

Cahier de texte

Année scolaire 2024-2025

Semaine du 7 avril 2025

jeudi (8h-12h et 14h-16h)

▷ **Cours.** Chapitre 30 – Espaces vectoriels de dimension finie

- Dimension d'un espace vectoriel.
 - ★ Familles libres et génératrices en dimension finie. Bases de polynômes échelonnées en degré de $\mathbb{K}_n[X]$. Application aux suites récurrentes linéaires d'ordre 2.
- Sous-espaces vectoriels et dimension.
 - ★ Dimension d'un sous-espace vectoriel. Critère d'égalité de sous-espaces vectoriel en cas d'inclusion et même dimension. Droites vectorielles et plans vectoriels.
 - ★ Existence d'un supplémentaire en dimension finie. Dimension d'un supplémentaire. Formule de Grassmann. CNS pour que deux espaces soient supplémentaires avec la dimension.
 - ★ Rang d'une famille de vecteurs. CNS pour que la famille soit libre/génératrice/une base. Invariance du rang par opérations élémentaires. Le rang d'une famille finie de vecteurs est le maximum des cardinaux de ses sous-familles libres.
- Applications linéaires en dimension finie.
 - ★ Reformulation du théorème de caractérisation par l'image d'une base. Si E est de dimension finie $n \geq 2$, alors l'anneau $\mathcal{L}(E)$ est non commutatif. CNS d'existence d'injections, de surjection, de bijection linéaire de E dans F en comparant les dimensions de E et F .
 - ★ Isomorphismes en dimension finie. CNS pour que deux espaces vectoriels soient isomorphes avec l'égalité des dimensions. Tout espace vectoriel de dimension $n \geq 1$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. CNS par transformation d'une base en une base. Le rang d'une famille de vecteurs est invariant par isomorphisme.
 - ★ Rang d'une application linéaire.
 - Application linéaire de rang fini. Cas d'un rang nul. Cas d'un espace de départ de dimension finie. CNS d'injectivité avec le rang. CNS de surjectivité avec le rang.
 - Applications linéaires entre espaces vectoriels de mêmes dimensions finies (l'injectivité est équivalente à la surjectivité). Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible (pour la composition).
 - En dimension quelconque, si $\text{Ker}(f)$ admet un supplémentaire S , alors f induit un isomorphisme de S sur $\text{Im}(f)$ (forme géométrique du théorème du rang). Théorème du rang quand l'espace de départ est de dimension finie.
 - Invariance du rang par composition à gauche ou à droite par un isomorphisme. Le rang d'une composition est majoré par le maximum des deux rangs.

▷ **Exercices.**

- TD n° 29 : 39
- TD n° 30 : 1,5,17

mercredi (13h-15h)

▷ **Cours.** Chapitre 30 – Espaces vectoriels de dimension finie

- Dimension d'un espace vectoriel.
 - ★ Notion d'espace vectoriel de dimension finie.

- ★ Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base incomplète/extraite.
- ★ Théorème de l'échange. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille formée d'au moins $n + 1$ vecteurs est liée. Critère pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension infinie. Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
- ★ Exemples : espace de dimension 0, dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, de l'ensemble des solutions des EDL homogènes d'ordre 1 ou 2.
- ★ Dimension d'un produit d'espaces vectoriels.
- ★ Familles libres et génératrices en dimension finie.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 29 : 14,17,18,30,32,35,36

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 29 – Applications linéaires

- Détermination d'une application linéaire.
 - ★ Exemple d'application du théorème de caractérisation par l'image d'une base.
- Projections, projecteurs, symétries, involutions
 - ★ Projection p sur F parallèlement à G . Linéarité, formules $p^2 = p$, $\text{Ker}(p) = G = \text{Im}(\text{Id}_E - p)$, $\text{Im}(p) = F = \text{Ker}(\text{Id}_E - p)$. Projecteurs. Un projecteur est une projection sur son image parallèlement à son noyau.
 - ★ Symétrie s par rapport à F parallèlement à G . Projecteur associé. Linéarité. Formule $s^2 = \text{Id}_E$. Une symétrie est un automorphisme qui est sa propre bijection réciproque. Formules $F = \{x \in E \mid s(x) = x\}$ et $G = \{x \in E \mid s(x) = -x\}$. Involutions linéaires.

▷ Exercices.

- TD n° 29 : 1,5,6,9,10,15,20,25,28

Semaine du 31 mars 2025

jeudi (10h-12h)

▷ Cours. Chapitre 29 – Applications linéaires

- Image et noyau d'une application linéaire.
 - ★ Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. CNS d'injectivité.
- Détermination d'une application linéaire.
 - ★ Image d'une famille génératrice, liée, génératrice. Théorème de caractérisation par l'image d'une base. CNS de surjectivité/injectivité/bijektivité selon que l'image de la base est génératrice/libre/une base.
 - ★ Détermination par restriction à ses sous-espaces supplémentaire.

mercredi (13h-15h)

▷ Cours. Chapitre 29 – Applications linéaires

- Opérations sur les applications linéaires.
 - ★ Composition d'applications linéaires. Bilinearité de la composition.
 - ★ Réciproque d'un isomorphisme.

- ★ Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. Non commutatif, non intègre. Notation vu au lieu de $v \circ u$. Propriétés générales héritées de la structure d'anneau (dont binôme de Newton en cas d'endomorphismes qui commutent). Groupe $GL(E)$. Utilisation d'un polynôme annulateur.
- Image et noyau d'une application linéaire.
 - ★ Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Formule $f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A))$.
 - ★ Image d'une application linéaire. Formule $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x_i))_{i \in I}$ lorsque $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 28 : 9,11,19,27,32

lundi (8h-12h)

- ▷ **Cours.** Chapitre 28 – Espaces vectoriels
 - Somme de sous-espaces vectoriels.
 - ★ Théorème de concaténation des bases. Base adaptée à une somme directe.
 - ★ Sous-espaces supplémentaires. CNS héritées du paragraphe précédent.
- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 28 : 1,2,3,4,5,6,8,9,13,19,23
- ▷ **Cours.** Chapitre 29 – Applications linéaires
 - Notion d'application linéaire.
 - ★ Définition. Caractérisation. Condition nécessaire sur l'image de 0. Forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Notations $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$, $GL(E)$. Image d'une combinaison linéaire.
 - ★ Nombreux exemples. Identité de E . Homothéties de E .
 - Opérations sur les applications linéaires.
 - ★ Restrictions d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel. Endomorphisme induit.
 - ★ Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$.

Semaine du 24 mars 2025

jeudi (8h-12h)

- ▷ **Cours.** Chapitre 28 – Espaces vectoriels
 - Sous-espaces vectoriels
 - ★ Sous-espace engendré par une partie.
 - $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A . $\text{Vect}(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A . Convention $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
 - Ajouter/retirer un vecteur d'un Vect. Un Vect est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs.
 - Familles génératrices, libres, liées, bases.
 - ★ Famille/partie génératrice. Opération sur les vecteurs d'une famille génératrice.
 - ★ Famille/partie libres ou liées. Notion de combinaison linéaire triviale. Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Cas des familles à 1 ou 2 éléments. Convention que $\emptyset$ est libre. Ajouter/retirer un vecteur d'une famille libre. Le cas des familles de polynômes échelonnées en degré. Unicité des coordonnées sur une famille libre.

- ★ Bases d'un espace vectoriel. Exemples des bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[K]$ et $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition selon une base
- Somme de sous-espaces vectoriels.
 - ★ Notion de somme de deux sous-espaces vectoriels. $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel content F_1 et F_2 . $F_1 + F_2 = \text{Vect}(F_1 \cup F_2)$. La concaténation d'une famille génératrice de F_1 et d'une famille génératrice de F_2 est une famille génératrice de $F_1 + F_2$.
 - ★ Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Notation $F_1 \oplus F_2$. CNS avec l'intersection réduire à 0_E .

mercredi (13h-15h)

▷ Cours. Chapitre 28 – Espaces vectoriels

- Sous-espaces vectoriels
 - ★ Interprétation géométrique. Droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul. Plan vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires.
 - ★ Exemples usuels : l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^2$ et $\mathbb{K}^3$. Sous-espaces vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^n(D, \mathbb{K})$, $\mathcal{D}^1(D, \mathbb{K})$.
 - ★ Intersection de sous-espaces vectoriels.
 - ★ Sous-espace engendré par une partie.
 - $\text{Vect}(A)$ est défini en tant que l'ensemble des vecteurs de E s'écrivant comme combinaison linéaire de vecteurs de A .
 - Sous-espace engendré par une famille. Égalité entre $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ et $\text{Vect}\{x_i \mid i \in I\}$ rendant possible de jongler entre partie et famille. Cas particulier d'un ensemble fini, d'une partie finie.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 27 : 5,9,24,25,29,30

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 28 – Espaces vectoriels

- Structure d'espace vectoriel
 - ★ Rappel sur les vecteurs du plan et de l'espace.
 - ★ Loi externe. Exemples usuels.
 - ★ Définition d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Notion de vecteur, de scalaire, de vecteur nul, d'opposé, de soustraction.
 - ★ Un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.
 - ★ Exemples usuels : $\mathbb{K}^n$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}^D$, $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$. Produits cartésien d'espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions de X dans un espace vectoriel.
 - ★ Premières propriétés des espaces vectoriel : propriétés héritées des groupes additifs, propriétés des zéros, propriétés de la soustraction, égalité des notations nx et $n \cdot x$.
 - ★ Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Vecteurs colinéaires. Familles presque nulles (ou à support fini). Combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs (CL avec une famille presque nulle de scalaire). Notion de coefficient devant un vecteur.
- Sous-espaces vectoriels
 - ★ Définition comme une partie stable pour $+$ et $\cdot$ qui est encore un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E contient le neutre de E . Caractérisations des sous-espaces vectoriels. Stabilité par combinaison linéaire.

▷ Exercices.

- TD n° 27 : 2,8,11,16,20,21,29

Semaine du 17 mars 2025

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 27 – Séries numériques

- Séries à termes positifs.
 - ★ Méthodes générales. Exemple des séries de Bertrand.
- Séries absolument convergentes.
 - ★ Une série absolument convergente converge. Inégalité triangulaire.
 - ★ Théorèmes de comparaison pour les séries absolument convergentes.
 - ★ Règle de d'Alembert (HP)
 - ★ Utilisation du lien suite/série. Exemple de la constante d'Euler. Preuve de la formule de Stirling.
 - ★ Séries semi-convergente. Critère spécial des séries alternées. Exemple de la transformation d'Abel. Quelques mots sur les pathologie des séries semi-convergentes.
- Compléments.
 - ★ Existence de la fonction exponentielle
 - ★ Existence des fonctions cosinus et sinus.
 - ★ Développement décimal d'un réel.

▷ Exercices.

- TD n° 27 : 1

mercredi (13h-15h)

▷ Cours. Chapitre 27 – Séries numériques

- Généralités sur les séries numériques.
 - ★ Changement d'indice $n = k - p$ dans la somme d'une série convergente. Linéarité. Parties réelles/imaginaires d'une série.
 - ★ Condition nécessaire de convergence d'une série. Divergence grossière.
 - ★ Lien suite-série (série télescopique associée à une suite). Théorème de convergence. Lien limite-somme en cas de convergence.
 - ★ Séries géométriques. Séries exponentielles.
- Séries à termes positifs.
 - ★ Majoration des sommes partielles.
 - ★ Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs : avec inégalités, équivalents, o et O .
 - ★ Méthode de comparaison série-intégrale. Théorème de convergence. Séries de Riemann.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 26 : 19,22(gr.2),25,35,38,40,42(gr.2),43(gr.1)

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 26 – Analyse asymptotique

Partie C : Problèmes d'analyse asymptotique

- Allure locale des graphes
 - ★ Position relation d'une courbe à une tangente.
 - ★ Condition suffisante d'extremum local.

