

Programme de colles - Semaine n° 22

du 23 au 29 mars 2026

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :


- 27 – Séries numériques
- 28 – Espaces vectoriels (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Énoncer :
 - ★ la définition d'un \mathbb{K} -espace vectoriel,
 - ★ la définition d'une combinaison linéaire d'un nombre quelconque de vecteurs,
 - ★ la définition d'un sous-espace vectoriel,
 - ★ trois caractérisations d'un sous-espace vectoriel (sans démonstration).
- Donner la définition du sous-espace engendré $\text{Vect}(A)$ par une partie A d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E . Montrer que c'est un sous-espace vectoriel de E qui contient A . Montrer qu'il est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant A .
- Donner la définition du sous-espace engendré par une partie d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E puis montrer les propriétés¹ d'ajout, retrait et remplacement dans un sous-espace engendré.
- Montrer que, si a_1, \dots, a_n sont des réels tels que $a_1 < \dots < a_n$, alors la famille $(x \mapsto e^{a_k x})_{1 \leq k \leq n}$ est libre. Expliquer comment traiter plus directement le cas où $a_k = k$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les séries² numériques.

Prévisions pour la semaine 23 : chapitre 28 (espaces vectoriels) et début du 29 (applications linéaires).

1. Lorsque $A \neq \emptyset$ est une partie de E ,
 - ★ Si $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
 - ★ Si $x \in \text{Vect}(A \setminus \{x\})$, alors $\text{Vect}(A) = \text{Vect}(A \setminus \{x\})$ (on peut retirer un vecteur qui est combinaison linéaire des autres).
 - ★ Si y est une CL de $A \cup \{x\}$ avec un coefficient non nul devant x , alors $\text{Vect}(A \cup \{x\}) = \text{Vect}(A \cup \{y\})$.
2.  Pas encore de familles sommables (notamment de produit de Cauchy).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 27 – Séries numériques

- Cf. programme de la semaine 21.

Chapitre 28 – Espaces vectoriels (le début)

- Structure d'espace vectoriel
 - ★ Rappel sur les vecteurs du plan et de l'espace.
 - ★ Loi externe. Exemples usuels.
 - ★ Définition d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. Notion de vecteur, de scalaire, de vecteur nul, d'opposé, de soustraction.
 - ★ Un \mathbb{C} -espace vectoriel est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
 - ★ Exemples usuels : \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, \mathbb{K}^D , $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$. Produits cartésiens d'espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions de X dans un espace vectoriel.
 - ★ Premières propriétés des espaces vectoriel : propriétés héritées des groupes additifs, propriétés des zéros, propriétés de la soustraction, égalité des notations nx et $n \cdot x$.
 - ★ Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Vecteurs colinéaires. Familles presque nulles (ou à support fini). Combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs (CL avec une famille presque nulle de scalaire). Notion de coefficient devant un vecteur.
- Sous-espaces vectoriels
 - ★ Définition comme une partie stable pour $+$ et \cdot qui est encore un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E contient le neutre de E . Caractérisations des sous-espaces vectoriels. Stabilité par combinaison linéaire.
 - ★ Interprétation géométrique. Droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul. Plan vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires.
 - ★ Exemples usuels : l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^2 et \mathbb{K}^3 . Sous-espaces vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^n(D, \mathbb{K})$, $\mathcal{D}^1(D, \mathbb{K})$.
 - ★ Intersection de sous-espaces vectoriels.
 - ★ Sous-espace engendré par une partie.
 - $\text{Vect}(A)$ est défini en tant que l'ensemble des vecteurs de E s'écrivant comme combinaison linéaire de vecteurs de A .
 - Sous-espace engendré par une famille. Égalité entre $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ et $\text{Vect}\{x_i \mid i \in I\}$ rendant possible de jongler entre partie et famille. Cas particulier d'un ensemble fini, d'une partie finie.
 - $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A . $\text{Vect}(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A . Convention $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
 - Ajouter/retirer un vecteur d'un Vect . Un Vect est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs.
- Familles génératrices, libres, liées, bases.
 - ★ Famille/partie génératrice. Opération sur les vecteurs d'une famille génératrice.
 - ★ Famille/partie libres ou liées. Notion de combinaison linéaire triviale. Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Cas des familles à 1 ou 2 éléments. Convention que \emptyset est libre. Ajouter/retirer un vecteur d'une famille libre. Le cas des familles de polynômes échelonnées en degré. Unicité des coordonnées sur une famille libre.
 - ★ Bases d'un espace vectoriel. Exemples des bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[\mathbb{K}]$ et $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition selon une base