

Programme de colles - Semaine n° 3

du 29 septembre au 5 octobre 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

5 – Trigonométrie

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Montrer que $(1+x)^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} e$.
- Montrer que $\frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ puis que, pour tous $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, $\frac{(\ln(x))^\beta}{x^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- Montrer¹ que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $a^2 + b^2 = 1$ et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, il existe un unique $\theta \in]\alpha; \alpha + 2\pi]$ tel que $a = \cos(\theta)$ et $b = \sin(\theta)$.
- Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x > 0 \\ -\frac{\pi}{2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$.
- Montrer que, pour tout $x \in [-1; 1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ puis prouver que Arcsin est dérivable sur $] -1; 1[$ de dérivée $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
- Montrer que, pour tout $x \in [-1; 1]$, $\cos(\text{Arcsin}(x)) = \sqrt{1-x^2}$ puis résoudre l'équation $\text{Arcsin}(x) = \text{Arccos}(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ (par analyse-synthèse).

Les exercices (les 45 minutes restantes) consisteront essentiellement en des études de fonctions ou des résolutions d'équations ou inéquations impliquant des fonctions trigonométriques. Il sera notamment vérifié que vous savez déterminer, en fonction de Arctan, Arcsin ou Arctan, un angle dont le sinus et le cosinus sont donnés.

Prévisions pour la semaine 4 : chapitre 6 (Nombres complexes)

1. Pour les élèves : attention on attend une preuve légèrement différente de celle vue en cours puisqu'on se limite au cas de l'intervalle $] \alpha; \alpha + 2\pi]$ (et on ne traite pas du cas $[\alpha; \alpha + 2\pi[$).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 5 – Trigonométrie

- Sinus et cosinus d'un réel.
 - ★ Cercle trigonométrie. Angle. Cosinus et sinus d'un angle.
 - ★ Identité fondamentale. Valeurs remarquables. Périmètre d'un arc de cercle, aire d'une portion de disque. Périodicité.
 - ★ Signe du sinus et du cosinus d'un angle de $[-\pi; \pi]$.
 - ★ Formules de trigonométrie (formules d'addition, formules de décalage, formules de duplication, formules de l'angle triple, formules de linéarisation, formules de factorisation).
 - ★ Congruences de réels. Équations trigonométriques.
 - ★ Tangente d'un réel. Interprétation géométrique. Propriétés (périodicité, valeurs remarquables, signe, formules de décalage, formules d'addition, formules de duplication, formule $1 + \tan^2 = \frac{1}{\cos^2}$). Formules donnant $\tan(a)$, $\sin(a)$ et $\cos(a)$ en fonction de $t = \tan(a/2)$.
- Fonctions circulaires.
 - ★ Fonctions sinus et cosinus
 - Périodicité, parité/imparité, minoration/majoration, signe sur \mathbb{R} .
 - Continuité, dérivabilité, variations, convexité/concavité, courbes.
 - Paramétrisation du cercle trigonométrie. Écriture de $a \cos(x) + b \sin(x)$ sous la forme $C \cos(x - \varphi)$.
 - ★ Fonction tangente. Périodicité, parité/imparité, minoration/majoration, signe sur \mathbb{R} , continuité, dérivabilité, variations, convexité/concavité, limites, courbe.
- Fonctions circulaires réciproques.
 - ★ Fonction Arctangente.
 - Définition comme réciproque de \tan restreinte à $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$. Continuité, imparité, monotonie, limites. Valeurs remarquables.
 - Expressions de $\tan(\text{Arctan}(x))$ et $\text{Arctan}(\tan(x))$. Résolution de $\alpha = \text{Arctan}(A)$.
 - Dérivabilité, convexité/concavité, courbe.
 - Quelques égalités remarquables à savoir retrouver : $\text{Arctan}(x) + \text{Arctan}(\frac{1}{x}) = \pm \frac{\pi}{2}$ selon le signe de x , valeurs de $\cos(\text{Arctan}(x))$ et $\sin(\text{Arctan}(x))$.
 - ★ Fonction Arcsinus.
 - Définition comme réciproque de \sin restreinte à $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$. Continuité, imparité, monotonie. Valeurs remarquables.
 - Expressions de $\sin(\text{Arcsin}(x))$ et $\text{Arcsin}(\sin(x))$. Résolution de $\alpha = \text{Arcsin}(A)$.
 - Dérivabilité, convexité/concavité, courbe.
 - ★ Fonction Arccosinus.
 - Définition comme réciproque de \cos restreinte à $[0; \pi]$. Continuité, monotonie. Valeurs remarquables.
 - Expressions de $\cos(\text{Arccos}(x))$ et $\text{Arccos}(\cos(x))$. Résolution de $\alpha = \text{Arccos}(A)$.
 - Dérivabilité, convexité/concavité, courbe.