Programme de colles - Semaine n° 2

du 22 au 28 septembre 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

4 – Fonctions

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer que $f : x \longmapsto x + 2\sqrt{x}$ est une bijection [1] de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ et expliciter sa réciproque.
- Montrer que si $f : [0\,;1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue sur $[0\,;1]$ et si $[0\,;1]$ est stable par f, alors f possède un point fixe.
- Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, $f_n : x \longmapsto x^n$ est une bijection [2] de $\mathbb{R}_+$ sur lui même. Montrer que f_n^{-1} (la fonction racine $n^{\text{ième}}$) est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer sa dérivée.
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x \geqslant 1 + x$ de deux façons différentes (à l'aide d'une étude de fonction et avec un argument de convexité).
- Tracer l'allure des courbes représentatives des fonctions $\exp$, $\ln$, ch, sh, th et de $x \longmapsto x^\alpha$ pour trois valeurs de α choisies par l'examinateur [3].

  Pour les fonctions $\exp$, ch, sh *et* th, *on représentera la tangente en* 0. *Pour la fonction* $\ln$ *on représentera la tangente en* 1. *On placera aussi correctement les éventuelles asymptotes verticales et horizontales.*
- Montrer [4] que, pour tout $\alpha > 0$, la fonction $x \longmapsto x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ (prolongée en 0 en posant $0^\alpha = 0$) est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+$ lorsque $\alpha \geqslant 1$ et sur $\mathbb{R}_+^*$ lorsque $\alpha < 1$. Calculer sa dérivée.

Les exercices (les 45 minutes restantes) consisteront essentiellement en des exercices sur les fonctions de la variable réelle et à valeurs réelles. On commencera par un petit exercice (déterminer un domaine de définition/dérivabilité, calculer une dérivée, des limites simples, déterminer une bijection réciproque, etc.) avant de faire une étude complète de fonction.

Prévisions pour la semaine 3 : chapitre 4 et 5 (Trigonométrie).

1. Sans appliquer le théorème de la bijection.
2. On admet que f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n'(x) = nx^{n-1}$.
3. Lorsque $\alpha > 0$, on prend la convention que $0^\alpha = 0$. Pour résumer :

$f : x \mapsto x^\alpha$	D_f	$D_{f'}$	$\mathcal{C}_f$
$\alpha \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	ressemble à $x \mapsto x^2$ ou $x \mapsto x^3$ selon la parité.
$\alpha \in]1\,;+\infty[\backslash\mathbb{N}$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+$	ressemble à $x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}_+$
$\alpha \in]0\,;1[$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}_+^*$	ressemble à $x \mapsto \sqrt{x}$
$\alpha \in \mathbb{Z}\backslash\mathbb{N}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	ressemble à $x \mapsto 1/x$ ou $x \mapsto 1/x^2$ selon la parité
$\alpha \in \mathbb{R}_-^*\backslash\mathbb{Z}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	ressemble à $x \mapsto 1/x$ sur $\mathbb{R}_+^*$

4. Attention : je ne demande que le cas $\alpha > 0$ dans cette question (contrairement au cours où le cas $\alpha < 0$ a aussi été traité).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 4 – Fonctions

Partie A : Résultats généraux

- Fonction d'une partie de $\mathbb{R}$ dans une autre. Domaine de définition. Notations. Image d'un réel par une fonction. Ensemble image. Antécédents. Fonctions égales, fonctions constantes.
- Courbe représentative d'une fonction. Équations d'un ensemble de points du plan. Droites et fonctions affines.
- Opérations sur les fonctions
  - ⋆ Restriction et prolongements.
  - ⋆ Opérations algébriques sur les fonctions (addition, soustraction, multiplication par une constante, produit, inverse, quotient).
  - ⋆ Composition de fonctions.
  - ⋆ Fonction bijective. Réciproque d'une bijection. Interprétation géométrique. Caractérisation.
- Propriétés globales d'une fonction.
  - ⋆ Signe d'une fonction. Signe d'une fonction obtenue par opération.
  - ⋆ Variations d'une fonction. Monotonie. Variations d'une fonction obtenue par opération. Apport de la stricte monotonie sur le passage à une fonction dans une inégalité, sur la monotonie d'une composition, sur l'unicité d'un éventuel antécédent.
  - ⋆ Fonction majorées, minorées, bornées. Minimum, maximum, extremum d'une fonction. Utilisation de la monotonie pour déterminer un maximum ou un minimum.
  - ⋆ Translations affine d'une fonctions (contractions, dilatations, symétries). Fonctions paires, impaires. Réciproque d'une bijection impaire. Fonctions périodiques. Interprétations géométriques.
  - ⋆ Propriétés de stabilité (partie stable, point fixe).

