Programme de colles - Semaine n° 20

du 9 au 15 mars 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

24 – Intégration sur un segment

25 – Formules de Taylor

26 – Analyse asymptotique (*en cours uniquement*)

Première question de cours. Donner, sans démonstration, le développement limité à tout ordre en 0 d'une fonction usuelle au programme [1], choisie par l'examinateur.

Deuxième question de cours. Choisie par l'examinateur parmi la liste suivante :

- En utilisant des comparaisons sommes/intégrales (que l'on remontrera dans ce cas particulier [2]), montrer que la suite
$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\ln(n)\right)_{n\geqslant 1}$$
admet une limite finie.
- Énoncer sans démonstration la formule de Taylor avec reste intégral et l'inégalité de Taylor-Lagrange. Utiliser cette dernière pour montrer que
$$\forall x\in\mathbb{R},\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\mathrm{e}^x.$$
- Énoncer sans démonstration la formule de Stirling. L'utiliser [3] pour montrer que $\ln(n!)\sim n\ln(n)$ et $(n!)^{\frac{1}{n}}\sim\frac{n}{\mathrm{e}}$.
- Énoncer et démontrer [4] le théorème de primitivation d'un développement limité.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur l'intégration sur un segment (preuve d'inégalités intégrales, étude de fonction définie par une intégrales dont les bornes varient, sommes de Riemann, etc.) et les formules de Taylor (par exemple utilisation de la formule de Taylor avec reste intégral pour démontrer une inégalité ou de l'inégalité de Taylor Lagrange pour obtenir un encadrement permettant de calculer une limite de somme ou d'intégrale par exemple). S'il reste 5 minutes en fin de colle, on pourra proposer un calcul d'équivalent simple (sans développements limités, juste avec les équivalents usuels).

Prévisions pour la semaine 21 : chapitre 26 (analyse asymptotique) et 27 (séries numériques).

1. DL de $x\mapsto\frac{1}{1\pm x}$, $x\mapsto\ln(1\pm x)$, $x\mapsto(1+x)^\alpha$, $\exp$ à l'ordre n, DL de ch et $\cos$ à l'ordre $2n$ (et même $2n+1$), DL de sh, $\sin$ et Arctan à l'ordre $2n+1$ (et même $2n+2$). Le DL de $\tan$ en 0 n'est exigible qu'à l'ordre 3 (et donc 4).
2. D'abord on justifier que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in[\![1\,;n]\!]$, $\dfrac{1}{k+1}\leqslant\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{dt}{t}\leqslant\frac{1}{k}$. L'inégalité de gauche permet déjà de montrer que $(u_n)_{n\geqslant1}$ est décroissante. Ensuite on somme l'inégalité de droite pour montrer que $(u_n)_{n\geqslant1}$ est positive. On conclut par théorème de la limite monotone.
3. Attention le deuxième équivalent a été fait en TD et non en cours. Une façon de faire : on écrit $n!\underset{+\infty}{=}\sqrt{2\pi}\mathrm{e}^{-n}n^{n+\frac{1}{2}}(1+\mathrm{o}(1))$, on passe au logarithme, on développe et on montre que $\ln(n!)=-n+n\ln(n)+\mathrm{o}(n)$. On conclut déjà pour le premier équivalent. Pour le deuxième, on divise pas n, pour obtenir que $\frac{1}{n}\ln(n!)=-1+\ln(n)+\mathrm{o}(1)$ et on conclut en passant à l'exponentielle (mais en justifiant correctement).
4. avec le lemme.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 24 – Intégration sur un segment

- cf. programme de la semaine 19.

Chapitre 25 – Formules de Taylor

- Formule de Taylor avec reste intégral. Caractérisation des fonctions polynomiales. Application à la preuve d'inégalités.
- Inégalité de Taylor-Lagrange. Application : expression de e^x, $\cos(x)$, $\sin(x)$, $\ln(1+x)$ en tant que limite d'une somme.
- Formule de Taylor-Young.

