Programme de colles - Semaine n° 19

du 15 au 21 février 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

23 – Calcul matriciel

24 – Intégration sur un segment

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^4$, $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$. En déduire l'action de la multiplication à gauche et à droite d'une matrice carrée quelconque par une matrice élémentaire.
- Montrer[1] que, pour toute fonction f continue et positive et non identiquement nulle sur $[a\,;b]$ (avec $a < b$), on a $\displaystyle\int_a^b f > 0$ (on fera aussi un dessin).
- Montrer le théorème fondamental de l'analyse.
- Détailler[2] la démarche de comparaison somme/intégrale pour une fonction décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ (on fera aussi un dessin).
- Montrer le théorème de convergence des sommes de Riemann à gauche pour une fonction Lipschitzienne (avec encadrement de l'erreur).

Le reste de la colle consistera **d'abord** en des exercices sur les matrices. Pour un produit de matrices de taille quelconque, un produit « à la main » avec des pointillés n'est pas autorisé : il est attendu qu'un calcul de produit soit fait avec la formule de la définition du produit (coefficient par coefficient avec une somme) ou avec un théorème du cours comme le binôme de Newton. Ne pas connaître parfaitement la définition du produit matriciel entraînera automatiquement une note en dessous de 9. Pour le calcul d'inverse d'une matrice avec la méthode du pivot de Gauss (Jordan), celle-ci doit être respectée à la lettre, les opérations doivent être indiquées, aucune fraction ne doit apparaître sauf éventuellement à la toute dernière étape et aucune interversion de ligne/colonne ne doit avoir lieu si le pivot n'est pas nul.

S'il reste du temps en fin de colle, un petit exercice d'intégration (par exemple avec une somme de Riemann) pourra être proposé.

Prévisions pour la semaine 20 (après les vacances) : chapitres 24 et 25 (formules de Taylor)

1. On attend la première preuve vue en cours (avec la minoration par l'aire d'un rectangle).
2. On montrera que :

⋆ $\forall k \geqslant 2,\ f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f$

⋆ $\forall k \geqslant 1,\ f(k) \geqslant \displaystyle\int_{k}^{k+1} f$

⋆ $\forall n \geqslant 2,\ \displaystyle\int_1^{n+1} f \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant f(1) + \int_1^n f.$

Détails des chapitres au programme

Chapitre 23 – Calcul matriciel

- Notion de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$.
  - ⋆ Notation en forme de tableau à n lignes et p colonnes. Ligne, colonne, coefficient, indice. Notations $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
  - ⋆ Matrices/vecteurs lignes, matrices/vecteurs colonnes. Matrices élémentaires. Matrice nulle. Matrice identité.
- Opérations sur les matrices.
  - ⋆ Addition et multiplication par un scalaire. Propriétés générales. Structure de groupe. Matrice scalaire. Combinaison linéaire de matrices. Toute matrice est CL des matrices élémentaires. Trace d'une matrice. Linéarité de la trace.
  - ⋆ Produit de matrices. Associativité. Non-commutativité. Matrices qui commutent. Bilinéarité. Produit par une matrice scalaire. Produit de deux matrices élémentaires avec le symbole de Kronecker. Produit d'une matrice à gauche ou à droite par une matrice élémentaire. Produit par une matrice colonne : AX est CL des colonnes de A. Propriété : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
  - ⋆ Transposition de matrices. Transposée d'une CL, d'un produit. Trace d'une transposée.
- Anneau des matrices carrées de taille n.
  - ⋆ Structure d'anneau. Propriétés des puissances entières (héritées de la structure d'anneau, dont le binôme de Newton et la formule de factorisation $A^p - B^p$).
  - ⋆ Matrices diagonales. Structure d'anneau commutatif. Produit, puissances de matrices diagonales.
  - ⋆ Matrices triangulaires supérieurs/inférieures. Structure d'anneau non-commutatif. Produit de matrices triangulaires supérieurs/inférieures.
  - ⋆ Matrices symétriques et antisymétriques. Structure de groupe (mais pas d'anneau).
  - ⋆ Matrices inversibles.
    - — Inverse à gauche/droite. Matrice inversible. Si une matrice admet un inverse à gauche ou à droite, elle est inversible (résultat admis pour le moment). Unicité de l'inverse. Groupe linéaire.
    - — Inverse de l'inverse, d'un produit, d'une puissance, d'une transposée, d'une multiplication avec un scalaire.
    - — Le cas particulier d'une matrice 2×2.
    - — Utilisation d'un polynôme annulateur (sans rentrer dans le détail de cette notion) pour le calcul de l'inverse.
    - — Introduction aux matrices nilpotentes.
- Liens entre matrices et systèmes linéaires
  - ⋆ Matrice associée à un système. Un système $AX = B$ est compatible si et seulement si B est CL des colonnes de A Les solutions de $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, avec X_0 une solution particulière et Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.
  - ⋆ Opérations élémentaire sur les lignes et les colonnes. Matrices de transvection, de dilatation, de permutation. Traduction des opérations élémentaires en terme de produit à gauche à droite. Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.
  - ⋆ Système de Cramer. Unique solution $X = A^{-1}B$. Si $AX = 0$ a une solution non nulle, A n'est pas inversible. Cas de deux lignes ou deux colonnes proportionnelles. Une matrice A est inversible si et seulement si, pour tout second membre Y, le système linéaire $Y = AX$ admet une unique solution.
  - ⋆ Cas particulier des matrices diagonales et triangulaires.
  - ⋆ Calcul de l'inverse d'une matrice par résolution de système. Calcul de l'inverse en faisant sur I_n les mêmes opérations et dans le mêmes ordre que celles qui transforment A en en I_n (méthode de Gauss-Jordan). On peut choisir les lignes ou les colonnes mais aucun mélange n'est possible.