Partie B : Rappels et compléments sur les limites, la continuité et la dérivabilité

- Limites d'une fonction.
  - ⋆ Rappel des définitions vues en Terminale : limite finie, infinie en un réel ou en $\pm\infty$. Limite à gauche/droite. Unicité de la limite.
  - ⋆ Opérations algébriques sur les limites. Limites 0^+ et 0^-. Formes indéterminées. Premières méthodes pour lever une forme indéterminée. Limite d'une composée.
  - ⋆ Théorème d'encadrement. Théorème de majoration/minoration.
  - ⋆ Asymptotes horizontales, verticales, obliques. Branches paraboliques.
- Continuité.
  - ⋆ Continuité en un point, sur un domaine. Notation $\mathscr{C}^0$.
  - ⋆ Opérations algébriques sur les fonctions continues. Composition de fonctions continues. Prolongement par continuité.
  - ⋆ Le théorème des valeurs intermédiaires. Corollaire avec stricte monotonie.
  - ⋆ Théorème de la bijection. Preuve de l'existence de la racine $n^{\text{ième}}$ d'un réel positif.
- Dérivabilité.
  - ⋆ Taux d'accroissement. Fonction dérivable. Interprétation géométrique. La dérivabilité entraîne la continuité (la réciproque est fausse).
  - ⋆ Opérations algébriques sur les fonctions dérivables. Dérivée d'une composée. Dérivée d'une réciproque.
  - ⋆ Caractérisation des fonctions constantes sur un intervalle par la dérivée. Caractérisation des fonctions monotones/strictement monotones dérivables sur un intervalle.

* Dérivées successives. Notations $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$. Opérations sur les fonctions de classes $\mathscr{C}^n$ et $\mathscr{C}^\infty$.
* Fonctions convexes, fonctions concaves. Interprétation géométriques (position de cordes et d'arcs associés). Caractérisation des fonctions convexes, concaves dérivables. Tangente d'une fonction convexe, concave. Points d'inflexions.

Partie C : Premières fonctions usuelles

- Fonctions algébriques usuelles.
  * Fonctions puissances entières (continuité, dérivabilité, limites, parité, variations, convexité/concavité, courbe).
  * Fonctions polynomiales. Unicité des coefficients. Degré. Racine. Factorisation d'une fonction polynomiale dont on connaît une racine. Le nombre de racines est majorée par le degré. Limites, continuité, dérivabilité. Monotonie des fonctions polynomiales de degré 2.
  * Fonctions rationnelles. Limites.
  * Fonctions racines (continuité, dérivabilité, limites, variations, concavité, courbe).
  * Fonction partie entière.
  * Fonction valeur absolue (continuité, dérivabilité, limites, parité, variations, courbe).
- Fonction exponentielle
  * Existence admise. Nombre e. Unicité. Propriétés fonctionnelles (continuité, dérivabilité, limites, variations, convexité, courbe). Bijectivité. Inégalité $e^x \geqslant 1+x$.
  * Des propriétés proches de celles de puissances entières.
- Fonctions hyperboliques.
  * Cosinus et sinus hyperbolique (parité, continuité, dérivabilité, limites, variations, convexité/concavité, courbe)
  * Tangente hyperbolique (parité, continuité, dérivabilité, limites, variations, convexité/concavité, courbe)
- Fonction logarithme népérien.
  * Définition comme réciproque de la fonction exponentielle. Propriétés (continuité, dérivabilité, limites, variations, concavité, courbe). Inégalité $\ln(x) \leqslant x-1$.
  * Le logarithme transforme les produits en sommes.
  * Fonction logarithme en base a.
- Puissances à exposant réel.
  * Définition $x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln(x)}$ lorsque $x>0$. Convention $0^\alpha = 0$ lorsque $\alpha > 0$. Extension des propriétés des puissances.
  * Fonctions puissances généralisées. Le domaine de définition dépend de si $\alpha \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}_+\backslash\mathbb{N}$ ou $\mathbb{R}_-^*\backslash\mathbb{Z}$. Propriétés (continuité, dérivabilité, limites, variations, convexité/concavité, courbe). Position relatives selon la puissance.
  * Fonctions exponentielles de base a.
  * Fonction du type u^v. Réflexe : on revient à la définition avec exponentielle et logarithme.
  * Croissances comparées (limite quand $x \to +\infty$ de quotients de termes du type $(\ln(x))^\beta$, x^α ou $\mathrm{e}^{\gamma x}$; limite quand $x \to +\infty$ de $x^\alpha |\ln(x)|^\beta$).

Partie D : Études de fonctions

- Intérêt des études de fonctions.
- Tableaux de variations.
  * Construction et lecture d'un tableau de variations.
  * Utilisation d'un tableau de variations (pour appliquer TVI ou théorème la bijection, pour déterminer des majorants, minorants ou extrema).
- Plan d'étude de fonction.