

# Programme de colles - Semaine n° 13

du 5 au 11 janvier 2026

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

- 16 – Relations binaires
- 17 – Groupes et anneaux
  - ★ Lois de composition interne
  - ★ Groupes

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer que l'ordre lexicographique sur  $\mathbb{R}^2$  est une relation d'ordre et déterminer le maximum de la partie  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ .
- Donne la définition d'un groupe et celle d'un sous-groupe. Montrer qu'un sous-groupe  $H$  d'un groupe  $G$  contient le neutre de  $G$  (et que celui-ci est son élément neutre) et que le symétrique de tout élément de  $H$  appartient à  $H$ .
- Donner la définition d'un groupe et celle d'un sous groupe. Montrer que, si  $H$  est une partie non vide d'un groupe  $G$  qui est stable par produit/inverse, alors  $H$  est un sous-groupe de  $G$ .
- Montrer que, si  $f : G \rightarrow G'$  est une morphisme de groupes, alors  $f$  envoie le neutre de  $G$  sur le neutre de  $G'$  puis que, pour tout  $x \in G$  et  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $f(x^n) = f(x)^n$  (en montrant au préalable que  $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$  pour tout  $x \in G$ ).
- Montrer que l'image directe d'un sous-groupe  $H$  de  $G$  par un morphisme de groupe  $f : G \rightarrow G'$  est un sous-groupe de  $G'$  et que l'image réciproque d'un sous-groupe  $K$  de  $G'$  est un sous-groupe de  $G$ .
- Montrer qu'un morphisme de groupe  $f$  est injectif si et seulement si  $\text{Ker}(f) = \{e\}$  (où  $e$  désigne le neutre du groupe de départ). Puis montrer que, si  $y \in \text{Im}(f)$  et  $x_0$  est un antécédent de  $y$  par  $f$ , alors l'ensemble des solutions de l'équation  $y = f(x)$  est  $\{z * x_0 \mid z \in \text{Ker}(f)\}$ .

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les relations d'ordre, d'équivalence et sur les lois de compositions internes et les groupes.

**Prévisions pour la semaine 14 :** chapitres 17 (en entier, avec les anneaux donc) et chapitre 18 (limites et continuité)

# Détails des chapitres au programme

## Chapitre 16 – Relations binaires

cf. programme de la semaine 12

## Chapitre 17 – Groupes et anneaux (le début)

- Lois de composition interne (LCI).
  - ★ Notion de LCI sur un ensemble non vide  $E$ .
  - ★ Lois commutatives, associatives. Convention de notation additive/multiplicative. En notation additive, la loi est toujours commutative. Notations  $nx$  et  $x^n$  lorsque  $x \in E$  et  $n \in \mathbb{N}^*$  lorsque la loi est associative. Extension de quelques propriétés attendues (mais attention quand la loi n'est pas commutative). Éléments qui commutent.
  - ★ Distributivité. Distributivité à gauche/droite.
  - ★ Élément neutre (à gauche et à droite). Unicité. Notations  $0_E$  et  $1_E$ .
  - ★ Élément symétrisable (à gauche et à droite). Symétrique, opposé, inverse. Notation  $-x$  ou  $x^{-1}$ . Inverse d'un produit, d'une puissance, d'un inverse. Simplification à gauche ou à droite par un élément symétrisable. Notation  $nx$  et  $x^n$  lorsque  $x$  est symétrisable et  $n \in \mathbb{Z}$ . Convention que  $x^0$  (ou  $0x$  en additif) est l'élément neutre.
  - ★ Partie stable d'une LCI. Conservation des propriétés d'associativité, commutativité et distributivité.
  - ★ Lois produits.
- Groupes.
  - ★ Notion de groupe. Groupe abélien. Simplification à gauche ou à droite par un élément d'un groupe.
  - ★ Groupe symétrique : groupe des permutations de  $E$  (bijection de  $E$  dans  $E$ ). Notation  $S_E$ .
  - ★ Groupes produits.
  - ★ Sous-groupes. Un sous-groupe contient l'élément neutre et les symétriques de ses éléments. Caractérisation des sous-groupes (non vide et stabilité par inverse et produit).
  - ★ Avant goût de la 2A : Sous-groupes de  $\mathbb{Z}$ . Intersection de sous-groupes.
  - ★ Morphismes de groupes.
    - Image du neutre, image d'un inverse, image d'une puissance. Composition de morphismes.
    - L'image d'un sous-groupe est un sous-groupe. L'image réciproque d'un sous-groupe est un sous-groupe.
    - Image d'un morphisme  $f$ . Notation  $\text{Im}(f)$ .
    - Noyau d'un morphisme  $f$ . Notation  $\text{Ker}(f)$ . CNS d'injectivité.
    - Isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Groupes isomorphes.