- ★ Détermination d'asymptotes en $\pm\infty$.
- Développement asymptotique
 - ★ Notion de développement asymptotique. Exemple de $\ln(n!)$, exemple d'approximation par l'équation d'une asymptote.
 - ★ Exemples de suites et fonctions définies à l'aide d'une intégrale.
 - ★ Exemple d'une suite définie par récurrence.
 - ★ Exemple d'une suite définie implicitement.
 - ★ Exemple de fonction réciproque.
- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 26 : 17,18,30
- ▷ **Cours.** Chapitre 27 – Séries numériques
 - Généralités sur les séries numériques.
 - ★ Notion de série. Terme général. Somme partielle. Premiers exemples.
 - ★ Séries convergentes, divergentes. Somme d'une série convergente. Nature d'une série. Premiers exemples.
 - ★ La nature ne dépend pas des premiers termes. Relation de Chasles. Reste d'une série convergente.

Semaine du 10 mars 2025

samedi (8h-12h)

- ▷ **Devoir surveillé n° 7.**

jeudi (8h-12h)

- ▷ **Cours.** Chapitre 26 – Analyse asymptotique
Partie B : Développements limités
 - Développements limités usuels.
 - ★ Exemples du DL en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à tout ordre.
 - Opérations sur les développements limités.
 - ★ Combinaison linéaire de DL.
 - ★ Produit de DL.
 - ★ Méthode pour composer des DL. Utilisation du DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ pour des quotients de DL.
 - ★ Théorème de primitivation d'un DL. Méthode pour dériver un DL.
- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 26 : 9,11,15,23,26

mercredi (13h-15h)

- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 26 : 2,4,5,10
- ▷ **Cours.** Chapitre 26 – Analyse asymptotique
Partie B : Développements limités
 - Notion de développement limité.
 - ★ Définition. Interprétation. Premiers exemples (réécriture des équivalents usuels, DL de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ à tout ordre).

- ★ Troncature. Unicité du DL. DL d'une fonction paire/impair en 0. Se ramener à un DL en 0. Lien avec les équivalents.
- ★ DL avec un O.
- Théorèmes d'existence de développements limités.
 - ★ CNS d'un DL à l'ordre 0 et à l'ordre 1.
 - ★ L'existence d'un DL à l'ordre $n \geq 2$ n'entraîne pas que f est n fois dérivable.
 - ★ Formule de Taylor-Young (réécriture de celle du chapitre précédent).
- Développements limités usuels.
 - ★ DL en 0 à tout ordre de $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$, $x \mapsto \ln(1 \pm x)$, $x \mapsto (1 + x)^\alpha$, exp, ch, sh, cos, sin et Arctan.
 - ★ DL à l'ordre 3 de tan en 0.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 25 : 6,12
- TD n° 26 : 1,3

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 26 – Analyse asymptotique

Partie A : Relations de comparaison des suites et des fonctions

- Suites négligeables.
 - ★ Définition en terme de quotient qui tend vers 0 (pour des suites dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang). Notation o . Cas particulier de $= o(1)$. Interprétation.
 - ★ Réécriture des croissances comparées.
 - ★ Transitivité. Multiplication par une constante. Produit par une suite. Produit de deux o . Élévation dans une puissance fixe. Passage à la valeur absolue, au module. Somme de deux mêmes o .
- Suites équivalentes.
 - ★ Définition en terme de quotient qui tend vers 1 (pour des suites dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang). Notation $\sim$. Interprétation.
 - ★ Équivalents usuels lorsque $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ de : e^{u_n} , $e^{u_n} - 1$, $\ln(1 + u_n)$, $(1 + u_n)^\alpha - 1$, $\text{sh}(u_n)$, $\text{ch}(u_n)$, $\text{ch}(u_n) - 1$, $\text{th}(u_n)$, $\sin(u_n)$, $\cos(u_n)$, $\cos(u_n) - 1$, $\tan(u_n)$, $\text{Arcsin}(u_n)$, $\text{Arccos}(u_n)$, $\text{Arccos}(u_n) - \frac{\pi}{2}$, $\text{Arctan}(u_n)$. Équivalent de $P(n)$ et $P(1/n)$ lorsque $P \in \mathbb{K}[X]$. Formule de Stirling.
 - ★ Réflexivité, symétrie, transitivité. Signe dans un équivalent. Théorème d'encadrement pour les équivalents. Produit, quotient, passage à une puissance fixe. Passage à la valeur absolue, au module.
 - ★ Liens entre $\sim$ et limites.
 - ★ Liens entre $\sim$ et o : $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + o(v_n)$.
 - ★ Opérations illégales sur les équivalents et comment contourner la loi.
 - Somme d'équivalents : on repasse par les o
 - Passage à la fonction (même continue) dans un équivalent. Méthodes pour dans le cas d'un équivalent à une constante, le cas du logarithme, le cas de l'exponentielle, le cas de la composition d'équivalents usuels (tout doit être redémontré).
 - Passage à une puissance variable : on utilise la notation $u_n^{x_n} = e^{x_n \ln(u_n)}$.
 - Passage à la partie réelle/imaginaire.
- Suites dominées.
 - ★ Définition en terme de quotient borné (pour des suites dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang). Notation O . Cas particulier de $= O(1)$. Interprétation.

- ★ Transitivité. Multiplication par une constante. Produit par une suite. Produit de deux o. Élévation dans une puissance fixe. Passage à la valeur absolue, au module. Somme de deux mêmes o.
- ★ Lien entre O, o et $\sim$.
- Comparaison de fonctions
 - ★ Fonctions négligeables.
 - Définition en terme de quotient qui tend vers 0 (pour des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ sauf éventuellement en a).
 - Réécriture des croissances comparées.
 - Propriétés analogues à celles pour les suites. Substitution par une suite ou par une fonction.
 - ★ Fonctions équivalents.
 - Définition en terme de quotient qui tend vers 1 (pour des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ sauf éventuellement en a).
 - Équivalents usuels en 0 : e^x , $e^x - 1$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha - 1$, $\text{sh}(x)$, $\text{ch}(x)$, $\text{ch}(x) - 1$, $\text{th}(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\cos(x) - 1$, $\tan(x)$, $\text{Arcsin}(x)$, $\text{Arccos}(x)$, $\text{Arccos}(x) - \frac{\pi}{2}$, $\text{Arctan}(x)$.
 - Propriétés analogues à celles pour les suites. Substitution par une suite ou par une fonction.
 - ★ Fonctions dominées.
 - Définition en terme de quotient borné (pour des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $a \in \mathbb{R}$ sauf éventuellement en a).
 - Propriétés analogues à celles pour les suites. Substitution par une suite ou par une fonction.

▷ **Exercices.**

- TD n° 25 : 9

Semaine du 3 mars 2025

jeudi (8h-12h)

▷ **Cours.** Chapitre 25 – Formules de Taylor

- Formule de Taylor avec reste intégral. Caractérisation des fonctions polynomiales. Application à la preuve d'inégalités.
- Inégalité de Taylor-Lagrange. Application : expression de e^x , $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\ln(1+x)$ en tant que limite d'une somme.
- Formule de Taylor-Young.

▷ **Exercices.**

- TD n° 25 : 5

▷ **Cours et exercices.** Groupe symétrique (*Cours effectué par Mme Bocquet dans le cadre d'un stage.*)

mercredi (13h-15h)

▷ **Exercices.**

- TD n° 24 : 14,28,31,37,39

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ **Exercices.**

- TD n° 24 : 8,13,16,19,21,26,27,32,36

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 24 – Intégration sur un segment

- Calcul d'intégrales
 - * Le théorème fondamental de l'analyse. Limite quand on fait converger une borne. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. Preuve de l'IAF complexe. Rappel : formule de calcul par différence d'une primitive en les bornes, formule d'IPP, formule de changement de variable.
 - * Calcul d'intégrale de fonctions continues par morceaux (avec la relation de Chasles).
 - * Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques.
 - * Technique de comparaison à une intégrale
 - * Fonctions et suites définies par une intégrale (cas des bornes variables et intégrande fixe, cas des bornes fixes et intégrande variable).
- Sommes de Riemann
 - * Sommes de Riemann à gauche et à droite. Théorème de convergence pour les fonctions continues par morceaux. Démonstration dans le cas Lipschitzien avec majoration de l'erreur et dans le cas continu. Remarque sur le cas monotone.
 - * Sommes de Riemann à pas quelconque (HP)
 - * Introduction à la méthode des rectangles et des trapèzes

▷ Exercices.

- TD n° 24 : 18

Semaine du 10 février 2025

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 24 – Intégration sur un segment

- Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux
 - * Théorèmes d'approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier. Convergence uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
- Intégrale d'une fonction en escalier.
 - * Définition (la valeur ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée). Notations $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b f$ et $\int_{[a;b]} f$. Interprétation géométrique. Cas d'une fonction constante.
 - * Relation de Chasles. Linéarité. Modification d'un nombre fini de valeurs. Propriété de positivité. Propriété de croissance. Inégalité triangulaire.
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux.
 - * Définition (la valeur ne dépend pas du choix de la suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers la fonction). Notations $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b f$ et $\int_{[a;b]} f$.
 - * Relation de Chasles. Linéarité. Valeur moyenne d'une fonction. Partie réelle et imaginaire d'une intégrale. Modification d'un nombre fini de valeurs. Propriété de positivité. Propriété de croissance. Propriété de stricte positivité (cas d'une fonction continue). Inégalité triangulaire.
 - * Extension aux fonctions continues par morceaux sur un segment (bornes dans le mauvais sens, bornes égales).

▷ Cours. Groupe symétrique (*Cours effectué par Mme Bocquet dans le cadre d'un stage.*)

mercredi (13h-15h)

▷ Cours. Chapitre 24 – Intégration sur un segment

- Continuité uniforme.
 - * Limitation à la notion de continuité.
 - * Fonction uniformément continue (UC). Une fonction UC est continue. Une fonction Lipschitzienne est UC. Exemples et contre-exemples. Méthodes de preuve.
 - * Le théorème de Heine
- Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux
 - * Subdivisions. Pas d'une subdivision. Subdivision régulière. Subdivision plus fine.
 - * Fonctions en escalier sur un segment. Subdivision adaptée. Subdivision adaptée à deux fonctions en escalier. Notation $\mathcal{E}([a; b], \mathbb{K})$. Structure d'anneau commutatif. Stabilité par multiplication externe, par passage au module. Partie réelle et imaginaire d'une fonction en escalier.
 - * Fonctions continue par morceaux sur un segment. Subdivision adaptée. Subdivision adaptée à deux fonctions continue par morceaux. Notation $\mathcal{C}^{pm}([a; b], \mathbb{K})$. Structure d'anneau commutatif. Stabilité par multiplication externe, par passage au module. Partie réelle et imaginaire d'une fonction continue par morceaux. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.
 - * Norme infinie. Inégalité triangulaire.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 23 : 23,24,27
- TD n° 21 : 36

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 23 – Calcul matriciel

- Liens entre matrices et systèmes linéaires
 - * Matrice associée à un système. Un système $AX = B$ est compatible si et seulement si B est CL des colonnes de A . Les solutions de $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, avec X_0 une solution particulière et Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.
 - * Opérations élémentaire sur les lignes et les colonnes. Matrices de transvection, de dilatation, de permutation. Traduction des opérations élémentaires en terme de produit à gauche à droite. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.
 - * Système de Cramer. Unique solution $X = A^{-1}B$. Si $AX = 0$ a une solution non nulle, A n'est pas inversible. Cas de deux lignes ou deux colonnes proportionnelles. Une matrice A est inversible si et seulement si, pour tout second membre Y , le système linéaire $Y = AX$ admet une unique solution.
 - * Cas particulier des matrices diagonales et triangulaires.
 - * Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution de système. Calcul de l'inverse en faisant sur I_n les mêmes opérations et dans le même ordre que celles qui transforment A en I_n (méthode de Gauss-Jordan). On peut choisir les lignes ou les colonnes mais aucun mélange n'est possible.

