger. A note on the rate of convergence of a mean. *Biometrika*, 49:574–576, 1962.
- [12] Raphaël Cerf. *On Cramér’s theory in infinite dimensions*, volume 23 of *Panoramas et Synthèses*. Société Mathématique de France, 2007.
- [13] Raphaël Cerf and Matthias Gorny. An exponential inequality for symmetric random variables. *Amer. Math. Monthly*, 122(8):786–789, 2015.
- [14] Raphaël Cerf and Matthias Gorny. A lower bound on the relative entropy with respect to a symmetric probability. *Electron. Commun. Probab.*, 20:no. 5, 5, 2015.
- [15] Raphaël Cerf and Matthias Gorny. A Curie–Weiss model of self-organized criticality. *Ann. Probab.*, 44(1):444–478, 2016.
- [16] Kim Christensen and Nicholas R. Moloney. *Complexity and criticality*, volume 1 of *Imperial College Press Advanced Physics Texts*. Imperial College Press, 2005.
- [17] Francesca Collet and Paolo Dai Pra. The role of disorder in the dynamics of critical fluctuations of mean field models. *Electron. J. Probab.*, 17(26):1–40, 2012.
- [18] Francis Comets and Theodor Eisele. Asymptotic dynamics, noncritical and critical fluctuations for a geometric long-range interacting model. *Comm. Math. Phys.*, 118(4):531–567, 1988.
- [19] Donald A. Dawson. Critical dynamics and fluctuations for a mean-field model of cooperative behavior. *J. Statist. Phys.*, 31(1):29–85, 1983.
- [20] Jan de Boer, Bernard Derrida, Henrik Flyvbjerg, Andrew D. Jackson, and Tilo Wettig. Simple Model of Self-Organized Biological Evolution. *Phys. Rev. Lett.*, 73:906–909, 1994.
- [21] Victor H. de la Peña, Tze Leung Lai, and Qi-Man Shao. *Self-normalized processes: Limit theory and statistical applications*. Probability and its Applications. Springer-Verlag, Berlin, 2009.

- [22] Amir Dembo and Ofer Zeitouni. *Large deviations techniques and applications*, volume 38 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, 2010.
- [23] Deepak Dhar. Theoretical studies of self-organized criticality. *Phys. A*, 369(1):29–70, 2006.
- [24] Theodor Eisele and Richard S. Ellis. Multiple phase transitions in the generalized Curie-Weiss model. *J. Statist. Phys.*, 52(1-2):161–202, 1988.
- [25] Richard S. Ellis. *Entropy, large deviations, and statistical mechanics*. Classics in Maths. Springer-Verlag, 2006.
- [26] Richard S. Ellis and Charles M. Newman. Limit theorems for sums of dependent random variables occurring in statistical mechanics. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 44(2):117–139, 1978.
- [27] Stewart N. Ethier and Thomas G. Kurtz. *Markov Processes : Characterization and Convergence*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics: Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons, Inc., 1986.
- [28] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II*. Second edition. John Wiley & Sons Inc., 1971.
- [29] Bernard Gaveau and Lawrence S. Schulman. Fluctuations in mean-field self-organized criticality. *J. Statist. Phys.*, 74(3-4):607–630, 1994.
- [30] Matthias Gorny. Le modèle d'Ising Curie-Weiss et ses généralisations. *Master Thesis, Université Paris Sud*, 2012.
- [31] Matthias Gorny. A Curie-Weiss model of self-organized criticality: the Gaussian case. *Markov Process. Related Fields*, 20(3):563–576, 2014.
- [32] Matthias Gorny. A self-interaction leading to fluctuations of order $n^{5/6}$. *Markov Process. Related Fields*, 21(2):205–248, 2015.
- [33] Matthias Gorny. The Curie-Weiss Model of SOC in Higher Dimension. preprint, 2015.
- [34] Matthias Gorny. A Dynamical Curie-Weiss model of SOC: the Gaussian case. *Ann. Inst. H. Poin.*, to appear, 2016.
- [35] Matthias Gorny. The Cramér condition for the Curie-Weiss model of SOC. *Braz. J. Probab. Stat.*, 30(3):401–431, 2016.
- [36] Matthias Gorny and S. R. S. Varadhan. Fluctuations of the self-normalized sum in the Curie-Weiss model of SOC. *J. Stat. Phys.*, 160(3):513–518, 2015.