Chapitre 24 – Intégration sur un segment

- Continuité uniforme.
  - ⋆ Limitation à la notion de continuité.
  - ⋆ Fonction uniformément continue (UC). Une fonction UC est continue. Une fonction Lipschitzienne est UC. Exemples et contre-exemples. Méthodes de preuve.
  - ⋆ Le théorème de Heine
- Fonctions en escalier, fonctions continues par morceaux
  - ⋆ Subdivisions. Pas d'une subdivision. Subdivision régulière. Subdivision plus fine.
  - ⋆ Fonctions en escalier sur un segment. Subdivision adaptée. Subdivision adaptée à deux fonctions en escalier. Notation $\mathscr{E}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. Structure d'anneau commutatif. Stabilité par multiplication externe, par passage au module. Partie réelle et imaginaire d'une fonction en escalier.
  - ⋆ Fonctions continue par morceaux sur un segment. Subdivision adaptée. Subdivision adaptée à deux fonctions continue par morceaux. Notation $\mathscr{C}^{pm}([a\,;b]\,,\mathbb{K})$. Structure d'anneau commutatif. Stabilité par multiplication externe, par passage au module. Partie réelle et imaginaire d'une fonction continue par morceaux. Une fonction continue par morceaux sur un segment est bornée.
  - ⋆ Norme infinie. Inégalité triangulaire. Théorèmes d'approximation uniforme d'une fonction continue par morceaux par une fonction en escalier. Convergence uniforme d'une suite de fonctions en escalier.
- Intégrale d'une fonction en escalier.
  - ⋆ Définition (la valeur ne dépend pas du choix de la subdivision adaptée). Notations $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$ et $\int_{[a\,;b]} f$. Interprétation géométrique. Cas d'une fonction constante.
  - ⋆ Relation de Chasles. Linéarité. Modification d'un nombre fini de valeurs. Propriété de positivité. Propriété de croissance. Inégalité triangulaire.
- Intégrale d'une fonction continue par morceaux.
  - ⋆ Définition (la valeur ne dépend pas du choix de la suite de fonctions en escaliers qui converge uniformément vers la fonction). Notations $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, $\int_a^b f$ et $\int_{[a\,;b]} f$.
  - ⋆ Relation de Chasles. Linéarité. Valeur moyenne d'une fonction. Partie réelle et imaginaire d'une intégrale. Modification d'un nombre fini de valeurs. Propriété de positivité. Propriété de croissance. Propriété de stricte positivité (cas d'une fonction continue). Inégalité triangulaire.
  - ⋆ Extension aux fonctions continues par morceaux sur un segment (bornes dans le mauvais sens, bornes égales).
- Calcul d'intégrales
  - ⋆ Le théorème fondamental de l'analyse. Limite quand on fait converger une borne. Toute fonction continue sur un intervalle admet une primitive. Preuve de l'IAF complexe. Rappel : formule de calcul par différence d'une primitive en les bornes, formule d'IPP, formule de changement de variable.
  - ⋆ Calcul d'intégrale de fonctions continues par morceaux (avec la relation de Chasles).
  - ⋆ Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques.
  - ⋆ Technique de comparaison à une intégrale
  - ⋆ Fonctions et suites définies par une intégrale (cas des bornes variables et intégrande fixe, cas des bornes fixes et intégrande variable).
- Sommes de Riemann
  - ⋆ Sommes de Riemann à gauche et à droite. Théorème de convergence pour les fonctions continues par morceaux. Démonstration dans le cas Lipschitzien avec majoration de l'erreur et dans le cas continu. Remarque sur le cas monotone.
  - ⋆ Sommes de Riemann à pas quelconque (HP)
  - ⋆ Introduction à la méthode des rectangles et des trapèzes