▷ Exercices.

- TD n° 23 : 7,8,9,15,17,25,28

Semaine du 3 février 2025

samedi (8h-12h)

▷ Devoir surveillé n° 6.

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 23 – Calcul matriciel

- Opérations sur les matrices.
 - ★ Transposition de matrices. Transposée d'une CL, d'un produit.
- Anneau des matrices carrées de taille n .
 - ★ Structure d'anneau. Propriétés des puissances entières (héritées de la structure d'anneau, dont le binôme de Newton et la formule de factorisation $A^p - B^p$).
 - ★ Matrices diagonales. Structure d'anneau commutatif. Produit, puissances de matrices diagonales.
 - ★ Matrices triangulaires supérieures/inférieures. Structure d'anneau non-commutatif. Produit de matrices triangulaires supérieures/inférieures.
 - ★ Matrices symétriques et antisymétriques. Structure de groupe (mais pas d'anneau).
 - ★ Matrices inversibles.
 - Inverse à gauche/droite. Matrice inversible. Si une matrice admet un inverse à gauche ou à droite, elle est inversible (résultat admis pour le moment). Unicité de l'inverse. Groupe linéaire.
 - Inverse de l'inverse, d'un produit, d'une puissance, d'une transposée, d'une multiplication avec un scalaire.
 - Le cas particulier d'une matrice 2×2 .
 - Utilisation d'un polynôme annulateur (sans rentrer dans le détail de cette notion) pour le calcul de l'inverse.
 - Introduction aux matrices nilpotentes.

▷ Exercices.

- TD n° 22 : 2,4,10,11,13

mercredi (13h-15h)

▷ Exercices.

- TD n° 22 : 12

▷ Cours. Chapitre 23 – Calcul matriciel

- Notion de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.
 - ★ Notation en forme de tableau à n lignes et p colonnes. Ligne, colonne, coefficient, indice. Notations $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
 - ★ Matrices/vecteurs lignes, matrices/vecteurs colonnes. Matrices élémentaires. Matrice nulle. Matrice identité.
- Opérations sur les matrices.
 - ★ Addition et multiplication par un scalaire. Propriétés générales. Structure de groupe. Matrice scalaire. Combinaison linéaire de matrices. Toute matrice est CL des matrices élémentaires.
 - ★ Produit de matrices. Associativité. Non-commutativité. Matrices qui commutent. Bilinéarité. Produit par une matrice scalaire. Produit de deux matrices élémentaires avec le symbole de Kronecker. Produit d'une matrice à gauche ou à droite par une matrice élémentaire. Produit par une matrice colonne : AX est CL des colonnes de A .

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 21 : 16(gr.1),48,49,52,61

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 22 – Fractions rationnelles

- Le corps $\mathbb{K}(X)$.
 - ★ Définition de $\mathbb{K}(X)$. Notation sous forme de fraction. Condition d'égalité de deux fractions rationnelles en terme de produit polynomial. Opérations $+$ et $\times$ sur $\mathbb{K}(X)$. Structure de corps. L'application $P \in \mathbb{K}[X] \mapsto \frac{P}{1} \in \mathbb{K}(X)$ est un morphisme d'anneau injectif permettant d'« identifier » P à $\frac{P}{1}$ et $\mathbb{K}[X]$ à un sous-anneau de $\mathbb{K}(X)$. Simplification de fractions rationnelles. Forme irréductible (existence et unicité). CNS pour qu'une fraction rationnelle soit un polynôme.
 - ★ Degré d'une fraction rationnelle. Extension de $+$ et de $\leq$ de $\mathbb{Z}$ à $\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$. Degré d'un produit, degré d'une somme, degré d'une puissance.
 - ★ Partie entière d'une fraction rationnelle F . Il s'agit du reste de la division euclidienne du numérateur par le dénominateur.
 - ★ Zéros et pôles d'une fraction rationnelle (écrite sous forme irréductible). Multiplicité.
 - ★ Fonction rationnelle associée à une fraction rationnelle (écrite sous forme irréductible).
- Décomposition en éléments simples.
 - ★ Décomposition dans $\mathbb{C}(X)$.
 - ★ Décomposition dans $\mathbb{R}(X)$.
 - ★ Techniques pour trouver les coefficients de la décomposition. Lorsque a est un pôle de multiplicité m , multiplication par $(X - a)^m$ et évaluation en a . Rappel des techniques sur les fonctions rationnelles vues dans le chapitre 9.
 - ★ Si λ est un pôle simple, le coefficient devant $\frac{1}{X-\lambda}$ dans la DEES de $\frac{A}{B}$ (forme irréductible) est $\frac{A(\lambda)}{B'(\lambda)}$.
 - ★ DEES de $\frac{P'}{P}$.

▷ Exercices.

- TD n° 21 : 8,44,50,58,60

Semaine du 27 janvier 2025

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 21 – Polynômes

- Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
 - ★ Théorème de D'Alembert-Gauss. Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont exactement les polynômes de degré 1. Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Méthodes. Conséquences sur la divisibilité.
 - ★ Décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$. Méthodes.
- Polynôme d'interpolation de Lagrange

▷ Exercices.

- TD n° 21 : 1,10,18,21,26,34,37

mercredi (13h-15h)

▷ Cours. Chapitre 21 – Polynômes

- Racines d'un polynôme.
 - ★ Rigidité des polynômes. Polynôme avec une infinité de racine. Polynômes coïncidant en plus de racines que leur degré (voire une infinité). Théorème de factorisation de P lorsqu'on connaît le coefficient dominant et $\deg(P)$ racines distinctes.

- ★ Ordre de multiplicité d'une racine. Caractérisation par la factorisation par un polynôme qui ne s'annule pas en la racine. CNS utilisant les dérivées successives. Si $P \in \mathbb{R}[X]$ admet une racine, alors son conjugué est encore racine de P de même multiplicité. Théorème de factorisation en comptant les multiplicités.
- Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$.
 - ★ Polynômes scindés. Le cas des polynômes de degré 2.
 - ★ Relations coefficients/racines lorsque le polynôme est scindé (formules de Viète).

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 20 : 7,9,10,11,16,18

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 21 – Polynômes

- L'anneau $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
 - ★ Intégrité de $\mathbb{K}[X]$. Les éléments inversibles sont les polynômes constants non nuls.
 - ★ Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$. Stabilité par combinaison linéaire.
 - ★ Fonction polynomiale associée. Notation $\tilde{P}$. Évaluation d'un polynôme. Algorithme de Hörner. L'application $P \mapsto \tilde{P}$ est un isomorphisme d'anneau injectif de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}^{\mathbb{K}}$.
 - ★ Composition de polynômes. Degré d'une composée. Lien avec la composition des fonctions polynomiales associées.
 - ★ Dérivée de polynômes. Degré d'une dérivée. Dérivée d'une somme, d'un produit, d'une puissance, d'une multiplication par un scalaire, d'une composée. Lien avec la dérivation des fonctions polynomiales associées. Dérivées successives. Formule de Leibniz. Formule de Taylor pour les polynômes.
- Arithmétique sur $\mathbb{K}[X]$.
 - ★ Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$. Diviseurs et multiples. Condition nécessaire sur le degré. Premières propriétés (réflexivité, transitivité, etc.). CNS pour que deux polynômes soient associés.
 - ★ Théorème de la division euclidienne. Reste nul si et seulement s'il y a divisibilité.
 - ★ PGCDs et PPCMs.
 - Un PGCD est un diviseur commun de degré maximal. Algorithme d'Euclide. Deux PGCD sont associés. L'unique PGCD unitaire de A et B est noté $A \wedge B$.
 - Relation de Bezout. Un diviseur de A et B est un diviseur de $A \wedge B$.
 - Polynômes premiers entre eux. Théorème de Bezout. Théorème de Gauss. Produit de polynômes premiers avec un autre.
 - Un PGCD est un multiple non nul commun de degré minimal. Deux PPCM sont associés. L'unique PPCM unitaire de A et B est noté $A \vee B$. Les polynômes $(A \wedge B)(A \vee B)$ et AB sont associés.
 - Extension de la notion de PGCD à plusieurs polynômes. Associativité. Polynômes premiers entre eux deux à deux ou dans leur ensemble.
 - ★ Polynômes irréductibles. Tout polynôme de degré 1 est irréductible. Décomposition en produit de facteurs irréductibles.
- Racines d'un polynôme.
 - ★ Notion de racine. Caractérisation par factorisation. Lorsque $a_1, \dots, a_n$ sont des racines distinctes de P , alors P est divisible par $(X - a_1) \dots (X - a_n)$.
 - ★ Nombre maximal de racines.

Semaine du 20 janvier 2025

jeudi (8h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 19 : 15,39,40,42
- TD n° 20 : 4,5,9

▷ Cours. Chapitre 21 – Polynômes

- L'anneau $\mathbb{K}[X]$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
 - ★ Construction de $\mathbb{K}[X]$. Suites presque nulles. Deux polynômes sont égaux s'ils ont les mêmes coefficients. Polynôme constant.
 - ★ Somme, produit et multiplication par un scalaire de polynômes. $(\mathbb{K}[X], +, \times)$ est un anneau commutatif. Puissance de polynômes. Combinaisons linéaires de polynômes.
 - ★ Indéterminée X . Notation polynomiale (avec éventuellement une somme faussement infinie). Monôme.
 - ★ Degré d'un polynôme. Convention $-\infty$ pour le polynôme nul. Degré d'une somme, d'un produit, d'une multiplication par une constante, d'une puissance.

mercredi (13h-15h)

▷ Exercices.

- TD n° 19 : 2,14,28,33,35,47

mardi (10h-11h)

Créneau modifié pour cause de conseil de classe.

▷ Cours. Chapitre 20 – Fonctions convexes

- Fonctions convexes ou concaves dérivables
 - ★ Une fonction dérivable sur I est convexe si et seulement si sa dérivée est croissante. Une fonction deux fois dérivable sur I est convexe si et seulement si sa dérivée seconde est positive.
 - ★ Point d'inflexion. Caractérisation dans le cas d'une fonction deux fois dérivable.
 - ★ Convexité et tangentes. Application (HP) aux minima globaux.

lundi (8h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 19 : 12,18,26,27,31,32

▷ Cours. Chapitre 20 – Fonctions convexes

- Préliminaires géométriques.
 - ★ Paramétrage de segments de $\mathbb{R}$ et du plan avec $[0; 1]$.
 - ★ Arcs et cordes d'une fonction.
- Résultats généraux sur les fonctions convexes.
 - ★ Fonctions convexes/concaves. Interprétation géométriques avec les cordes au dessus/en dessous des arcs. Premiers exemples.
 - ★ Inégalité de Jensen. Cas particulier de l'image de la moyenne comparée à la moyenne des images. Exemple de l'inégalité arithmético-géométrique.
 - ★ Combinaison linéaire positive de fonctions convexes.
 - ★ Inégalité des pentes. Croissance des pentes.
 - ★ Régularité des fonctions convexes (HP) : une fonction convexe sur I est dérivable à gauche et à droite en tout point intérieur de I . Une fonction convexe sur I est continue sur l'intérieur de I . Une fonction convexe sur l'intérieur de I continue sur I est convexe sur I .

