Programme de colles - Semaine n^{o} 1

du 15 au 21 septembre 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

1 – Logique, ensembles et quantificateurs

2 – Raisonnements usuels

3 – Propriétés des nombres réels

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer par analyse-synthèse que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.
- Montrer par récurrence forte que tout entier supérieur ou égal à 2 admet un diviseur premier.
- Montrer l'inégalité triangulaire pour deux réels. En déduire l'inégalité triangulaire renversée.
- Énoncer (sans démonstration) les règles de passage à la puissance entière non nulle dans une inégalité stricte[1].
- Montrer l'unicité de la partie entière d'un réel.
- Montrer que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, $\lfloor nx \rfloor \in \left\{ n\lfloor x \rfloor + k \,\middle|\, k \in [\![0\,;n-1]\!] \right\}$ et déterminer, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, les valeurs de x telles que $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor + k$.
- Montrer[2] le théorème de factorisation des trinômes du second degré.

Les exercices (les 45 minutes restantes) consisteront essentiellement en des raisonnements par récurrence, par analyse-synthèse, des preuve d'inégalités et des résolutions d'équations (faisant intervenir sommes, produits, soustractions, divisions, puissances entières, valeurs absolues, parties entières et racines... sans faire d'étude de fonctions).

Prévisions pour la semaine 2 : chapitre 4 (études de fonctions)

1. Il y a sept cas à faire selon que $0 < x < y$ ou $x < y < 0$, selon que n est pair ou impair et selon que n est positif ou négatif... Mais en fait sept cas puisque, si n est positif et impair, il n'est pas nécessaire de distinguer selon le signe des réels.
2. Se donner $a \neq 0$, b et c, écrire $ax^2 + b + c$ sous forme canonique (en détaillant) et en factorisant selon le signe du discriminant.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 1 – Logique, ensembles et quantificateurs

- Éléments de logique.
  - ⋆ Proposition. Vocabulaire (axiome, théorème, lemme, corollaire, conjecture, démonstration). Propositions équivalentes.
  - ⋆ Négation, conjonction, disjonction. Distributivité. Lois de Morgan.
  - ⋆ Implication. Conditions nécessaires/suffisantes. Réciproque. Reformulation en terme de ou. Transitivité. Négation, contraposée d'une implication. Double implication.
- Vocabulaire ensembliste.
  - ⋆ Ensemble, éléments. Ensembles égaux. Ensemble vide. Cardinal d'un ensemble fini.
  - ⋆ Définition par extension. Propriété portant sur les éléments d'un ensemble. Définition par compréhension.
  - ⋆ Notion d'application d'un ensemble dans un autre. Image d'un élément. Ensemble image.
  - ⋆ Inclusion. Parties d'un ensemble. Différence d'ensembles. Complémentaires. Union. Intersection.
  - ⋆ Produit cartésien d'ensembles. Famille d'éléments d'un ensemble.
- Quantificateurs.
  - ⋆ Quantificateurs $\forall$ et $\exists$. Variable liée (ou muette), variable libre. Contre-exemples sur l'interversion de $\forall$ et $\exists$, sur la distributivité de $\exists$ sur et et de $\forall$ sur ou. Les quantificateurs ne sont pas des abréviations.
  - ⋆ Négation de proposition contenant des quantificateurs.
  - ⋆ Notation $\exists!$.
  - ⋆ Union et intersection d'une famille de parties.
- Comment construire une démonstration.
  - ⋆ Conseils de rédaction (on écrit en français, on introduit les objets)
  - ⋆ Preuve d'une conjonction, disjonction. Preuve directe d'une implication. Preuve d'une équivalence (équivalences successives ou double implication). Raisonnement par implications multiples.
  - ⋆ Preuve d'une inclusion ou d'une égalité ensembliste (par équivalences ou par double inclusion).
  - ⋆ Preuve de l'existence d'un objet. Preuve d'une proposition universelle. Preuve de l'unicité d'un objet.
  - ⋆ Notion d'équation et d'inéquation.
- Annexe : alphabet grec.

Chapitre 2 – Raisonnements usuels

- Raisonnement direct (règle du modus ponens).
- Raisonnement par contraposée.
- Raisonnement par l'absurde. Application : le principe des tiroirs.
- Raisonnement par disjonction des cas.
- Raisonnement par double implication.
- Raisonnement par analyse-synthèse.
- Raisonnement par récurrence.
  - ⋆ Récurrence simple. Remarques sur la rédaction (l'hérédité de la preuve par récurrence de « $\forall n \geqslant n_0,\ P(n)$ ». doit commencer absolument par : « Soit $n \geqslant n_0$. Supposons $P(n)$ vraie »).
  - ⋆ Récurrence double.
  - ⋆ Récurrence forte.
  - ⋆ Récurrence finie, récurrence descendante.

Chapitre 3 – Propriétés des nombres réels

- Les ensembles de nombres réels.
  - ⋆ Existence admise des ensembles de nombres réels ($\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$).
  - ⋆ Opérations algébriques dans $\mathbb{R}$.
    - — Addition, soustraction, multiplication et division de réels. Développement, factorisation. Simplification de termes. Produit nul de réels. Stabilité.
    - — Le cas des entiers naturels. Diviseurs, multiples. Parité. Division euclidienne. Nombres premiers, premiers entre eux. Décomposition en produits de facteurs premiers.
    - — Le cas des rationnels. Opération dans $\mathbb{Q}$. Forme irréductible.
    - — Puissances entières. Puissances de -1. Propriétés des puissances. Identités remarquables pour deux ou trois termes.
  - ⋆ Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
    - — Propriétés de réflexivité, antisymétrie, transitivité. Ordre total. Compatibilité avec addition et multiplication.
    - — Inégalités larges et strictes. Signe d'un réel. Tableaux de signe.
    - — Passage à la puissance entière dans une inégalité.
    - — Intervalles. Notation $[\![p\,;n]\!]$.
  - ⋆ Valeur absolue. Propriétés. Liens avec les intervalles. Inégalité triangulaire. Inégalité triangulaire renversée.
- Majorants, minorants, maximum, minimum.
  - ⋆ Majorant, minorant d'une partie non vide. Partie bornée. Premières méthodes pour trouver un majorant/minorant d'une partie.
  - ⋆ Maximum, minimum d'une partie, d'une famille de réels. Unicité du maximum/minimum. Le cas des intervalles.
  - ⋆ Théorèmes d'existence de maximum ou de minimum (parties non vides de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ majorée, minorées). Preuve du principe de récurrence. Ensemble fini. Premières méthodes pour trouver un maximum/minimum d'une partie. Petite introduction aux bornes supérieurs/inférieures.
  - ⋆ Partie entière d'un réel. Démonstration de l'unicité.
- Racines d'un réel positif.
  - ⋆ Existence admise. Preuve de l'unicité. Notations $\sqrt[n]{x}$ et $x^{1/n}$. Propriétés.
  - ⋆ Trinômes du second degré. Forme canonique. Discriminant. Théorème de factorisation. Racines. Relations coefficients/racines. Maximum/minimum d'un trinôme.