

Programme de colles - Semaine n° 14

du 12 au 18 janvier 2026

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

17 – Groupes et anneaux

18 – Limites et continuité

- ★ Notion de limite d'une fonction, limites et relation d'ordre, opérations algébriques et composition, caractérisation séquentielle, théorème d'encadrement, théorème de la limite monotone, continuité, extension aux fonctions à valeurs complexes.
- ★ TVI, théorème de la bijection, théorème des bornes atteintes (*en cours uniquement*).

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Donner trois définitions quantifiées de limites de fonctions (y compris variantes à gauche/droite et continuité), choisies par l'examineur.
- Montrer le sens indirect du théorème de caractérisation séquentielle de la limite (dans le cas d'une limite finie en un réel adhérent au domaine de définition).
- Montrer le TVI avec la méthode de la dichotomie¹.
- Montrer le TVI avec le théorème de la borne supérieure.
- Montrer le théorème des bornes atteintes.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en :

- un ou deux exercices sur les anneaux et les corps.
- un exercice sur les limites et la continuité sans TVI, théorème de la bijection ou des bornes atteintes (révision de calcul de limites, liens entre limites à gauche/droite et limites, utilisation des définitions quantifiées, caractérisations séquentielles, preuve de continuité, preuve de discontinuité ou absence de limite en utilisant des suites, prolongement par continuité, recollement de fonctions, etc.).



Il est attendu que tous les résultats de limites des fonctions usuelles vus dans les chapitres 4 et 5 (notamment les croissances comparées) soient connus.

Prévisions pour la semaine 15 : chapitre 18 et chapitre 19 (dérivation)

1. On se contentera de lister les propriétés des deux suites construites (pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq a_{n+1}$, $b_{n+1} \leq a_n$, $b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$ et $f(a_n) \leq m \leq f(b_n)$) en les justifiant brièvement à l'oral, avant de poursuivre la preuve.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 17 – Groupes et anneaux

- Lois de composition interne (LCI).
 - ★ Notion de LCI sur un ensemble non vide E .
 - ★ Lois commutatives, associatives. Convention de notation additive/multiplicative. En notation additive, la loi est toujours commutative. Notations nx et x^n lorsque $x \in E$ et $n \in \mathbb{N}^*$ lorsque la loi est associative. Extension de quelques propriétés attendues (mais attention quand la loi n'est pas commutative). Éléments qui commutent.
 - ★ Distributivité. Distributivité à gauche/droite.
 - ★ Élément neutre (à gauche et à droite). Unicité. Notations 0_E et 1_E .
 - ★ Élément symétrisable (à gauche et à droite). Symétrique, opposé, inverse. Notation $-x$ ou x^{-1} . Inverse d'un produit, d'une puissance, d'un inverse. Simplification à gauche ou à droite par un élément symétrisable. Notation nx et x^n lorsque x est symétrisable et $n \in \mathbb{Z}$. Convention que x^0 (ou $0x$ en additif) est l'élément neutre.
 - ★ Partie stable d'une LCI. Conservation des propriétés d'associativité, commutativité et distributivité.
 - ★ Lois produits.
- Groupes.
 - ★ Notion de groupe. Groupe abélien. Simplification à gauche ou à droite par un élément d'un groupe.
 - ★ Groupe symétrique : groupe des permutations de E (bijection de E dans E). Notation S_E .
 - ★ Groupes produits.
 - ★ Sous-groupes. Un sous-groupe contient l'élément neutre et les symétriques de ses éléments. Caractérisation des sous-groupes (non vide et stabilité par inverse et produit).
 - ★ Avant goût de la 2A : Sous-groupes de \mathbb{Z} . Intersection de sous-groupes.
 - ★ Morphismes de groupes.
 - Image du neutre, image d'un inverse, image d'une puissance. Composition de morphismes.
 - L'image d'un sous-groupe est un sous-groupe. L'image réciproque d'un sous-groupe est un sous-groupe.
 - Image d'un morphisme f . Notation $\text{Im}(f)$.
 - Noyau d'un morphisme f . Notation $\text{Ker}(f)$. CNS d'injectivité.
 - Isomorphisme. La réciproque d'un isomorphisme est un isomorphisme. Groupes isomorphes.
- Anneaux
 - ★ Notion d'anneau. Anneau commutatif. Anneau produit.
 - ★ 0_A est absorbant. Cas où $0_A = 1_A$. Règles de calcul dans un anneau. Formule de factorisation de $a^n - b^n$ et formule du binôme de Newton lorsque a et b commutent.
 - ★ Diviseurs de zéro. Anneau intègre. Simplification à gauche ou à droite par un élément non nul dans un anneau intègre.
 - ★ Éléments inversibles d'un anneau. Anneau $U(A)$ des éléments inversibles de A . Notion de corps.
 - ★ Sous-anneaux (⚠ un sous-anneau contient 1_A). Caractérisation des sous-anneaux (contient 1_A , stabilité par soustraction et par produit). Un mot sur les sous-corps.
 - ★ Morphismes d'anneaux (⚠ envoie 1_A sur $1_{A'}$). Un mot sur les morphismes de corps. Propriétés hérités des morphismes de groupes (additifs). Image d'une puissance. Image directe, image réciproque. Isomorphisme.
 - ★ Activité : construction de \mathbb{C} .

Chapitre 18 – Limites et continuité

- Notion de limite d'une fonction.
 - ★ Définition quantifiée de des limites finies ou infinies en $\pm\infty$. Limites de $x \mapsto x^n$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.
 - ★ Définition quantifiée de des limites finies ou infinies en un réel a . Si f admet une limite finie en un point de son domaine de définition, alors la limite est $f(a)$.
 - ★ Définition universelle avec des voisinages. Exemple de fonction n'admettent pas de limite. Limites des $f(a+h)$ lorsque h tend vers 0.
 - ★ Unicité de la limite.
 - ★ Limite à gauche, à droite en a . Lien avec les limites selon que f est définie en a ou non.
- Limites et relation d'ordre.
 - ★ Si f admet une limite finie en a , alors f est bornée au voisinage de a . Variantes.
 - ★ Passage à la limite dans une inégalité large.
- Opérations sur les fonctions admettant une limite.
 - ★ Combinaisons linéaires, valeurs absolue, produit, inverse, quotient.
 - ★ Composition de deux fonctions. Composition d'une suite par une fonction. Caractérisation séquentielle de la limite.
- Théorèmes d'existence de limites.
 - ★ Théorème d'encadrement, de minoration, de majoration.
 - ★ Théorème de la limite monotone.
- Continuité.
 - ★ Continuité en un point. Continuité à gauche, à droite. Continuité sur un domaine. Continuité de la fonction $x \mapsto x^n$.
 - ★ Prolongement par continuité.
 - ★ Opérations sur les fonctions continues : opérations algébriques, composition, caractérisation séquentielle.
- Le théorème des valeurs intermédiaires.
 - ★ TVI sur un segment. Preuve par dichotomie. Preuve avec borne supérieure. Implémentation en Python.
 - ★ Autres versions du TVI. L'image d'un intervalle par une fonction continue et un intervalle.
 - ★ Apport de la stricte monotonie : corollaire du TVI, théorème de la bijection. Comment obtenir $f(I)$? Si f est continue et injective, alors f est strictement monotone.
 - ★ Application à l'étude des suites implicites. Cas où $f(u_n) = n$. Cas où $f_n(u_n) = 0$.
- Le théorème des bornes atteintes. L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
- Extension aux fonctions à valeurs complexes. Lien avec les limites et la continuité des parties réelles et imaginaires.