Semaine du 13 janvier 2025

samedi (8h-12h)

- ▷ Devoir surveillé n° 5.

jeudi (8h-12h)

- ▷ Quelques remarques sur les DM n° 9 et n° 10.
- ▷ Cours. Chapitre 19 – Dérivation
 - Accroissements finis
 - * Condition nécessaire pour qu'un point intérieur soit un extremum local.
 - * Égalité des accroissements finis. Interprétation géométrique.
 - * Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones. Le cas des fonctions strictement monotones.
 - * Introduction à la notion de fonction Lipschitzienne. Interprétation géométrique. Une fonction Lipschitzienne est continue. Inégalité des accroissements finis : une fonction dérivable dont la dérivée est bornée par K est K -Lipschitzienne. Autres versions de l'IAF (cas d'une dérivée minorée, majorée).
 - * Application à l'étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - * Théorème de la limite de la dérivée. Cas dérivable, cas $\mathcal{C}^1$, cas des limites $\pm\infty$.
 - Extension aux fonction à valeurs complexes.
 - * Lien avec les fonctions partie réelle et partie imaginaire.
 - * Extension de certains résultats. Le théorèmes de Rolle et l'EAF ne sont plus valables. L'IAF reste valable (avec des modules), ainsi que la caractérisation des fonctions constantes et le théorème de la limite de la dérivée.
- ▷ Exercices.
 - TD n° 18 : 20
 - TD n° 19 : 16

mercredi (13h-15h)

- ▷ Cours. Chapitre 19 – Dérivation
 - Dérivabilité.
 - * Opérations algébriques, combinaisons linéaires, dérivée d'un produit d'un nombre fini quelconque de fonctions. Dérivée d'une composition. Dérivée d'une réciproque. Tangente en un point de la courbe de la réciproque. Avertissement concernant le fait que ce sont des conditions suffisantes mais non nécessaires.
 - Dérivées successives.
 - * Fonctions dérivables n fois, de classe $\mathcal{C}^n$, de classe $\mathcal{C}^\infty$. Notations $\mathcal{C}^n(D, \mathbb{R})$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Liens entre ces notions.
 - * Opérations sur les dérivées successives. Formule de Leibniz.
 - Accroissements finis
 - * Condition nécessaire pour qu'un point intérieur soit un extremum local.
 - * Théorème de Rolle. Interprétation géométriques.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

- ▷ Exercices.
 - TD n° 18 : 8,17(gr.1),18(gr.2),24,28,29,31(gr.2),32(gr.1),37(gr.1),40

lundi (8h-12h)

- ▷ **Cours.** Chapitre 18 – Limites et continuité
 - Le théorème des valeurs intermédiaires.
 - ★ Application à l'étude des suites implicites. Cas où $f(u_n) = n$. Cas où $f_n(u_n) = 0$.
 - Extension aux fonctions à valeurs complexes. Lien avec les limites et la continuité des parties réelles et imaginaires.
- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 18 : 1,7,14,23,26,39,40
- ▷ **Cours.** Chapitre 19 – Dérivation
 - Dérivabilité.
 - ★ Taux d'accroissement. Fonction dérivable en un point, sur un domaine. Fonction dérivée. Notation $\mathcal{D}^1(D, \mathbb{R})$. Premiers exemples de calculs de limite de taux d'accroissement.
 - ★ Interprétation géométrique. Tangente en un point. Équation de la tangente. Cas d'une tangente verticale.
 - ★ Développement limité d'ordre 1. Une fonction dérivable est continue.
 - ★ Dérivabilité à droite et à gauche. Application au raccordement de solutions d'équations différentielles.
- ▷ **Interrogation écrite.**

Semaine du 6 janvier 2025

jeudi (8h-12h)

- ▷ **Cours.** Chapitre 18 – Limites et continuité
 - Le théorème des valeurs intermédiaires.
 - ★ TVI sur un segment. Preuve par dichotomie. Implémentation en Python.
 - ★ Autres versions du TVI. L'image d'un intervalle par une fonction continue et un intervalle.
 - ★ Apport de la stricte monotonie : corollaire du TVI, théorème de la bijection. Comment obtenir $f(I)$? Si f est continue et injective, alors f est strictement monotone.
 - Le théorème des bornes atteintes. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 17 : 28,bonus
 - TD n° 18 : 6,11

mercredi (13h-15h)

- ▷ **Cours.** Chapitre 18 – Limites et continuité
 - Notion de limite d'une fonction.
 - ★ Lien entre limites à gauche, à droite et les limites selon que f est définie en a ou non.
 - Limites et relation d'ordre.
 - ★ Si f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a . Variantes.
 - ★ Passage à la limite dans une inégalité large.
 - Opérations sur les fonctions admettant une limite.
 - ★ Combinaisons linéaires, valeurs absolue, produit, inverse, quotient.

- ★ Composition de deux fonctions. Composition d'une suite par une fonction. Caractérisation séquentielle de la limite.
- Théorèmes d'existence de limites.
 - ★ Théorème d'encadrement, de minoration, de majoration.
 - ★ Théorème de la limite monotone.
- Continuité.
 - ★ Continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Continuité sur un domaine. Continuité de la fonction $x \mapsto x^n$.
 - ★ Prolongement par continuité.
 - ★ Opérations sur les fonctions continues : opérations algébriques, composition, caractérisation séquentielle.
- Le théorème des valeurs intermédiaires.
 - ★ TVI sur un segment. Preuve avec borne supérieure.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 17 : 24,33(gr.1),36,39,41

lundi (13h-14h)

- ▷ **Soutien.**

lundi (8h-12h)

- ▷ **Cours.** Chapitre 17 – Groupes et anneaux
 - Anneaux
 - ★ Sous-anneaux (⚠ un sous-anneau contient 1_A). Caractérisation des sous-anneaux (contient 1_A , stabilité par soustraction et par produit). Un mot sur les sous-corps.
 - ★ Morphismes d'anneaux (⚠ envoie 1_A sur $1_{A'}$). Un mot sur les morphismes de corps. Propriétés hérités des morphismes de groupes (additifs). Image d'une puissance. Image directe, image réciproque. Isomorphisme.
 - ★ Activité : construction de $\mathbb{C}$.
- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 17 : 11,20,29
- ▷ **Cours.** Chapitre 18 – Limites et continuité
 - Notion de limite d'une fonction.
 - ★ Définition quantifiée de des limites finies ou infinies en $\pm\infty$. Limites de $x \mapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.
 - ★ Définition quantifiée de des limites finies ou infinies en un réel a . Si f admet une limite finie en un point de son domaine de définition, alors la limite est $f(a)$.
 - ★ Définition universelle avec des voisinages. Exemple de fonction n'admettent pas de limite. Limites des $f(a+h)$ lorsque h tend vers 0.
 - ★ Unicité de la limite.
 - ★ Limite à gauche, à droite en a .

Semaine du 16 décembre 2024

jeudi (8h-12h)

▷ **Cours.** Chapitre 17 – Groupes et anneaux

- Groupes.
 - ★ Morphismes de groupes.
 - CNS d'injectivité sur le noyau.
 - Isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Groupes isomorphes.
- Anneaux
 - ★ Notion d'anneau. Anneau commutatif. Anneau produit.
 - ★ 0_A est absorbant. Cas où $0_A = 1_A$. Règles de calcul dans un anneau. Formule de factorisation de $a^n - b^n$ et formule du binôme de Newton lorsque a et b commutent.
 - ★ Diviseurs de zéro. Anneau intègre. Simplification à gauche ou à droite par un élément non nul dans un anneau intègre.
 - ★ Éléments inversibles d'un anneau. Anneau $U(A)$ des éléments inversibles de A . Notion de corps.

▷ **Exercices.**

- TD n° 17 : 9,26

mercredi (13h-15h)

▷ **Cours.** Chapitre 17 – Groupes et anneaux

- Groupes.
 - ★ Sous-groupes. Un sous-groupe contient l'élément neutre et les symétriques de ses éléments. Caractérisation des sous-groupes (non vide et stabilité par inverse et produit).
 - ★ Avant goût de la 2A : Sous-groupes de $\mathbb{Z}$. Intersection de sous-groupes.
 - ★ Morphismes de groupes.
 - Image du neutre, image d'un inverse, image d'une puissance. Composition de morphismes.
 - L'image d'un sous-groupe est un sous-groupe. L'image réciproque d'un sous-groupe est un sous-groupe.
 - Image d'un morphisme f . Notation $\text{Im}(f)$.
 - Noyau d'un morphisme f . Notation $\text{Ker}(f)$.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ **Exercices.**

- TD n° 16 : 1,2,11
- TD n° 17 : 1,3,12,13,15

lundi (13h-14h)

▷ **Soutien.**

lundi (8h-12h)

▷ **Exercices.**

- TD n° 16 : 5,8,9

▷ **Cours.** Chapitre 17 – Groupes et anneaux

- Lois de composition interne (LCI).
 - ★ Notion de LCI sur un ensemble non vide E .

- ★ Lois commutatives, associatives. Convention de notation additive/multiplicative. En notation additive, la loi est toujours commutative. Notations nx et x^n lorsque $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ lorsque la loi est associative. Extension de quelques propriétés attendues (mais attention quand la loi n'est pas commutative). Éléments qui commutent.
- ★ Distributivité. Distributivité à gauche/droite.
- ★ Élément neutre (à gauche et à droite). Unicité. Notations 0_E et 1_E .
- ★ Élément symétrisable (à gauche et à droite). Symétrique, opposé, inverse. Notation $-x$ ou x^{-1} . Inverse d'un produit, d'une puissance, d'un inverse. Simplification à gauche ou à droite par un élément symétrisable. Notation nx et x^n lorsque x est symétrisable et $n \in \mathbb{Z}$. Convention que x^0 (ou $0x$ en additif) est l'élément neutre.
- ★ Partie stable d'une LCI. Conservation des propriétés d'associativité, commutativité et distributivité.
- ★ Lois produits.
- Groupes.
 - ★ Notion de groupe. Groupe abélien. Simplification à gauche ou à droite par un élément d'un groupe.
 - ★ Groupe symétrique : groupe des permutations de E (bijection de E dans E). Notation S_E .
 - ★ Groupes produits.

Semaine du 9 décembre 2024

samedi (8h-12h)

- ▷ **Devoir surveillé n° 4.**

jeudi (8h-12h)

- ▷ **Cours.** Chapitre 16 – Relations binaires
 - Les relations d'ordre.
 - ★ Majorants, minorants, maximum, minimum. Borne supérieure, borne inférieure. Un maximum est une borne supérieure. Un minimum est une borne inférieure.
 - Les relations d'équivalence.
 - ★ Définition. Exemples.
 - ★ Classe d'équivalence. Les classes d'équivalence forment une partition.
 - ★ Introduction aux ensembles quotients. Exemple de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 15 : 30,33,36
 - TD n° 16 : 5

mercredi (13h-15h)

- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 15 : 28,29
- ▷ **Cours.** Chapitre 16 – Relations binaires
 - Résultats généraux sur les relations binaires.
 - ★ Définition en tant que partie de E^2 . Notation $x\mathcal{R}y$.
 - ★ Exemples : égalité sur E , $\leq$ et $<$ sur $\mathbb{R}$, $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$, $\leq$ sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\equiv [m]$ sur $\mathbb{R}$, divisibilité sur $\mathbb{Z}$, etc.
 - ★ Relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.
 - Les relations d'ordre.
 - ★ Définition. Exemples. Relation stricte associée à une relation d'ordre.
 - ★ Exemples de l'ordre produit et de l'ordre lexicographique sur un produit cartésien.
 - ★ Ordre total. Ordre partiel.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 15 : 3,19,20,21,25,32

lundi (13h-14h)

▷ Soutien.

