Programme de colles - Semaine n° 24
du 6 au 12 avril 2026

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

28 – Espaces vectoriels

29 – Applications linéaires

30 – Sous-espaces affines

31 – Espaces vectoriels de dimension finie (*le début, en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Démontrer le théorème de caractérisation d'une application linéaire par l'image d'une base.
- Montrer que, si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors f est injective si et seulement si $f(\mathscr{B})$ est libre.
- Montrer que, si $E = F \oplus G$ et si p est la projection sur F parallèlement à G, alors $p \in \mathscr{L}(E)$, $p^2 = p$, $\mathrm{Im}(p) = F$ et[1] $\mathrm{Ker}(p) = G$.
- Montrer que, si f est une involution linéaire sur E, alors les sous-espaces vectoriels $F = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id}_E)$ et $G = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}_E)$ sont supplémentaires et f est la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
- Montrer que l'intersection de sous-espaces affines est vide ou bien est un sous-espace affine et que, dans le cas non vide, la direction de l'intersection est l'intersection des directions.
  On utilisera sans le prouver le fait que, si A est affine de direction F alors, pour tout $b \in A$, $A = b + F$.
- Énoncer et montrer le théorème d'existence de bases en dimension finie. Énoncer ensuite (sans les démontrer) le théorème de la base incomplète et le théorème de la base extraite.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les applications linéaires (et les sous-espaces affines s'ils reste du temps en fin de colle)... sans résultats sur la dimension finie.

Prévisions pour la semaine 25 : chapitre 30 (dimension finie)

1. On pourra justifier à l'oral pourquoi $p(x) = x$ ssi $x \in F$ et $p(x) = 0$ ssi $x \in G$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 28 – Espaces vectoriels

- Cf. programme de la semaine 22.

Chapitre 29 – Applications linéaires

- Notion d'application linéaire.
  - ⋆ Définition. Caractérisation. Condition nécessaire sur l'image de 0. Forme linéaire, endomorphisme, isomorphisme, automorphisme. Notations $\mathscr{L}(E,F)$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathrm{GL}(E)$. Image d'une combinaison linéaire.
  - ⋆ Nombreux exemples. Identité de E. Homothéties de E.
- Opérations sur les applications linéaires.
  - ⋆ Restrictions d'une application linéaire à un sous-espace vectoriel. Endomorphisme induit.
  - ⋆ Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$.
  - ⋆ Composition d'applications linéaires. Bilinéarité de la composition.
  - ⋆ Réciproque d'un isomorphisme.
  - ⋆ Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$. Non commutatif, non intègre. Notation vu au lieu de $v\circ u$. Propriétés générales héritées de la structure d'anneau (dont binôme de Newton en cas d'endomorphismes qui commutent). Groupe $\mathrm{GL}(E)$. Utilisation d'un polynôme annulateur.
- Image et noyau d'une application linéaire.
  - ⋆ Image d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Formule $f(\mathrm{Vect}(A)) = \mathrm{Vect}(f(A))$.
  - ⋆ Image d'une application linéaire. Formule $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(f(x_i))_{i\in I}$ lorsque $(x_i)_{i\in I}$ est génératrice.
  - ⋆ Image réciproque d'un sous-espace vectoriel par une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. CNS d'injectivité.
- Détermination d'une application linéaire.
  - ⋆ Image d'une famille génératrice, liée, génératrice. Théorème de caractérisation par l'image d'une base. CNS de surjectivité/injectivité/bijectivité selon que l'image de la base est génératrice/libre/une base.
  - ⋆ Détermination par restriction à ses sous-espaces supplémentaire.
- Projections, projecteurs, symétries, involutions
  - ⋆ Projection p sur F parallèlement à G. Linéarité, formules $p^2 = p$, $\mathrm{Ker}(p) = G = \mathrm{Im}(\mathrm{Id}_E - p)$, $\mathrm{Im}(p) = F = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - p)$. Projecteurs. Un projecteur est une projection sur son image parallèlement à son noyau.
  - ⋆ Symétrie s par rapport à F parallèlement à G. Projecteur associé. Linéarité. Formule $s^2 = \mathrm{Id}_E$. Une symétrie est un automorphisme qui est sa propre bijection réciproque. Formules $F = \{x \in E \,|\, s(x) = x\}$ et $G = \{x \in E \,|\, s(x) = -x\}$. Involutions linéaires.

Chapitre 30 – Espaces affines

- Introduction.
  - ⋆ Translation dans un espace vectoriel. Notation $S + a = \{x + a \,|\, x \in S\}$ lorsque S est une partie de E. Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $a + F = F$ si et seulement si $a \in F$.
  - ⋆ Structure affine d'un espace vectoriel : notion de points est de vecteurs (présentation informelle).
- Sous-espaces affines.
  - ⋆ Définition. Unicité de la direction d'un sous-espace affine. Droite, plan, hyperplan affine.

* CNS d'égalité de deux sous-espaces affines. Si $A = a + F$ est affine alors, pour tout $b \in A$, $A = b + F$. Un sous-espace A est affine si et seulement si, pour tout $a \in A$, $A - a$ est un sous-espace vectoriel de E. Méthodes.
* Notion d'équation linéaire. L'ensemble des solutions d'une équation linéaire $u(x) = a$ est soit vide soit un sous-espace affine dirigé par $\mathrm{Ker}(u)$. Exemples des suites arithmético-géométriques, des EDL d'ordre 1 ou 2, des polynômes d'interpolation de Lagrange.
* Intersection de sous-espaces affines.

Chapitre 30 – Espaces vectoriels de dimension finie (le début)

- Dimension d'un espace vectoriel.
  * Notion d'espace vectoriel de dimension finie.
  * Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base incomplète/extraite.
  * Théorème de l'échange. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille formée d'au moins $n+1$ vecteurs est liée. Critère pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension infinie. Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
  * Exemples : espace de dimension 0, dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, de l'ensemble des solutions des EDL homogènes d'ordre 1 ou 2.
  * Dimension d'un produit d'espaces vectoriels.
  * Familles libres et génératrices en dimension finie. Bases de polynômes échelonnées en degré de $\mathbb{K}_n[X]$. Application aux suites récurrences linéaires d'ordre 2.