

Programme de colles - Semaine n° 12

du 15 au 21 décembre 2024

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

15 – Ensembles et applications

16 – Relations binaires (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer que, lorsque $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$,
 - ★ si f et g sont injectives, $g \circ f$ est injective.
 - ★ si $g \circ f$ est injective, alors f est injective (avec un exemple où g n'est pas injective).
- Montrer que, lorsque $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$,
 - ★ si f et g sont surjectives, $g \circ f$ est surjective.
 - ★ si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective (avec un exemple où f n'est pas surjective).
- Montrer que, si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow E$ vérifient $g \circ f = \text{Id}_E$ et $f \circ g = \text{Id}_F$, avec f et g sont bijectives et $g = f^{-1}$.
- Montrer que $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$ (vue comme une partie de \mathbb{Q}) n'admet pas de borne supérieure pour l'ordre \leq sur \mathbb{Q} .
- Montrer que, toute partie \mathcal{A} de $\mathcal{P}(E)$, admet $\bigcup_{X \in \mathcal{A}} X$ pour borne supérieure.
- Montrer que les classes d'équivalences pour une relation d'équivalence \sim sur un ensemble E forment une partition de E (en montrant au préalable que, pour tout $(x, y) \in E^2$, $\text{cl}(x) = \text{cl}(y)$ si et seulement si $x \sim y$).

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les ensembles et applications.

Prévisions pour la semaine 13 (après les vacances) : chapitres 15, 16, 17 (début de groupes et anneaux)

Détails des chapitres au programme

Chapitre 15 – Ensembles et applications

- Rappels et compléments sur les ensembles.
 - ★ Notion d'ensemble et d'éléments. Appartenance. Égalité d'ensembles. Ensemble vide. Définition par extension, par compréhension, par opérations. Singleton.
 - ★ Produit cartésien. Famille d'éléments. Sous-famille, sur-famille, concaténation de familles.
 - ★ Parties d'un ensemble.
 - Inclusion. Inclusion stricte. Double inclusion. L'ensemble vide est inclus dans tout autre ensemble et ne possède qu'un seul sous-ensemble : lui-même.
 - Ensemble des parties d'un ensemble.
 - Union et intersection de parties. Propriétés (dont commutativité, associativité, distributivité). Union et intersection des parties d'une famille. Union disjointe. Partitions et recouvrements.
 - Complémentaire d'une partie. Lois de Morgan. Différence de parties.
- Résultats généraux sur les applications.
 - ★ Notion de fonction ou application (notions confondues). Image d'un élément. Ensembles de départ et d'arrivée. Notations. Ensemble $\mathcal{F}(E, F)$ ou E^F des fonctions de E dans F . Antécédents. Retour sur les familles d'éléments. Fonctions égales. Graphe d'une fonction.
 - ★ Application identité. Application constante. Fonction indicatrice (caractérisation de l'inclusion, de l'égalité, des opérations ensemblistes).
 - ★ Image directe. Image réciproque.
 - ★ Restriction et prolongements. Composition de fonctions. Composition avec une indicatrice. Associativité de la composition.
- Injections, surjections, bijections.
 - ★ Injection. Définition en terme d'antécédents, définitions quantifiées. Méthodes de preuve. Cas des fonctions monotones sur un intervalle.
 - ★ Surjection. Définition en terme d'antécédents, définition quantifiée. Lien avec l'image directe. Méthodes de preuve.
 - ★ Surjection. Définition en terme d'antécédents, définition quantifiée. Méthodes de preuve.
 - ★ Composition d'injections, de surjections, de bijections.
 - ★ Réciproque d'une bijection. Théorème de caractérisation. Réciproque d'une composition. Retour sur la notation $f^{-1}(B)$.
 - ★ Retour sur les changements d'indice.
- Ensembles équipotents (HP)

Chapitre 16 – Relations binaires

- Résultats généraux sur les relations binaires.
 - ★ Définition en tant que partie de E^2 . Notation $x\mathcal{R}y$.
 - ★ Exemples : égalité sur E , \leq et $<$ sur \mathbb{R} , \subset sur $\mathcal{P}(E)$, \leq sur $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $\equiv [m]$ sur \mathbb{R} , divisibilité sur \mathbb{Z} , etc.
 - ★ Relation réflexive, symétrique, antisymétrique, transitive.
- Les relations d'ordre.
 - ★ Définition. Exemples. Relation stricte associée à une relation d'ordre.
 - ★ Exemples de l'ordre produit et de l'ordre lexicographique sur un produit cartésien.
 - ★ Ordre total. Ordre partiel.

- ★ Majorants, minorants, maximum, minimum. Borne supérieure, borne inférieure. Un maximum est une borne supérieure. Un minimum est une borne inférieure.
- Les relations d'équivalence.
 - ★ Définition. Exemples.
 - ★ Classe d'équivalence. Les classes d'équivalence forment une partition.
 - ★ Introduction aux ensembles quotients. Exemple de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.