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 15 – Ensembles et applications

- Résultats généraux sur les applications.
 - ★ Restriction et prolongements. Composition de fonctions. Composition avec une indicatrice. Associativité de la composition.
- Injections, surjections, bijections.
 - ★ Injection. Définition en terme d'antécédents, définitions quantifiées. Méthodes de preuve. Cas des fonctions monotones sur un intervalle.
 - ★ Surjection. Définition en terme d'antécédents, définition quantifiée. Lien avec l'image directe. Méthodes de preuve.
 - ★ Surjection. Définition en terme d'antécédents, définition quantifiée. Méthodes de preuve.
 - ★ Composition d'injections, de surjections, de bijections.
 - ★ Réciproque d'une bijection. Théorème de caractérisation. Réciproque d'une composition. Retour sur la notation $f^{-1}(B)$.
 - ★ Retour sur les changements d'indice.

▷ Exercices.

- TD n° 15 : 3,8,9,12

Semaine du 2 décembre 2024

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 15 – Ensembles et applications

- Rappels et compléments sur les ensembles.
 - ★ Parties d'un ensemble.
 - Complémentaire d'une partie. Lois de Morgan. Différence de parties.
- Résultats généraux sur les applications.
 - ★ Notion de fonction ou application (notions confondues). Image d'un élément. Ensembles de départ et d'arrivée. Notations. Ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ ou E^F des fonctions de E dans F . Antécédents. Retour sur les familles d'éléments. Fonctions égales. Graphe d'une fonction.
 - ★ Application identité. Application constante. Fonction indicatrice (caractérisation de l'inclusion, de l'égalité, des opérations ensemblistes).
 - ★ Image directe. Image réciproque.

▷ Exercices.

- TD n° 14 : 23,26,37

mercredi (13h-15h)

▷ Cours. Chapitre 14 – Suites numériques

Partie C : Limite d'une suite réelle

- Étude générale.

- ★ Cas où f est croissante sur une partie stable. Cas où f est décroissante sur une partie stable (utilisation des suites des termes de rangs pairs et impairs).

▷ Cours. Chapitre 15 – Ensembles et applications

- Rappels et compléments sur les ensembles.

- ★ Notion d'ensemble et d'éléments. Appartenance. Égalité d'ensembles. Ensemble vide. Définition par extension, par compréhension, par opérations. Singleton.
- ★ Produit cartésien. Famille d'éléments. Sous-famille, sur-famille, concaténation de familles.
- ★ Parties d'un ensemble.
 - Inclusion. Inclusion stricte. Double inclusion. L'ensemble vide est inclus dans tout autre ensemble et ne possède qu'un seul sous-ensemble : lui-même.
 - Ensemble des parties d'un ensemble.
 - Union et intersection de parties. Propriétés (dont commutativité, associativité, distributivité). Union et intersection des parties d'une famille. Union disjointe. Partitions et recouvrements.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 14 : 18,19(gr.1),41,50,51,53

lundi (13h-14h)

▷ Soutien.

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 14 – Suites numériques

Partie B : Limite d'une suite réelle

- Le théorème de Bolzano-Weierstrass (cas réel et cas complexe).

▷ Exercices.

- TD n° 14 : 27,33

▷ Cours. Chapitre 14 – Suites numériques

Partie C : Limite d'une suite réelle

- Existence de la suite : une histoire de stabilité
- Un premier exemple.
- Étude générale.
 - ★ Les points fixes sont les limites éventuelles.
 - ★ Variations de la suite. Utilisation du signe de $g : x \mapsto f(x) - x$ sur une partie stable. Cas où f est croissante sur une partie stable.
 - ★ Représentation graphique.
 - ★ Plan général de l'étude. Utilisation du théorème de la limite monotone.
 - ★ Importance de la croissance de f sur un domaine stable.

Semaine du 25 novembre 2024

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 14 – Suites numériques

Partie B : Limite d'une suite réelle

- Théorèmes d'existence d'une limite.
 - ★ Théorème de la limite monotone.
 - ★ Suites adjacentes.
 - ★ Exemple de la suite des intégrales de Wallis.
- Traduction séquentielle de certaines propriétés.
 - ★ Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée (respectivement non majorée), il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $\sup(A)$ (respectivement vers $+\infty$). Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure.
 - ★ Caractérisation séquentielle de la densité. Ensemble $\mathbb{D}$ des nombre décimaux. Valeurs décimales approchées par défaut et pas excès à la précision 10^{-n} d'un réel. Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
- Extension aux suites complexes.

▷ Exercices.

- TD n° 14 : 14,15,35,38,49

mercredi (13h-15h)

▷ Cours. Chapitre 14 – Suites numériques

Partie B : Limite d'une suite réelle

- Opérations sur les suites admettant une limite.
 - ★ Opérations algébriques : multiplication externe, produit, inverse, quotient. Limites 0^+ et 0^- . Le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0 tend aussi vers 0. Cas des suites arithmétiques et géométriques.
 - ★ Composition d'une suite par une fonction. Cas d'une fonction continue. Exemple de la valeur absolue. Exemple du passage à la puissance.
 - ★ Formes indéterminées. Croissances comparées. Méthodes pour lever les formes indéterminées (factoriser par le terme le plus gros, utiliser des taux d'accroissement, multiplier par la quantité conjuguée).
- Théorèmes d'existence d'une limite.
 - ★ Théorème d'encadrement. Théorème de minoration, de majoration.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 13 : 1,3,9,11
- TD n° 14 : 1,4,44

lundi (13h-14h)

▷ Soutien.

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 14 – Suites numériques

Partie A : Résultats généraux

- Exemples usuels.
 - ★ Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Équation caractéristique. Expression explicite dans les cas complexe. Expression explicite dans les cas réel.

Partie B : Limite d'une suite réelle

- Notion de limite d'une suite réelle
 - ★ Limite finie/infinie. Définition quantifiée. Représentation graphique. Définition universelle avec des voisinages.
 - ★ Unicité de la limite. Notations $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ (cette dernière est dangereuse).
 - ★ Exemples fondamentaux.
 - ★ Suites convergentes, divergentes.
 - ★ Suites extraites. Extractrice. Si une suite admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraire admet la même limite. Limite d'une suite si et seulement si les suites des termes de rangs pairs et impairs admettent la même limite.
- Limites et relation d'ordre.
 - ★ Propriété d'ordre transmise par la limite. Une suite réelle convergente est bornée. Une suite qui a une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang. Exemples de propriétés analogues.
 - ★ Passage à la limite dans une inégalité large. Les inégalités strictes deviennent larges à la limite.
- Opérations sur les suites admettant une limite.
 - ★ Opérations algébriques : somme.

▷ Exercices.

- TD n° 13 : 4,5

Semaine du 18 novembre 2024

samedi (8h-12h)

▷ Devoir surveillé n° 3.

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 13 – Propriété de la borne supérieure

- Introduction à la topologie de $\mathbb{R}$.
 - ★ Voisinages d'un point de $\overline{\mathbb{R}}$.
 - ★ Brève introduction aux notions de points intérieurs, de points adhérents, de partie ouverte/fermée (HP)
 - ★ Notion de partie dense dans $\mathbb{R}$. Les ensembles $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.

▷ Cours. Chapitre 14 – Suites numériques

Partie A : Résultats généraux

- Notion de suite réelle.
 - ★ Fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Notation $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Suite démarrant au rang n_0 . Représentation graphique.
 - ★ Différents modes de définition d'une suite : explicitement, par récurrence ou implicitement.
 - ★ Propriétés vraies à partir d'un certain rang.
- Opérations algébriques sur les suites.

- Propriétés générales sur les suites réelles.
 - ★ Suites constantes, stationnaires, périodiques.
 - ★ Suites positives, négatives.
 - ★ Suites monotones. Méthodes pour étudier les variations d'une suite. Somme de suites monotone de même monotonie.
 - ★ Suites majorées, minorées, bornées.
- Extension aux suites complexes. Suite complexe bornée.
- Exemples usuels.
 - ★ Suite définie par une relation de récurrence additive ou multiplicative.
 - ★ Suites arithmétiques (complexes ou réelles).
 - ★ Suites géométriques (complexes ou réelles).
 - ★ Suites arithmético-géométriques (complexes ou réelles). Méthode du point fixe.

▷ **Exercices.**

- TD n° 12 : 46,47,51 + bonus : nombres de Mersenne

mercredi (13h-15h)

▷ **Cours.** Chapitre 12 – Arithmétique des entiers

- Congruences dans $\mathbb{Z}$.
 - ★ Utilisation des inverses modulo n .

▷ **Cours.** Chapitre 13 – Propriété de la borne supérieure

- Bornes supérieures et bornes inférieures
 - ★ Définitions et exemples. Si une partie a un maximum, c'est la borne supérieure. Ces des intervalles.
 - ★ Propriété de la borne supérieure/inférieure.
 - ★ Caractérisation des bornes supérieures et inférieures.
 - ★ Méthodes pour déterminer la borne supérieure/inférieure.
 - ★ Preuve de l'existence de la partie entière d'un réel.
- Caractérisation des intervalles.
- Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ **Exercices.**

- TD n° 12 : 10,12(gr.2),13(gr.2),18(gr.1),21,22(gr.1),24(à l'oral),25,26,38,43(gr.1)

lundi (8h-12h)

▷ **Cours.** Chapitre 12 – Arithmétique des entiers

- Nombres premiers.
 - ★ Nombres premiers, nombres composés. Un nombre premier divise un autre nombre ou est premier avec lui. Lemme d'Euclide. Existence de la décomposition en produit de facteurs premiers.
 - ★ L'ensemble $\mathbb{P}$ des nombres premiers est infini. Test de divisibilité par les nombres inférieurs à la racine carrée. Crible d'Eratosthène.
 - ★ Décomposition en produit de facteurs premiers. Valuation p -adique (on pose $v_p(1) = 0$). Réécriture de la décomposition. La valuation p -adique d'un produit, d'une puissance. Critère de divisibilité. Écriture des PGCD et PPCM de deux entiers à l'aide des valuations p -adiques. Critère pour que deux entiers soient premiers entre eux. Facteurs premiers d'un produit.
- Congruences dans $\mathbb{Z}$.

- ★ Congruences dans $\mathbb{R}$: symétrie, transitivité, somme dans une congruence, somme de congruences, produit et division dans une congruence.
- ★ Résultats propres aux entiers. Lien entre congruence et divisibilité. Reste modulo m . Produit dans une congruence d'entiers, produit de congruences d'entiers, puissance dans une congruence d'entiers. Division dans une congruence d'entiers.
- ★ Petit théorème de Fermat.
- ★ Quelques applications : critères de divisibilité, congruence d'une puissance.

