

Programme de colles - Semaine n° 29

du 25 au 31 mai 2026

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

- 33 – Dénombrement
- 34 – Probabilités sur un univers fini
- 35 – Variables aléatoires finies (*sauf inégalités de concentration*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Calculer la loi de la variable aléatoire qui représente le plus grand numéro tiré lorsque l'on tire successivement et avec remise p boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n .
- Montrer¹ que, si X est une variable aléatoire qui compte le nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p , alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- Déterminer la loi de (X, Y) où X représente le plus petit numéro et Y le plus grand numéro lorsque l'on tire simultanément deux boules dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . En déduire la loi de X et la loi de Y .
- Montrer que, si X_1, \dots, X_{2n} sont i.i.d, alors $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $S_{2n} - S_n = X_{n+1} + \dots + X_{2n}$ sont deux variables aléatoires indépendantes² de même loi.
- Montrer par le calcul³ que, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes de lois $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$, alors $X + Y \sim \mathcal{B}(n + m, p)$.

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices de probabilité avec variables aléatoires (sauf inégalité de Markov et Bienaymé-Tchebychev).

Prévisions pour la semaine 31 : chapitre 35, chapitre 36 (Groupe symétrique) et début du chapitre 37 (Déterminants).

1. On admettra pour cette preuve l'existence d'une probabilité sur Ω rendant les événements S_i : « la $i^{\text{ème}}$ expérience est un succès », $1 \leq i \leq n$, mutuellement indépendants.

2. Pour l'indépendance, on pourra se contenter d'utiliser le lemme des coalitions.

3. On pourra utiliser la formule de Vandermonde sans démonstration mais on montrera la formule du produit de convolution (celle-ci n'est pas explicitement au programme).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 33 – Dénombrement

- Cf. programme de la semaine 28.

Chapitre 34 – Probabilités sur un univers fini

- Cf. programme de la semaine 28.

Chapitre 34 – Variables aléatoires sur un univers fini (sans inégalités de concentration)

- Notion de variable aléatoire finie.
 - ★ Variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E . Variable aléatoire réelle. Univers image ou support $X(\Omega)$. Exemples de construction explicite.
 - ★ Événements associés à X : $[X \in A] = X^{-1}(A)$, $[X = a] = X^{-1}(\{a\})$ et, quand cela a un sens, $[X \leq a]$, $[a \leq X \leq b]$, etc. Système complet d'événements associé à X .
- Loi d'une variable aléatoire.
 - ★ Notation \mathbb{P}_X . C'est une probabilité sur $X(\Omega)$. Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire par les $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in X(\Omega)$. La famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilités sur $X(\Omega)$. Lien entre les $\mathbb{P}(X \leq k)$ et les $\mathbb{P}(X = k)$ lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Existence d'une variable aléatoire de loi donnée. Égalité en loi (notation $X \sim Y$).
 - ★ Lois usuelles : loi certaine, loi uniforme sur E (notation $\mathcal{U}(E)$), loi de Bernoulli (notation $\mathcal{B}(p)$), loi binomiale (notation $\mathcal{B}(n, p)$). L'indicatrice d'un événement suit une loi de Bernoulli. Une variable aléatoire comptant le nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.
 - ★ Loi d'un transfert de variable aléatoire. Notation $f(X)$. Formule de $\mathbb{P}(f(X) = y)$ comme somme des $\mathbb{P}(X = x)$ sur tous les antécédents x de y par f . Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.
 - ★ Loi conditionnelle sachant qu'un événement de probabilité non nulle est réalisé.
 - ★ Loi d'un couple de variables aléatoires.
 - Loi conjointe d'un couple. Confusion entre $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et $(X, Y)(\Omega)$ quitte à ce que des événements élémentaires soient de probabilités nulles. Existence d'un couple de variables aléatoires de loi donnée.
 - Lois marginales. La connaissance de la loi conjointe d'un couple (X, Y) de variables aléatoires permet toujours d'en déduire les lois marginales du couple (utilisation de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement associé à une marginale). La réciproque est fautive.
 - Généralisation aux n -uplets de variables aléatoires.
- Variables aléatoires indépendantes.
 - ★ Indépendance de deux variables aléatoires. Caractérisation $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Existence d'un couple de variables aléatoires indépendantes de lois marginales données. Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.
 - ★ Indépendance mutuelle de n variables aléatoires. Lien avec les événements mutuellement indépendants. Sous-famille de variables aléatoires. Caractérisation. Existence d'un n -uplet de variables aléatoires indépendantes de lois marginales données.
 - ★ Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$. Lemme des coalitions.
 - ★ Méthodes pour trouver la loi du maximum/minimum de variables aléatoires indépendantes. Méthodes pour trouver la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes. Stabilité de la loi binomiale. Si X_1, \dots, X_n sont i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

- Espérance et variance.

- ★ Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe.

- Définition $\mathbb{E}(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} x \mathbb{P}(X = x)$. Interprétation. Variable centrée. Espérance d'une variable constante.
- Formule $\mathbb{E}(X) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbb{P}(\{\omega\})$. Linéarité de l'espérance. Variable centrée associée à X . Positivité de l'espérance. Croissance de l'espérance. Inégalité triangulaire.
- Espérance des variables aléatoires des variables aléatoires de lois usuelles ($\mathcal{U}(\llbracket a; b \rrbracket)$, $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n, p)$). Si $E \subset \mathbb{C}$ et $X \sim \mathcal{U}(E)$, alors $\mathbb{E}(X)$ est la moyenne arithmétique des éléments de E . Formule $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
- Théorème de transfert.
- L'indépendance multiplie les espérance.

- ★ Variance d'une variable aléatoire réelle.

- Définition et interprétation (notation $\mathbb{V}(X)$). Positivité de la variance. CNS de variance nulle. Écart-type (notation $\sigma(X)$). Variable réduite.
- Formule de Koenig-Huygens. Formules $\mathbb{V}(aX + b) = a^2 \mathbb{V}(X)$ et $\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$. Variable centrée réduite associée à X .
- Variance des variables aléatoires des variables aléatoires de lois $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$.
- Covariance. Formule de Koenig-Huygens pour la variance. Variables décorréllées. Des variables indépendantes sont décorréllées mais la réciproque est fausse. Formule de développement de la variance d'une somme avec la covariance. L'indépendance somme les variances.