Chapitre 26 – Analyse asymptotique

Partie A : Relations de comparaison des suites et des fonctions

- Suites négligeables.
  - ⋆ Définition en terme de quotient qui tend vers 0 (pour des suites dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang). Notation o. Cas particulier de $= \mathrm{o}(1)$. Interprétation.
  - ⋆ Réécriture des croissances comparées.
  - ⋆ Transitivité. Multiplication par une constante. Produit par une suite. Produit de deux o. Élévation dans une puissance fixe. Passage à la valeur absolue, au module. Somme de deux mêmes o.
- Suites équivalentes.
  - ⋆ Définition en terme de quotient qui tend vers 1 (pour des suites dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang). Notation $\sim$. Interprétation.
  - ⋆ Équivalent usuels lorsque $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ de : e^{u_n}, $\mathrm{e}^{u_n}-1$, $\ln(1+u_n)$, $(1+u_n)^\alpha - 1$, $\mathrm{sh}(u_n)$, $\mathrm{ch}(u_n)$, $\mathrm{ch}(u_n)-1$, $\mathrm{th}(u_n)$, $\sin(u_n)$, $\cos(u_n)$, $\cos(u_n)-1$, $\tan(u_n)$, $\mathrm{Arcsin}(u_n)$, $\mathrm{Arccos}(u_n)$, $\mathrm{Arccos}(u_n)-\frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arctan}(u_n)$. Équivalent de $P(n)$ et $P(1/n)$ lorsque $P \in \mathbb{K}[X]$. Formule de Stirling.
  - ⋆ Réflexivité, symétrie, transitivité. Signe dans un équivalent. Théorème d'encadrement pour les équivalents. Produit, quotient, passage à une puissance fixe. Passage à la valeur absolue, au module.
  - ⋆ Liens entre $\sim$ et limites.
  - ⋆ Liens entre $\sim$ et o : $u_n \sim v_n$ si et seulement si $u_n = v_n + \mathrm{o}(v_n)$.
  - ⋆ Opérations illégales sur les équivalents et comment contourner la loi.
    - — Somme d'équivalents : on repasse par les o
    - — Passage à la fonction (même continue) dans un équivalent. Méthodes pour dans le cas d'un équivalent à une constante, le cas du logarithme, le cas de l'exponentielle, le cas de la composition d'équivalents usuels (tout doit être redémontré).
    - — Passage à une puissance variable : on utilise la notation $u_n^{x_n} = \mathrm{e}^{x_n \ln(u_n)}$.
    - — Passage à la partie réelle/imaginaire.
- Suites dominées.
  - ⋆ Définition en terme de quotient borné (pour des suites dont les termes sont non nuls à partir d'un certain rang). Notation O. Cas particulier de $= \mathrm{O}(1)$. Interprétation.
  - ⋆ Transitivité. Multiplication par une constante. Produit par une suite. Produit de deux o. Élévation dans une puissance fixe. Passage à la valeur absolue, au module. Somme de deux mêmes o.
  - ⋆ Lien entre O, o et $\sim$.
- Comparaison de fonctions

- ⋆ Fonctions négligeables.
    - — Définition en terme de quotient qui tend vers 0 (pour des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ sauf éventuellement en a).
    - — Réécriture des croissances comparées.
    - — Propriétés analogues à celles pour les suites. Substitution par une suite ou par une fonction.
- ⋆ Fonctions équivalents.
    - — Définition en terme de quotient qui tend vers 1 (pour des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ sauf éventuellement en a).
    - — Équivalents usuels en 0 : e^x, $\mathrm{e}^x - 1$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha - 1$, $\mathrm{sh}(x)$, $\mathrm{ch}(x)$, $\mathrm{ch}(x) - 1$, $\mathrm{th}(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\cos(x) - 1$, $\tan(x)$, $\mathrm{Arcsin}(x)$, $\mathrm{Arccos}(x)$, $\mathrm{Arccos}(x) - \frac{\pi}{2}$, $\mathrm{Arctan}(x)$.
    - — Propriétés analogues à celles pour les suites. Substitution par une suite ou par une fonction.
- ⋆ Fonctions dominées.
    - — Définition en terme de quotient borné (pour des fonctions qui ne s'annulent pas au voisinage de $a \in \overline{\mathbb{R}}$ sauf éventuellement en a).
    - — Propriétés analogues à celles pour les suites. Substitution par une suite ou par une fonction.

Partie B : Développements limités

- Notion de développement limité.
    - ⋆ Définition. Interprétation. Premiers exemples (réécriture des équivalents usuels, DL de $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ à tout ordre).
    - ⋆ Troncature. Unicité du DL. DL d'une fonction paire/impaire en 0. Se ramener à un DL en 0. Lien avec les équivalents.
    - ⋆ DL avec un O.
- Théorèmes d'existence de développements limités.
    - ⋆ CNS d'un DL à l'ordre 0 et à l'ordre 1.
    - ⋆ L'existence d'un DL à l'ordre $n \geqslant 2$ n'entraîne pas que f est n fois dérivable.
    - ⋆ Formule de Taylor-Young (réécriture de celle du chapitre précédent).
- Développements limités usuels.
    - ⋆ DL en 0 à tout ordre de $x \mapsto \frac{1}{1 \pm x}$, $x \mapsto \ln(1 \pm x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $\exp$, ch, sh, $\cos$, $\sin$ et Arctan.
    - ⋆ Exemples du DL en 0 de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}}$ et $x \mapsto \sqrt{1+x}$ à tout ordre.
    - ⋆ DL à l'ordre 3 de $\tan$ en 0.
- Opérations sur les développements limités.
    - ⋆ Combinaison linéaire de DL.
    - ⋆ Produit de DL.
    - ⋆ Méthode pour composer des DL. Utilisation du DL de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ pour des quotients de DL.
    - ⋆ Théorème de primitivation d'un DL. Méthode pour dériver un DL.