▷ **Exercices.**

- TD n° 12 : 1,2,34,40,41

Semaine du 11 novembre 2024

jeudi (8h-12h)

▷ **Cours.** Chapitre 12 – Arithmétique des entiers

- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$
 - ★ Méthode pratique de division euclidienne. Divisibilité et reste nul. Caractérisation des entiers impairs.
- PGCD et PPCM
 - ★ PGCD de deux entiers naturels. Premières propriétés. Cas où l'un divise l'autre. Algorithme d'Euclide. Relations de Bezout. Méthode pratique pour déterminer une relation de Bezout. L'ensemble des diviseurs communs de deux entiers naturels est l'ensemble des diviseurs de leur PGCD. Factorisation dans un PGCD. PGCD de deux entiers relatifs .
 - ★ Entiers premiers entre eux. Division par le PGCD pour obtenir des entiers premiers entre eux. Théorème de Bezout. Théorème de Gauss. Produit d'entiers premiers avec un autre commun. Conséquence sur le produit d'entiers. Forme irréductible d'un rationnel. Équations diophantiennes du type $au + bv = c$.
 - ★ PPCM de deux entiers. Cas où l'un divise l'autre. Lien entre PPCM et PGCD. Factorisation dans un PPCM. PPCM de deux entiers relatifs. Tout multiple commun à deux entiers est un multiple de leur PPCM.
 - ★ Extension à plus de deux entiers. Associativité du PGCD. Entiers premiers entre eux deux à deux. Théorème de Bezout. Cas des produits d'entiers. Factorisation dans le PGCD. Si deux entiers sont premiers entre eux, alors des puissances de ces entiers aussi. Puissance d'un PGCD.

▷ **Exercices.**

- TD n° 11 : 11,13

mercredi (13h-15h)

▷ **Cours.** Chapitre 11 – Équations différentielles

- Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.
 - ★ Principe de superposition.
 - ★ Recherche d'une solution particulière dans le cas d'un second membre polynomiale ou exponentiel. Cas d'un second membre trigonométrique en prenant partie réelle ou partie imaginaire.

▷ **Cours.** Chapitre 12 – Arithmétique des entiers

- Divisibilité dans $\mathbb{Z}$
 - ★ Diviseurs et multiples. Notation $a\mathbb{Z}$. Diviseurs et multiples de 0, 1, -1 .
 - ★ Premières propriétés. Entiers associés. Transitivité. Compatibilité avec les combinaisons linéaires, avec le produit, avec les puissances entières naturelles.
 - ★ Théorème de la division euclidienne.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 10 : 15,17,18,24
- TD n° 11 : 1,2,10

Semaine du 4 novembre 2024

samedi (8h-12h)

▷ Quelques remarques sur le DM n° 5.

▷ Cours. Chapitre 11 – Équations différentielles

- Brève introduction à la notion d'équation différentielle. Ordre d'une équation différentielle. Équation différentielle linéaire.
- Équations différentielles linéaires du premier ordre.
 - ★ Forme générale $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$. Quitte à restreindre le domaine d'étude, on se ramène à $(E) : y' + a(x)y = b(x)$, avec a et b supposées continues sur un intervalle.
 - ★ Résolution de l'EHA $(H) : y' + a(x)y = 0$. Cas où a est constante.
 - ★ Ensemble des solutions quand on connaît une solution particulière de (E) et l'ensemble des solutions de l'EHA.
 - ★ Méthode de variation de la constante.
 - ★ Problème de Cauchy. Interprétation géométrique.
 - ★ Principe de superposition.
 - ★ Quelques mots sur les recollements (on en reparlera dans le chapitre 19).
- Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants.
 - ★ Forme générale $(E) : y'' + ay' + by = f(x)$ avec $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et f supposée continue
 - ★ Résolution de l'EHA $(H) : y'' + ay' + by = 0$ dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ selon que le discriminant de l'équation caractéristique $(C) : r^2 + ar + b = 0$ est nul ou non. Résolution dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ selon le signe du discriminant.
 - ★ Ensemble des solutions quand on connaît une solution particulière de (E) et l'ensemble des solutions de l'EHA.
 - ★ Problème de Cauchy. Interprétation géométrique.

▷ Exercices.

- TD n° 10 : 8,16

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 10 – Calcul intégral

- Intégrales d'une fonction paire/impaire sur un domaine symétrique par rapport à l'origine.
- Primitive d'une fonction rationnelle réelle.
 - ★ Primitives de $x \mapsto 1/(x - r)^n$.
 - ★ Primitives de $x \mapsto 1/(ax^2 + bx + c)$.
 - ★ Primitives de $x \mapsto (\lambda x + \mu)/(ax^2 + bx + c)^n$.
 - ★ Fonctions polynomiales ou rationnelles en $\cos$ et $\sin$.

▷ Exercices.

- TD n° 10 : 1,2,11,12,13,14,22

mercredi (13h-15h)

- ▷ **Cours.** Chapitre 10 – Calcul intégral
 - Intégrales d'une fonction continue.
 - ★ Dérivation des fonctions définies par une intégrale (dont les bornes varient).
 - ★ Relation de Chasles. Linéarité de l'intégrale.
 - Intégration par parties.
 - Changement de variable.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 9 : 2,4,6
- ▷ **Cours.** Chapitre 10 – Calcul intégral
 - Intégrales d'une fonction continue.
 - ★ Théorème fondamental de l'analyse. Lien entre primitives et intégrales. Primitive générique.
- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 10 : 1

lundi (13h-14h)

- ▷ **Soutien.**

lundi (8h-12h)

- ▷ **Cours.** Chapitre 9 – Décomposition en éléments simples
 - Rappels et compléments sur les fonctions polynomiales et rationnelles.
 - ★ Théorème de factorisation des fonctions polynomiales sur $\mathbb{C}$, sur $\mathbb{R}$.
 - ★ Fonctions rationnelles sur $\mathbb{K}$. Notion de pôle.
 - Théorème de décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.
 - Méthodes pratiques de décomposition en éléments simples
 - ★ En résolvant un système : par unicité des coefficients ou en évaluant en des valeurs particulières.
 - ★ Technique de base : multiplication puis limite en un pôle. Cas où tous les pôles sont simples. Cas des pôles multiples.
 - ★ Autres méthodes : utilisation des limites en $\pm\infty$, utilisation de la parité, faire un détour par les complexes (à éviter toutefois).
- ▷ **Bilan du DS 2.**
- ▷ **Cours.** Chapitre 10 – Calcul intégral
 - Primitives.
 - ★ Notion de primitive. Si f est continue sur un intervalle, alors f admet une primitive sur I . Unicité des primitives à une constante additive près. Unicité de la primitive qui passe par un point donné du plan.
 - ★ Primitives des fonctions usuelles.
 - ★ Linéarité de la primitivation.
 - ★ Primitive d'une fonction se présentant comme un produit (de la forme $u' \times G \circ u$). Cas particuliers des fonctions du type $\varphi' \times e^\varphi$ avec $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$. Cas particulier des fonctions du type $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.
 - Intégrales d'une fonction continue.
 - ★ Aire sous la courbe d'une fonction continue positive (définition intuitive et admise pour le moment) puis à valeurs réelles puis à valeurs complexes. Inversion des bornes. Cas des mêmes bornes.

Semaine du 14 octobre 2024

jeudi (8h-12h)

- ▷ Devoir surveillé n° 2.

mercredi (13h-15h)

- ▷ **Cours.** Chapitre 9 – Décomposition en éléments simples
 - Rappels et compléments sur les fonctions polynomiales et rationnelles.
 - * Fonction polynomiale. Unicité des coefficients. Degré. Coefficient dominant. Coefficient constant. Degré d'un produit, d'une puissance entière.
 - * Division euclidienne de fonctions polynomiales.
 - * Racines. Un polynôme de degré p a au plus p racines. Factorisation par $x - a$ lorsque a est racine.
- ▷ **Préparation du DS 2 et conseils de travail pendant les vacances.**
- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 7 : 41
 - TD n° 8 : 3,6

mardi (8h-10h et 10h-12h)

- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 7 : 5,16,17,25,30,34(gr.1),36,39

lundi (13h-14h)

- ▷ **Soutien.**

lundi (8h-12h)

- ▷ **Bilan du DM 4.**
- ▷ **Cours.** Chapitre 7 – Sommes et produits
 - Sommes et produits de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.
- ▷ **Exercices.**
 - TD n° 7 : 12,13,17,18,22,36,39
- ▷ **Cours.** Chapitre 8 – Systèmes linéaires
 - Définitions et exemples
 - * Système linéaire à n équations et p inconnues. Coefficients. Second membre. Inconnues. Lignes. Système homogène. Solutions. Système équivalents. Système compatible/incompatible.
 - * Somme et multiplication par un scalaire d'un élément de $\mathbb{K}^p$.
 - * Résolution des système triangulaires lorsque $n = p$. Existence et unicité d'une solution si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls. Remontées successives.
 - * Cas triangulaire lorsque $n < p$. Infinité de solutions si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls (aucune sinon). Cas $n > p$.
 - Méthode du pivot de Gauss
 - * Opérations sur les lignes d'un système : $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftrightarrow L_i + \alpha L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ et $L_i \leftrightarrow \lambda L_i + \alpha L_j$ lorsque $\lambda \neq 0$. Ces opérations donnent un système équivalent.
 - * Méthode du pivot de Gauss : cas général et multiples exemples. Bilan sur le nombre de solutions.

Semaine du 7 octobre 2024

samedi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 7 – Sommes et produits

- Sommes de nombres.
 - ★ Sommes doubles et interversion de sommes. Cas des domaines rectangulaires, triangulaires, triangulaires stricts. Un mot sur le cas général et sur les sommes multiples.
 - ★ Multiplication de deux sommes. Carré d'une somme. Formule avec les doubles produits.
- Formule du binôme de Newton. Cas particuliers classiques. Application à la trigonométrie pour obtenir des formules trigonométriques de factorisation.

▷ Exercices.

- TD n° 7 : 8,11,22,26,31

▷ Interrogation écrite.

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 7 – Sommes et produits

- Sommes de nombres.
 - ★ Changement d'indice. Sommes télescopiques. Somme d'inégalités. Inégalité triangulaire.
- Produits de nombres.
 - ★ Notation $\prod$. Produit de complexes, d'une borne inférieure à une borne supérieure, sur les indices d'une famille, sur un nombre fini d'indices vérifiant une propriété. Produit vide.
 - ★ Relation de Chasles. Multiplication par paquets. Produits télescopiques. Changement d'indice. Produits doubles, interversion de produits.
 - ★ Factorisation dans un produit. Produit de multiplications, d'inverses, de quotients, de puissances entières, de modules, de conjugués. Produit d'inégalités.
 - ★ Produit d'exponentielles. Logarithme d'un produit. Produit de puissances généralisées.
 - ★ Factorielles. Produit des premiers nombres pairs ou impairs.
 - ★ Coefficients binomiaux. Définition $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Écriture en produit. Convention $\binom{n}{p} = 0$ pour $p \notin \llbracket 0; n \rrbracket$. Cas particuliers $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{2}$. Symétrie. Formule du chef. Formule de Pascal. Les coefficients binomiaux sont des entiers. Triangle de Pascal.

▷ Exercices.

