Programme de colles - Semaine n^o 25

du 13 au 19 avril 2026

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

31 – Espaces vectoriels de dimension finie (*sauf les formes linéaires et hyperplans*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Montrer que l'indice de nilpotence d'un endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel de dimension finie est inférieur à la dimension de l'espace.
- Énoncer et montrer la formule de Grassmann
- Montrer que, si E est de dimension finie n et $f \in \mathscr{L}(E, F)$, alors f est de rang fini (on donnera la définition) et $\mathrm{rg}(f) \leqslant n$ avec égalité si et seulement si f est injective. Montrer ensuite qu'une application linéaire entre deux espaces de même dimension est injective si et seulement si elle est surjective [1]
- Énoncer et montrer le théorème du rang (d'abord la version géométrique puis la version « classique » qui en découle).
- Montrer [2] que, si E et F sont de dimension finie et si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$, alors $\mathrm{rg}(v \circ u) \leqslant \min\{\mathrm{rg}(u), \mathrm{rg}(v)\}$.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera principalement en des exercices sur les espace vectoriels de dimension finie (sans résultats spécifiques sur les hyperplans, à part éventuellement le fait que le noyau d'une forme linéaire non nulle d'un espace de dimension n est de dimension $n - 1$).

Prévisions pour la semaine 26 (après les vacances) : chapitres 31 et 32 (codage matriciel)

1. C'est un mix entre plusieurs résultats du cours :
   - ⋆ On dit que f est de rang fini lorsque $\mathrm{Im}(f)$ soit de dimension finie. Si E est de dimension finie n alors, en prenant $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ une base, on a $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f)) = \dim(\mathrm{Vect}(f(e_1), \ldots, f(e_n))$.
   - ⋆ Comme $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ engendre $\mathrm{Im}(f)$, son cardinal n est supérieur à $\dim(\mathrm{Im}(f)) = \mathrm{rg}(f)$. De plus, il y a égalité si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}(f)$ si et seulement si c'est une famille libre (puisqu'elle est génératrice) si et seulement si f est injective (par théorème de caractérisation par l'image d'une base).
   - ⋆ Si $\dim(E) = \dim(F)$, alors f est injective si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(E)$ si et seulement si $\mathrm{rg}(f) = \dim(F)$ si et seulement si $\mathrm{Im}(f) = F$ (puisque $\mathrm{Im}(f) \subset F$) si et seulement si f est surjective.
2. Cela consiste entre autres à appliquer le théorème du rang à $v|_{\mathrm{Im}(u)}$. On montrera d'abord que $\mathrm{Ker}(v|_{\mathrm{Im}(u)}) = \mathrm{Im}(u) \cap \mathrm{Ker}(v)$ et $\mathrm{Im}(v|_{\mathrm{Im}(u)}) = \mathrm{Im}(v \circ u)$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 30 – Espaces vectoriels de dimension finie (sauf la fin)

- Dimension d'un espace vectoriel.
  - ⋆ Notion d'espace vectoriel de dimension finie.
  - ⋆ Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base incomplète/extraite.
  - ⋆ Théorème de l'échange. Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille formée d'au moins $n+1$ vecteurs est liée. Critère pour montrer qu'un espace vectoriel est de dimension infinie. Dimension d'un espace vectoriel de dimension finie.
  - ⋆ Exemples : espace de dimension 0, dimensions de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, de l'ensemble des solutions des EDL homogènes d'ordre 1 ou 2.
  - ⋆ Dimension d'un produit d'espaces vectoriels.
  - ⋆ Familles libres et génératrices en dimension finie. Bases de polynômes échelonnées en degré de $\mathbb{K}_n[X]$. Application aux suites récurrences linéaires d'ordre 2.
- Sous-espaces vectoriels et dimension.
  - ⋆ Dimension d'un sous-espace vectoriel. Critère d'égalité de sous-espaces vectoriel en cas d'inclusion et même dimension. Droites vectorielles et plans vectoriels.
  - ⋆ Existence d'un supplémentaire en dimension finie. Dimension d'un supplémentaire. Formule de Grassmann. CNS pour que deux espaces soient supplémentaires avec la dimension.
  - ⋆ Rang d'une famille de vecteurs. CNS pour que la famille soit libre/génératrice/une base. Invariance du rang par opérations élémentaires. Le rang d'une famille finie de vecteurs est le maximum des cardinaux de ses sous-familles libres.
- Applications linéaires en dimension finie.
  - ⋆ Reformulation du théorème de caractérisation par l'image d'une base. Si E est de dimension finie $n \geqslant 2$, alors l'anneau $\mathscr{L}(E)$ est non commutatif. CNS d'existence d'injections, de surjection, de bijection linéaire de E dans F en comparant les dimensions de E et F.
  - ⋆ Isomorphismes en dimension finie. CNS pour que deux espaces vectoriels soient isomorphes avec l'égalité des dimensions. Tout espace vectoriel de dimension $n \geqslant 1$ est isomorphe à $\mathbb{K}^n$ et à $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. CNS par transformation d'une base en une base. Le rang d'une famille de vecteurs est invariant par isomorphisme.
  - ⋆ Rang d'une application linéaire.
    - — Application linéaire de rang fini. Cas d'un rang nul. Cas d'un espace de départ de dimension finie. CNS d'injectivité avec le rang. CNS de surjectivité avec le rang.
    - — Applications linéaires entre espaces vectoriels de mêmes dimensions finies (l'injectivité est équivalente à la surjectivité). Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible (pour la composition).
    - — En dimension quelconque, si $\mathrm{Ker}(f)$ admet un supplémentaire S, alors f induit un isomorphisme de S sur $\mathrm{Im}(f)$ (forme géométrique du théorème du rang). Théorème du rang quand l'espace de départ est de dimension finie.
    - — Invariance du rang par composition à gauche ou à droite par un isomorphisme. Le rang d'une composition est majoré par le maximum des deux rangs.