- [37] Theodore E. Harris. The existence of stationary measures for certain Markov processes. *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1954–1955, vol. II*, pages 113–124, 1956.
- [38] W. Keith Hastings. Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications. *Biometrika*, 57(1):97–109, 1970.
- [39] Nobuyuki Ikeda and Shinzo Watanabe. *Stochastic differential equations and diffusion processes*, volume 24 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co, 1981.
- [40] John G. Kemeny and J. Laurie Snell. *Finite Markov Chains: With a New Appendix "Generalization of a Fundamental Matrix"*. Undergraduate Texts in Mathematics. Springer New York, 1983.
- [41] Thomas G. Kurtz. Solutions of ordinary differential equations as limits of pure jump Markov processes. *J. Appl. Probability*, 7:49–58, 1970.
- [42] Jean-François Le Gall. Intégration, Probabilités et Processus Aléatoires (Cours de l'ENS). <http://www.math.u-psud.fr/~jflgall/IPPA2.pdf>, 2006.
- [43] Jean-François Le Gall. *Mouvement Brownien, Martingales Et Calcul Stochastique*. Mathématiques et Applications. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

- [44] Anders Martin-Löf. A Laplace approximation for sums of independent random variables. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 59(1):101–115, 1982.
- [45] Nicholas Metropolis, Arianna W. Rosenbluth, Marshall N. Rosenbluth, Augusta H. Teller, and Edward Teller. Equation of State Calculations by Fast Computing Machines. *Journal of Chemical Physics*, 21:1087–1092, 1953.
- [46] Umberto Mosco. On the continuity of the Young-Fenchel transform. *J. Math. Anal. Appl.*, 35:518–535, 1971.
- [47] George C. Papanicolaou, Daniel W. Stroock, and S. R. Srinivasa Varadhan. Martingale approach to some limit theorems. *Papers from the Duke Turbulence Conference (Duke Univ., Durham, N.C., 1976), Paper No. 6*, pages ii+120 pp. Duke Univ. Math. Ser., Vol. III, 1977.
- [48] Robert Paris. Qu'est-ce que la criticalité auto-organisée? *www.matierevolution.fr*, livre 1, chap. 03, 2009.
- [49] Gunnar Pruessner. *Self-Organised Criticality: Theory, Models and Characterisation*. Self-organised Criticality: Theory, Models, and Characterisation. Cambridge University Press, 2012.
- [50] Balázs Ráth and Bálint Tóth. Erdős-Rényi random graphs + forest fires = self-organized criticality. *Electron. J. Probab.*, 14(45):1290–1327, 2009.
- [51] Gareth O. Roberts and Jeffrey S. Rosenthal. Harris recurrence of Metropolis-within-Gibbs and trans-dimensional Markov chains. *Ann. Appl. Probab.*, 16(4):2123–2139, 2006.
- [52] Gareth O. Roberts and Richard L. Tweedie. Exponential convergence of Langevin distributions and their discrete approximations. *Bernoulli*, 2(4):341–363, 1996.
- [53] R. Tyrrell Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Mathematical Series, No. 28. Princeton University Press, 1970.
- [54] Jeffrey S. Rosenthal. A review of asymptotic convergence for general state space Markov chains. *Far East J. Theor. Stat.*, 5(1):37–50, 2001.
- [55] Walter Rudin. *Functional analysis*. McGraw-Hill series in higher mathematics. McGraw-Hill, 1973.
- [56] Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., third edition, 1987.
- [57] Roberto H. Schonmann. Slow droplet-driven relaxation of stochastic Ising models in the vicinity of the phase coexistence region. *Comm. Math. Phys.*, 161(1):1–49, 1994.
- [58] Laurent Schwartz. *Analyse II : Calcul différentiel et équations différentielles*. Collection Enseignement des sciences. Hermann, 1992.
- [59] Qi-Man Shao and Qiyang Wang. Self-normalized limit theorems: a survey. *Probab. Surv.*, 10:69–93, 2013.
- [60] Didier Sornette. *Critical phenomena in natural sciences*. Springer Series in Synergetics. Springer-Verlag, second edition, 2006. Chaos, fractals, selforganization and disorder: concepts and tools.
- [61] Daniel W. Stroock and S. R. Srinivasa Varadhan. *Multidimensional diffusion processes*, volume 233 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, 1979.
- [62] Donald L. Turcotte. Self-organized criticality. *Rep. Progr. Phys.*, 62(10):1377, 1999.