- TD n° 6 : 29
- TD n° 7 : 3,6

mercredi (13h-15h)

▷ Cours. Chapitre 7 – Sommes et produits

- Sommes de nombres.
 - ★ Notation $\sum$. Somme de complexes, d'une borne inférieure à une borne supérieure, sur les indices d'une famille, sur un nombre fini d'indices vérifiant une propriété. Somme vide. Nombre de termes dans une somme.
 - ★ Somme d'un terme constant. Somme des premiers entiers, des premiers carrés d'entiers, des premiers cubes d'entiers. Sommes géométriques. Somme des n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.
 - ★ Relation de Chasles. Sommation par paquet. Factorisation par une constante. Linéarité de la somme. Linéarité de la conjugaison, des parties réelles et imaginaires. Application : somme de sinus, de cosinus.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 6 : 22,26,28,29,31,32,35

lundi (13h-14h)

▷ Soutien.

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 6 – Nombres complexes

- Équations polynomiales à coefficients complexes.
 - ★ Notion de fonction polynomiale sur $\mathbb{C}$. Unicité des coefficients. Degré. Coefficient dominant. Notion de racine.
 - ★ Méthode de détermination des racines carrées d'un complexe.
 - ★ Équations polynomiales de degré 2. Le cas des coefficients réels. Factorisation et racines dans le cas général. Relation coefficients/racines. Résolution du système
$$\begin{cases} x + y = s \\ xy = p \end{cases}$$
 - ★ Factorisation par $z - a$ lorsque a est une racine.
- Transformations usuelles du plan complexe.
 - ★ Translations. Homothéties. Rotations.
 - ★ Similitudes directes.

▷ Bilan du DS1.

▷ Exercices.

- TD n° 6 : 4,17,18,28,30,36

Semaine du 30 septembre 2024

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 6 – Nombres complexes

- Forme trigonométrie d'un complexe.
 - ★ Complexes de module 1.
 - Ensemble $\mathbb{U}$. Stabilité par produit, passage à l'inverse, quotient et conjugaison.
 - Exponentielle d'un imaginaire pur. Périodicité. Produit, conjugué, inverse, conjugué, quotient, puissances entières d'exponentielles d'imaginaire pur.
 - Retour à la trigonométrie. Formules d'Euler et de Moivre. Linéarisation et la factorisation d'expressions trigonométriques. Méthode de l'arc moitié.
 - ★ Arguments d'un complexe non nul.
 - Notion d'argument. Lien entre deux arguments. Argument principal.
 - Argument d'un produit, du conjugué, d'un quotient. Argument d'une somme de deux complexes ayant un même argument. Caractérisation d'appartenance à $\mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{R}_-^*$, $\mathbb{R}^*$ et $i\mathbb{R}$.
 - Interprétation géométrique d'un argument. Critères d'alignement et d'orthogonalité.
 - ★ Notation exponentielle d'un complexe non nul. Cas d'égalité. Utilisation de Arccos, Arcsin ou Arctan.
 - ★ Exponentielle d'un complexe. Partie réelle, imaginaire, module et argument de l'exponentielle d'un complexe. Propriété d'addition. Cas d'égalité. Résolution d'équations du type $e^z = a$. Dérivabilité de fonction du type e^φ avec $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.
- Racines $n^{\text{ièmes}}$.

- ★ Résolution de $\zeta^n = z$. Notation exponentielle de n racines $n^{\text{ièmes}}$ d'un complexe non nul.
- ★ Racines de l'unité. Interprétation géométrique. Propriétés du complexe j . Notation $\mathbb{U}_n$. Stabilité par produit, inverse, conjugaison.

▷ **Exercices.**

- TD n° 6 : 9,13,15

mercredi (13h-15h)

▷ **Cours.** Chapitre 6 – Nombres complexes

- Notion de nombre complexe.
 - ★ Existence admise des nombres complexes. Ensemble $\mathbb{C}$. Les opérations d'addition et produit prolongent celles sur $\mathbb{R}$. Complexe i . Unicité de l'écriture algébrique.
 - ★ Soustraction. Développement, factorisation. Inverse d'un complexe non nul. Division de complexes. Simplification de termes. Produit nul de complexes. Puissances entières sur $\mathbb{C}$.
 - ★ Inégalités dans $\mathbb{C}$: cela n'a pas de sens !
 - ★ Parties réelles et imaginaires. Linéarité. Imaginaire pur.
 - ★ Interprétation géométrique des complexes. Plan complexe. Affixe d'un point ou d'un vecteur du plan.
 - ★ Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Fonctions parties réelles et imaginaires. La continuité et la dérivabilité sont définies par celles des parties réelles et imaginaires. Notation $\mathcal{C}^0(E, \mathbb{C})$ et $\mathcal{C}^1(E, \mathbb{C})$. Caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par la dérivée.
- Conjugaison et module.
 - ★ Conjugué d'un complexe. Interprétation géométrique (symétrie par rapport à l'axe des abscisses). Conjugué d'un conjugué. Caractérisation des réels et imaginaires purs avec le conjugué. Somme, produit, quotient, puissance entière de conjugués. Expression des parties réelles et imaginaires avec le conjugué.
 - ★ Module d'un complexe. Interprétation géométrique (distance à l'origine). Cercle, disque, disque ouvert. Les valeurs absolues des parties réelles et imaginaires sont majorées par le module. Expression du carré du module avec le conjugué. Module d'un produit, d'un conjugué, d'un quotient, d'une puissance. Inégalité triangulaire (et cas d'égalité). Inégalité triangulaire renversée.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ **Exercices.**

- TD n° 5 : 10,20,22,23,24,25

lundi (13h-14h)

▷ **Soutien.**

lundi (8h-12h)

▷ **Cours.** Chapitre 5 – Trigonométrie

- Fonctions circulaires réciproques.
 - ★ Fonction Arctangente.
 - Définition comme réciproque de $\tan$ restreinte à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Continuité, imparité, monotonie, limites. Valeurs remarquables.
 - Expressions de $\tan(\text{Arctan}(x))$ et $\text{Arctan}(\tan(x))$. Résolution de $\alpha = \text{Arctan}(A)$.
 - Dérivabilité, convexité/concavité, courbe.
 - Quelques égalités remarquables à savoir retrouver : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \pm \frac{\pi}{2}$ selon le signe de x , valeurs de $\cos(\text{Arctan}(x))$ et $\sin(\text{Arctan}(x))$.

- ★ Fonction Arcsinus.
 - Définition comme réciproque de $\sin$ restreinte à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Continuité, imparité, monotonie. Valeurs remarquables.
 - Expressions de $\sin(\operatorname{Arcsin}(x))$ et $\operatorname{Arcsin}(\sin(x))$. Résolution de $\alpha = \operatorname{Arcsin}(A)$.
 - Dérivabilité, convexité/concavité, courbe.
- ★ Fonction Arccosinus.
 - Définition comme réciproque de $\cos$ restreinte à $[0; \pi]$. Continuité, monotonie. Valeurs remarquables.
 - Expressions de $\cos(\operatorname{Arccos}(x))$ et $\operatorname{Arccos}(\cos(x))$. Résolution de $\alpha = \operatorname{Arccos}(A)$.
 - Dérivabilité, convexité/concavité, courbe.

▷ Exercices.

- TD n° 5 : 2,3,4,10,11,17,23

Semaine du 23 septembre 2024

samedi (8h-12h)

▷ Devoir surveillé n° 1.

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 5 – Trigonométrie

- Sinus et cosinus d'un réel.
 - ★ Cercle trigonométrie. Angle. Cosinus et sinus d'un angle.
 - ★ Identité fondamentale. Valeurs remarquables. Périmètre d'un arc de cercle, aire d'une portion de disque. Périodicité.
 - ★ Signe du sinus et du cosinus d'un angle de $[-\pi; \pi]$.
 - ★ Formules de trigonométrie (formules d'addition, formules de décalage, formules de duplication, formules de l'angle triple, formules de linéarisation, formules de factorisation).
 - ★ Congruences de réels. Équations trigonométriques.
 - ★ Tangente d'un réel. Interprétation géométrique. Propriétés (périodicité, valeurs remarquables, signe, formules de décalage, formules d'addition, formules de duplication, formule $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$). Formules donnant $\tan(a)$, $\sin(a)$ et $\cos(a)$ en fonction de $t = \tan(a/2)$.
- Fonctions circulaires.
 - ★ Fonctions sinus et cosinus
 - Périodicité, parité/imparité, minoration/majoration, signe sur $\mathbb{R}$.
 - Continuité, dérivabilité, variations, convexité/concavité, courbes.
 - Paramétrisation du cercle trigonométrie. Écriture de $a \cos(x) + b \sin(x)$ sous la forme $C \cos(x - \varphi)$.
 - ★ Fonction tangente. Périodicité, parité/imparité, minoration/majoration, signe sur $\mathbb{R}$, continuité, dérivabilité, variations, convexité/concavité, limites, courbe.

▷ Préparation du DS n° 1

▷ Élection des délégués.

mercredi (13h-15h)

▷ Exercices.

- TD n° 4 : 4,16,20,21

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 4 : 12,16,18,23,25(gr.1)

lundi (13h-14h)

▷ Soutien.

lundi (8h-12h)

▷ Bilan du DM n° 2.

▷ Cours. Chapitre 4 – Fonctions.

Partie C : Premières fonctions usuelles.

- Fonction exponentielle.
 - ★ Preuves des résultats vus jeudi dernier.
- Fonction logarithme népérien.
 - ★ Preuves des résultats vus jeudi dernier.
 - ★ Fonction logarithme en base a .
- Puissances à exposant réel.
 - ★ Fonctions puissances généralisées. Le domaine de définition dépend de si $\alpha \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}_+ \setminus \mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}_- \setminus \mathbb{Z}$. Propriétés (continuité, dérivabilité, limites, variations, convexité/concavité, courbe). Position relatives selon la puissance.
 - ★ Fonctions exponentielles de base a .
 - ★ Fonction du type u^v . Réflexe : on revient à la définition avec exponentielle et logarithme.
 - ★ Croissances comparées (limite quand $x \rightarrow +\infty$ de quotients de termes du type $(\ln(x))^\beta, x^\alpha$ ou $e^{\gamma x}$; limite quand $x \rightarrow +\infty$ de $x^\alpha |\ln(x)|^\beta$).

▷ Exercices.

- TD n° 4 : 16,28,30

Semaine du 16 septembre 2024

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 4 – Fonctions.

Partie B : Rappels et compléments sur les limites, la continuité et la dérivabilité.

- Dérivabilité.
 - ★ Dérivées successives. Notations $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$. Opérations sur les fonctions de classes $\mathcal{C}^n$ et $\mathcal{C}^\infty$.
 - ★ Fonctions convexes, fonctions concaves. Interprétation géométriques (position de cordes et d'arcs associés). Caractérisation des fonctions convexes, concaves dérivables. Tangente d'une fonction convexe, concave. Points d'inflexions.

Partie C : Premières fonctions usuelles.

- Fonctions algébriques usuelles.
 - ★ Fonctions puissances entières (continuité, dérivabilité, limites, parité, variations, convexité/concavité, courbe).
 - ★ Fonctions polynomiales. Unicité des coefficients. Degré. Racine. Factorisation d'une fonction polynomiale dont on connaît une racine. Le nombre de racines est majorée par le degré. Limites, continuité, dérivabilité. Monotonie des fonctions polynomiales de degré 2.
 - ★ Fonctions rationnelles. Limites.

