

Programme de colles - Semaine n° 23

du 30 mars au 5 avril 2026

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

28 – Espaces vectoriels

29 – Applications linéaires (*le début, en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer que, si on ajoute à une famille libre \mathcal{L} un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des vecteurs de \mathcal{L} , alors elle reste libre.
- Montrer qu'une famille de polynômes échelonnée en degré est libre.
- Montrer que la somme de deux sous-espaces vectoriels de E est directe si et seulement si leur intersection est réduite à $\{0\}$.
- Montrer que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.
- Montrer que, si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et si E' est un sous-espace vectoriel de E , alors $f(E')$ est un sous-espace vectoriel de F . Montrer que, si F' est un sous-espace vectoriel de F , alors $f^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .
- Montrer que $f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A))$ pour toute partie A non vide de E (avec deux preuves différentes pour le sens $\text{Vect}(f(A)) \subset f(\text{Vect}(A))$).

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les espaces vectoriels (montrer qu'une partie d'un espace vectoriel est un sous-espace vectoriel, déterminer une famille génératrice ou une base, montrer qu'une famille est libre, montrer que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires).

Prévisions pour la semaine 24 : chapitre 28, 29, 30 (sous-espaces affines).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 28 – Espaces vectoriels

- Structure d'espace vectoriel
 - ★ Rappel sur les vecteurs du plan et de l'espace.
 - ★ Loi externe. Exemples usuels.
 - ★ Définition d'un \mathbb{K} -espace vectoriel. Notion de vecteur, de scalaire, de vecteur nul, d'opposé, de soustraction.
 - ★ Un \mathbb{C} -espace vectoriel est un \mathbb{R} -espace vectoriel.
 - ★ Exemples usuels : \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, \mathbb{K}^D , $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}[X]$. Produits cartésien d'espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions de X dans un espace vectoriel.
 - ★ Premières propriétés des espaces vectoriel : propriétés héritées des groupes additifs, propriétés des zéros, propriétés de la soustraction, égalité des notations nx et $n \cdot x$.
 - ★ Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. Vecteurs colinéaires. Familles presque nulles (ou à support fini). Combinaisons linéaires d'un nombre quelconque de vecteurs (CL avec une famille presque nulle de scalaire). Notion de coefficient devant un vecteur.
- Sous-espaces vectoriels
 - ★ Définition comme une partie stable pour $+$ et \cdot qui est encore un espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de E contient le neutre de E . Caractérisations des sous-espaces vectoriels. Stabilité par combinaison linéaire.
 - ★ Interprétation géométrique. Droite vectorielle engendrée par un vecteur non nul. Plan vectoriel engendré par deux vecteurs non colinéaires.
 - ★ Exemples usuels : l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^2 et \mathbb{K}^3 . Sous-espaces vectoriel $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{C}^n(D, \mathbb{K})$, $\mathcal{D}^1(D, \mathbb{K})$.
 - ★ Intersection de sous-espaces vectoriels.
 - ★ Sous-espace engendré par une partie.
 - $\text{Vect}(A)$ est défini en tant que l'ensemble des vecteurs de E s'écrivant comme combinaison linéaire de vecteurs de A .
 - Sous-espace engendré par une famille. Égalité entre $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$ et $\text{Vect}\{x_i \mid i \in I\}$ rendant possible de jongler entre partie et famille. Cas particulier d'un ensemble fini, d'une partie finie.
 - $\text{Vect}(A)$ est le plus petit sous-espace vectoriel de E qui contient A . $\text{Vect}(A)$ est l'intersection de tous les sous-espaces vectoriels de E qui contiennent A . Convention $\text{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.
 - Ajouter/retirer un vecteur d'un Vect . Un Vect est invariant par opérations élémentaires sur les vecteurs.
- Familles génératrices, libres, liées, bases.
 - ★ Famille/partie génératrice. Opération sur les vecteurs d'une famille génératrice.
 - ★ Famille/partie libres ou liées. Notion de combinaison linéaire triviale. Une famille est liée si et seulement si l'un des vecteurs est combinaison linéaire des autres. Cas des familles à 1 ou 2 éléments. Convention que \emptyset est libre. Ajouter/retirer un vecteur d'une famille libre. Le cas des familles de polynômes échelonnées en degré. Unicité des coordonnées sur une famille libre.
 - ★ Bases d'un espace vectoriel. Exemples des bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[\mathbb{K}]$ et $\mathbb{K}[X]$. Existence et unicité de la décomposition selon une base
- Somme de sous-espaces vectoriels.
 - ★ Notion de somme de deux sous-espaces vectoriels. $F_1 + F_2$ est un sous-espace vectoriel content F_1 et F_2 . $F_1 + F_2 = \text{Vect}(F_1 \cup F_2)$. La concaténation d'une famille génératrice de F_1 et d'une famille génératrice de F_2 est une famille génératrice de $F_1 + F_2$.
 - ★ Somme directe de deux sous-espaces vectoriels. Notation $F_1 \oplus F_2$. CNS avec l'intersection réduite à 0_E . Théorème de concaténation des bases. Base adaptée à une somme directe.
 - ★ Sous-espaces supplémentaires. CNS héritées du paragraphe précédent.

Chapitre 29 – Applications linéaires (le début)

- Notion d'application linéaire.
 - ★ Définition. Caractérisation. Condition nécessaire sur l'image de 0. Forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Notations $\mathcal{L}(E, F)$, $\mathcal{L}(E)$, $\text{GL}(E)$. Image d'une combinaison linéaire.
 - ★ Nombreux exemples. Identité de E . Homothéties de E .
- Opérations sur les applications linéaires.
 - ★ Restrictions d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel. Endomorphisme induit.
 - ★ Espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$.
 - ★ Composition d'applications linéaires. Bilinéarité de la composition.
 - ★ Réciproque d'un isomorphisme.
 - ★ Anneau $(\mathcal{L}(E), +, \circ)$. Non commutatif, non intègre. Notation vu au lieu de $v \circ u$. Propriétés générales héritées de la structure d'anneau (dont binôme de Newton en cas d'endomorphismes qui commutent). Groupe $\text{GL}(E)$. Utilisation d'un polynôme annulateur.
- Image et noyau d'une application linéaire.
 - ★ Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Formule $f(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(f(A))$.
 - ★ Image d'une application linéaire. Formule $\text{Im}(f) = \text{Vect}(f(x_i))_{i \in I}$ lorsque $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice.
 - ★ Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. CNS d'injectivité.