Programme de colles - Semaine n° 10

du 1er au 7 décembre 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

13 – Propriété de la borne supérieure

14 – Suites numériques

Partie A : Résultats généraux

Partie B : Limite d'une suite réelle (sauf paragraphe VII)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer l'unicité de la limite d'une suite (dans le cas des limites finies).
- Montrer que $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ lorsque $q \in]-1\,;1[$ et $q^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ lorsque $q \in]1\,;+\infty]$.
- Montrer que :
  - ⋆ une suite qui tend vers $+\infty$ est minorée et non majorée.
  - ⋆ les termes d'une suite qui converge vers $\ell \in]a\,;b[$, appartiennent à $]a\,;b[$ à partir d'un certain rang (lorsque $a < b$ sont des réels).
- Montrer que, si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_-^*$ et $v_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$, alors $u_nv_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$.
- Montrer le théorème de la limite monotone (le cas croissant).
- Montrer le théorème de convergence des suites adjacentes.
- Montrer [1], pour tous $p \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$ et $y \in \mathbb{R}_+^*$, l'existence de la racine $p^{\text{ième}}$ de y.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) :

- commencera par expliciter (modulo quelques transformations) le terme général d'une suite arithmético-géométrique (en redémontrant la formule) ou d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2 à coefficients constants (théorème admis pour le moment) réels ou complexes.
- poursuivra par des exercices de calcul de limites et d'utilisation de limites.

Les exercices sur les suites extraites (et l'utilisation de Bolzano-Weierstrass) et sur les suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$ sont réservés pour la semaine suivantes.

Prévisions pour la semaine 11 : chapitre 14 en entier .

1. Cela a été montré en deux temps : dans le chapitre 13, on a vu que $\{x \in \mathbb{R}_+ \,|\, x^p \leqslant y\}$ admettait une borne supérieure M_y puis, dans le chapitre 14, on a montré que $M_y^p = y$ en utilisant la caractérisation séquentielle.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 13 – Propriété de la borne supérieure

cf. programme de la semaine 9

Chapitre 14 – Suites numériques

Partie A : Résultats généraux

- Notion de suite réelle.
  - ⋆ Fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$. Notation $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Suite démarrant au rang n_0. Représentation graphique.
  - ⋆ Différents modes de définition d'une suite : explicitement, par récurrence ou implicitement.
  - ⋆ Propriétés vraies à partir d'un certain rang.
- Opérations algébriques sur les suites.
- Propriétés générales sur les suites réelles.
  - ⋆ Suites constantes, stationnaires, périodiques.
  - ⋆ Suites positives, négatives.
  - ⋆ Suites monotones. Méthodes pour étudier les variations d'une suite. Somme de suites monotone de même monotonie.
  - ⋆ Suites majorées, minorées, bornées.
- Extension aux suites complexes. Suite complexe bornée.
- Exemples usuels.
  - ⋆ Suite définie par une relation de récurrence additive ou multiplicative.
  - ⋆ Suites arithmétiques (complexes ou réelles).
  - ⋆ Suites géométriques (complexes ou réelles).
  - ⋆ Suites arithmético-géométriques (complexes ou réelles). Méthode du point fixe.
  - ⋆ Suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à coefficients constants. Équation caractéristique. Expression explicite dans les cas complexe. Expression explicite dans les cas réel.

Partie B : Limite d'une suite réelle

- Notion de limite d'une suite réelle
  - ⋆ Limite finie/infinie. Définition quantifiée. Représentation graphique. Définition universelle avec des voisinages.
  - ⋆ Unicité de la limite. Notations $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ (cette dernière est dangereuse).
  - ⋆ Exemples fondamentaux.
  - ⋆ Suites convergentes, divergentes.
  - ⋆ Suites extraite. Extractrice. Si une suite admet une limite dans $\overline{\mathbb{R}}$, alors toute suite extraire admet la même limite. Limite d'une suite si et seulement si les suites des termes de rangs pairs et impairs admettent la même limite.
- Limites et relation d'ordre.
  - ⋆ Propriété d'ordre transmise par la limite. Une suite réelle convergente est bornée. Une suite qui a une limite strictement positive est strictement positive à partir d'un certain rang. Exemples de propriétés analogues.
  - ⋆ Passage à la limite dans une inégalité large. Les inégalités strictes deviennent larges à la limite.
- Opérations sur les suites admettant une limite.

- ⋆ Opérations algébriques : somme, multiplication externe, produit, inverse, quotient. Limites 0^+ et 0^-. Le produit d'une suite bornée et d'une suite qui tend vers 0 tend aussi vers 0. Cas des suites arithmétiques et géométriques.
- ⋆ Composition d'une suite par une fonction. Cas d'une fonction continue. Exemple de la valeur absolue. Exemple du passage à la puissance.
- ⋆ Formes indéterminées. Croissances comparées. Méthodes pour lever les formes indéterminées (factoriser par le terme le plus gros, utiliser des taux d'accroissement, multiplier par la quantité conjuguée).

- Théorèmes d'existence d'une limite.
  - ⋆ Théorème d'encadrement. Théorème de minoration, de majoration.
  - ⋆ Théorème de la limite monotone.
  - ⋆ Suites adjacentes.
  - ⋆ Exemple de la suite des intégrales de Wallis.
- Traduction séquentielle de certaines propriétés.
  - ⋆ Si A est une partie de $\mathbb{R}$ non vide majorée (respectivement non majorée), il existe une suite d'éléments de A qui tend vers $\sup(A)$ (respectivement vers $+\infty$). Caractérisation séquentielle de la borne supérieure/inférieure.
  - ⋆ Caractérisation séquentielle de la densité. Ensemble $\mathbb{D}$ des nombre décimaux. Valeurs décimales approchées par défaut et pas excès à la précision 10^{-n} d'un réel. Les ensembles $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ et $\mathbb{D}$ sont denses dans $\mathbb{R}$.
- Extension aux suites complexes.