- ★ Fonctions racines (continuité, dérivabilité, limites, variations, concavité, courbe).
- ★ Fonction partie entière.
- ★ Fonction valeur absolue (continuité, dérivabilité, limites, parité, variations, courbe).
- Fonction exponentielle. *Preuves reportées à lundi.*
 - ★ Existence admise. Nombre e . Unicité. Propriétés fonctionnelles (continuité, dérivabilité, limites, variations, convexité, courbe). Bijectivité. Inégalité $e^x \geq 1 + x$.
 - ★ Des propriétés proches de celles de puissances entières.
- Fonctions hyperboliques.
 - ★ Cosinus et sinus hyperbolique (parité, continuité, dérivabilité, limites, variations, convexité/concavité, courbe)
 - ★ Tangente hyperbolique (parité, continuité, dérivabilité, limites, variations, convexité/concavité, courbe)
- Fonction logarithme népérien. *Preuves reportées à lundi.*
 - ★ Définition comme réciproque de la fonction exponentielle. Propriétés (continuité, dérivabilité, limites, variations, concavité, courbe). Inégalité $\ln(x) \leq x - 1$.
 - ★ Le logarithme transforme les produits en sommes.
- Puissances à exposant réel.
 - ★ Définition $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ lorsque $x > 0$. Convention $0^\alpha = 0$ lorsque $\alpha > 0$. Extension des propriétés des puissances.
 - ★ Fonction du type u^v .

Partie D : Études de fonctions.

- Intérêt des études de fonctions.
- Tableaux de variations.
 - ★ Construction et lecture d'un tableau de variations.
 - ★ Utilisation d'un tableau de variations (pour appliquer TVI ou théorème la bijection, pour déterminer des majorants, minorants ou extrema).
- Plan d'étude de fonction.

▷ Exercices.

- TD n° 4 : 13,16

mercredi (13h-15h)

▷ Cours. Chapitre 4 – Fonctions.

Partie B : Rappels et compléments sur les limites, la continuité et la dérivabilité.

- Continuité
 - ★ Le théorème des valeurs intermédiaires. Corollaire avec stricte monotonie.
 - ★ Théorème de la bijection. Preuve de l'existence de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif.
- Dérivabilité.
 - ★ Taux d'accroissement. Fonction dérivable. Interprétation géométrique. La dérivabilité entraîne la continuité (la réciproque est fausse).
 - ★ Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une composée. Dérivée d'une réciproque.
 - ★ Caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par la dérivée. Caractérisation des fonctions monotones/strictement monotones dérivables sur un intervalle.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ Exercices.

- TD n° 3 : 13,15,25,26
- TD n° 4 : 2

lundi (13h-14h)

▷ Soutien.

lundi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 4 – Fonctions.

Partie A : Résultats généraux.

- Opérations sur les fonctions
 - * Caractérisation des fonctions bijectives.
- Propriétés globales d'une fonction.
 - * Signe d'une fonction. Signe d'une fonction obtenue par opération.
 - * Variations d'une fonction. Monotonie. Variations d'une fonction obtenue par opération. Apport de la stricte monotonie sur le passage à une fonction dans une inégalité, sur la monotonie d'une composition, sur l'unicité d'un éventuel antécédent.
 - * Fonction majorées, minorées, bornées. Minimum, maximum, extremum d'une fonction. Utilisation de la monotonie pour déterminer un maximum ou un minimum.
 - * Translations affine d'une fonctions (contractions, dilatations, symétries). Fonctions paires, impaires. Réciproque d'une bijection impaire. Fonctions périodiques. Interprétations géométriques.
 - * Propriétés de stabilité (partie stable, point fixe).

▷ Cours. Chapitre 4 – Fonctions.

Partie B : Rappels et compléments sur les limites, la continuité et la dérivabilité.

- Limites d'une fonction.
 - * Rappel des définitions vues en Terminale : limite finie, infinie en un réel ou en $\pm\infty$. Limite à gauche/droite. Unicité de la limite.
 - * Opérations algébriques sur les limites. Limites 0^+ et 0^- . Formes indéterminées. Premières méthodes pour lever une forme indéterminée. Limite d'une composée.
 - * Théorème d'encadrement. Théorème de majoration/minoration.
 - * Asymptotes horizontales, verticales, obliques. Branches paraboliques.
- Continuité.
 - * Continuité en un point, sur un domaine. Notation $\mathcal{C}^0$.
 - * Opérations algébriques sur les fonctions continues. Composition de fonctions continues. Prolongement par continuité.

▷ Exercices.

- TD n° 3 : 10,13,17

Semaine du 9 septembre 2024

jeudi (8h-12h)

▷ Cours. Chapitre 3 – Propriétés des nombres réels

- Racines d'un réel positif.
 - * Trinômes du second degré. Forme canonique. Discriminant. Théorème de factorisation. Racines. Relations coefficients/racines. Maximum/minimum d'un trinôme.

▷ Bilan du DM n° 1.

▷ Exercices.

- TD n° 3 : 7,24

▷ **Cours.** Chapitre 4 – Fonctions.

Partie A : Résultats généraux.

- Fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une autre. Domaine de définition. Notations. Image d'un réel par une fonction. Ensemble image. Antécédents. Fonctions égales, fonctions constantes.
- Courbe représentative d'une fonction. Équations d'un ensemble de points du plan. Droites et fonctions affines.
- Opérations sur les fonctions
 - ★ Restriction et prolongements.
 - ★ Opérations algébriques sur les fonctions (addition, soustraction, multiplication par une constante, produit, inverse, quotient).
 - ★ Composition de fonctions.
 - ★ Fonction bijective. Réciproque d'une bijection. Interprétation géométrique. Caractérisation (preuve reportée à lundi).

mercredi (13h-15h)

▷ **Cours.** Chapitre 3 – Propriétés des nombres réels

- Majorants, minorants, maximum, minimum.
 - ★ Maximum, minimum d'une partie, d'une famille de réels. Unicité du maximum/minimum. Le cas des intervalles.
 - ★ Théorèmes d'existence de maximum ou de minimum (parties non vides de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ majorée, minorées). Preuve du principe de récurrence. Ensemble fini. Premières méthodes pour trouver un maximum/minimum d'une partie. Petite introduction aux bornes supérieures/inférieures.
 - ★ Partie entière d'un réel. Démonstration de l'unicité.
- Racines d'un réel positif.
 - ★ Existence admise. Preuve de l'unicité. Notations $\sqrt[n]{x}$ et $x^{1/n}$. Propriétés.

mardi (8h-10h et 10h-12h)

▷ **Exercices.**

- TD n° 2 : 1,7,8,(gr.1),10(gr.2),11
- TD n° 3 : 2,7,11

lundi (8h-12h)

▷ **Cours.** Chapitre 2 – Raisonnements usuels

- Raisonnement par récurrence.
 - ★ Récurrence double.
 - ★ Récurrence forte.
 - ★ Récurrence finie, récurrence descendante.

▷ **Cours.** Chapitre 3 – Propriétés des nombres réels

- Les ensembles de nombres réels.
 - ★ Existence admise des ensembles de nombres réels ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$).
 - ★ Opérations algébriques dans $\mathbb{R}$.
 - Addition, soustraction, multiplication et division de réels. Développement, factorisation. Simplification de termes. Produit nul de réels. Stabilité.
 - Le cas des entiers naturels. Diviseurs, multiples. Parité. Division euclidienne. Nombres premiers, premiers entre eux. Décomposition en produits de facteurs premiers.
 - Le cas des rationnels. Opération dans $\mathbb{Q}$. Forme irréductible.

- Puissances entières. Puissances de -1 . Propriétés des puissances. Identités remarquables pour deux ou trois termes.
- ★ Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
 - Propriétés de réflexivité, antisymétrie, transitivité. Ordre total. Compatibilité avec addition et multiplication.
 - Inégalités larges et strictes. Signe d'un réel. Tableaux de signe.
 - Passage à la puissance entière dans une inégalité.
 - Intervalles. Notation $[[p; n]]$.
- ★ Valeur absolue. Propriétés. Liens avec les intervalles. Inégalité triangulaire. Inégalité triangulaire renversée.
- Majorants, minorants, maximum, minimum.
 - ★ Majorant, minorant d'une partie non vide. Partie bornée. Premières méthodes pour trouver un majorant/minorant d'une partie.

▷ **Exercices.**

- TD n° 2 : 3,9

Semaine du 2 septembre 2024

jeudi (8h-12h)

▷ **Exercices.**

- TD n° 1 : 5,7,10

▷ **Photo de classe.**

▷ **Cours.** Chapitre 2 – Raisonnements usuels

- Raisonnement direct (règle du modus ponens).
- Raisonnement par contraposée.
- Raisonnement par l'absurde.
- Raisonnement par disjonction des cas.
- Raisonnement par double implication.
- Raisonnement par analyse-synthèse.
- Raisonnement par récurrence.
 - ★ Récurrence simple. Remarques sur la rédaction (l'hérédité de la preuve par récurrence de « $\forall n \geq n_0, P(n)$ ». doit commencer absolument par : « Soit $n \geq n_0$. Supposons $P(n)$ vraie »).

mercredi (13h-15h)

▷ **Cours.** Chapitre 1 – Logique, ensembles et quantificateurs

- Comment construire une démonstration.
 - ★ Preuve d'une conjonction, disjonction. Preuve directe d'une implication. Preuve d'une équivalence (équivalences successives ou double implication). Raisonnement par implications multiples.
 - ★ Preuve d'une inclusion ou d'une égalité ensembliste (par équivalences ou par double inclusion).
 - ★ Preuve de l'existence d'un objet. Preuve d'une proposition universelle. Preuve de l'unicité d'un objet.
 - ★ Notion d'équation et d'inéquation.
- Annexe : alphabet grec.

▷ **Exercices.**

- TD n° 1 : 5,7

mardi (8h-10h)

▷ Cours. Chapitre 1 – Logique, ensembles et quantificateurs

- Quantificateurs.
 - ★ Contre-exemples sur l'interversion de $\forall$ et $\exists$, sur la distributivité de $\exists$ sur et et de $\forall$ sur ou. Les quantificateurs ne sont pas des abréviations.
 - ★ Négation de proposition contenant des quantificateurs.
 - ★ Notation $\exists!$.
 - ★ Union et intersection d'une famille de parties.
- Comment construire une démonstration.
 - ★ Conseils de rédaction (on écrit en français, on introduit les objets)

▷ Exercices.

- TD n° 1 : 6,8

lundi (11h-12h et 13h-16h)

▷ Cours. Chapitre 1 – Logique, ensembles et quantificateurs

- Éléments de logique.
 - ★ Proposition. Vocabulaire (axiome, théorème, lemme, corollaire, conjecture, démonstration). Propositions équivalentes.
 - ★ Négation, conjonction, disjonction. Distributivité. Lois de Morgan.
 - ★ Implication. Conditions nécessaires/suffisantes. Réciproque. Reformulation en terme de ou. Transitivité. Négation, contraposée d'une implication. Double implication.
- Vocabulaire ensembliste.
 - ★ Ensemble, éléments. Ensembles égaux. Ensemble vide. Cardinal d'un ensemble fini.
 - ★ Définition par extension. Propriété portant sur les éléments d'un ensemble. Définition par compréhension.
 - ★ Notion d'application d'un ensemble dans un autre. Image d'un élément. Ensemble image.
 - ★ Inclusion. Parties d'un ensemble. Différence d'ensembles. Complémentaires. Union. Intersection.
 - ★ Produit cartésien d'ensembles. Famille d'éléments d'un ensemble.
- Quantificateurs.
 - ★ Quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Variable liée (ou muette), variable libre. Contre-exemples sur l'interversion de $\forall$ et $\exists$, sur la distributivité de $\exists$ sur et et de $\forall$ sur ou. Les quantificateurs ne sont pas des abréviations.

lundi (8h-11h)

▷ Accueil.