Programme de colles - Semaine n° 11

du 8 au 14 décembre 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

13 – Propriété de la borne supérieure

14 – Suites numériques

15 – Ensembles et applications (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer[1] que $W_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sqrt{n}W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

  On utilisera (sans le redémontrer) le fait que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+2} = \dfrac{n+1}{n+2}W_n$.
- Démontrer le cas complexe du théorème de Bolzano Weierstrass (en utilisant le cas réel).
- Montrer que, lorsque D est stable par une fonction f à valeurs réelles et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

  $$u_0 \in D \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

  alors :
  - ⋆ pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est définie et appartient à D.
  - ⋆ Si $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in D$ et f est continue en ℓ, alors ℓ est un point fixe de f.
  - ⋆ Si $g : x \longmapsto f(x) - x$ est de signe positif sur D, alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante sur D.
- Montrer que, lorsque D est stable par une fonction f à valeurs réelles et que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par

  $$u_0 \in D \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n),$$

  alors :
  - ⋆ Si f est croissante sur D, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone et que le monotonie est dictée par le signe de $u_1 - u_0$.
  - ⋆ Si f est décroissante sur D, $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont monotones et que les monotonies sont dictées par le signe de $u_2 - u_0$.
- Montrer, par double inclusion, que $]0\,;1] = \displaystyle\bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{k+1}\,;\frac{1}{k}\right]$.
- Montrer que l'image réciproque par une application d'une intersection de deux parties est l'intersection des images réciproque. Montrer que l'image directe par une application d'une intersection de deux parties est incluse dans l'intersection des images directes et donner un contre-exemple pour l'inclusion contraire.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en un exercice d'étude d'une suite récurrence du type $u_{n+1} = f(u_n)$ avec le moins d'indications possibles. Puis s'il reste du temps, les exercices porteront principalement sur les notions de suites extraites.

Prévisions pour la semaine 12 : chapitre 15

1. Étape 1 : $W_n > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étape 2 : $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Étape 3 : $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Étape 3 : $\dfrac{W_{n+1}}{W_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Étape 4 : $(n+1)W_{n+1}W_n = \dfrac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étape 5 : $\sqrt{n}W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 13 – Propriété de la borne supérieure

cf. programme de la semaine 9

Chapitre 14 – Suites numériques

Partie A : Résultats généraux

cf. programme de la semaine 10

Partie B : Limite d'une suite réelle

cf. programme de la semaine 10
Avec, en plus, le théorème de Bolzano-Weierstrass (cas réel et complexe).

Partie C : Étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

- Existence de la suite : une histoire de stabilité
- Un premier exemple.
- Étude générale.
  - ⋆ Les points fixes sont les limites éventuelles.
  - ⋆ Variations de la suite. Utilisation du signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$ sur un partie stable. Cas où f est croissante sur un partie stable. Cas où f est décroissante sur un partie stable (utilisation des suites des termes de rangs pairs et impairs).
  - ⋆ Représentation graphique.
  - ⋆ Plan général de l'étude. Utilisation du théorème de la limite monotone.
  - ⋆ Importance de la croissance de f sur un domaine stable.
- Un exemple plus difficile.

Chapitre 15 – Ensembles et applications (le début)

- Rappels et compléments sur les ensembles.
  - ⋆ Notion d'ensemble et d'éléments. Appartenance. Égalité d'ensembles. Ensemble vide. Définition par extension, par compréhension, par opérations. Singleton.
  - ⋆ Produit cartésien. Famille d'éléments. Sous-famille, sur-famille, concaténation de familles.
  - ⋆ Parties d'un ensemble.
    - — Inclusion. Inclusion stricte. Double inclusion. L'ensemble vide est inclus dans tout autre ensemble et ne possède qu'un seul sous-ensemble : lui-même.
    - — Ensemble des parties d'un ensemble.
    - — Union et intersection de parties. Propriétés (dont commutativité, associativité, distributivité). Union et intersection des parties d'une famille. Union disjointe. Partitions et recouvrements.
    - — Complémentaire d'une partie. Lois de Morgan. Différence de parties.
- Résultats généraux sur les applications.
  - ⋆ Notion de fonction ou application (notions confondues). Image d'un élément. Ensembles de départ et d'arrivée. Notations. Ensemble $\mathscr{F}(E, F)$ ou E^F des fonctions de E dans F. Antécédents. Retour sur les familles d'éléments. Fonctions égales. Graphe d'une fonction.

- ⋆ Application identité. Application constante. Fonction indicatrice (caractérisation de l'inclusion, de l'égalité, des opérations ensemblistes).
- ⋆ Image directe. Image réciproque.
- ⋆ Restriction et prolongements. Composition de fonctions. Composition avec une indicatrice. Associativité de la composition.