Programme de colles - Semaine n° 30

du 1er au 7 juin 2026

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

35 – Variables aléatoires finies

36 – Groupe symétrique

37 – Déterminants (*en cours uniquement*)

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examinateur parmi la liste suivante :

- Calculer l'espérance (en l'écrivant comme somme de variables i.i.d de loi de Bernoulli) et la variance (par un calcul de somme avec le théorème de transfert et la formule de Koenig-Huygens) d'une variable aléatoire de loi binomiale
- Énoncer et montrer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev.
- Montrer que, si $x \in [\![1\,;n]\!]$ et $\sigma \in S_n$, alors l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid \sigma^k(x) = x\}$ admet un plus petit élément p puis que
$$\{\sigma^k(x) \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\sigma^k(x) \mid k \in [\![0\,;p-1]\!]\}$$
et enfin que ce dernier ensemble est de cardinal p.
- Toute permutation de S_n peut s'écrire comme produit de cycles à supports disjoints [1].
- Montrer les premières propriétés des formes n-linéaires alternées [2].
- Montrer que l'espace vectoriel des formes n-linéaires alternées sur E est de dimension 1 et que $(\det_{\mathscr{B}})$ en est une base pour toute base $\mathscr{B}$ de E (*on admettra dans cette question que* $\det_{\mathscr{B}}$ *est bien une forme* n*-linéaire alternée sur* E).

Le reste de la colle (les 45 minutes restantes) consistera en des exercices sur les variables aléatoires finies. S'il reste du temps en fin de colle, un exercice simple sur le groupe symétrique pourra être proposé.

Prévisions pour la semaine 31 : chapitre 36, 37 et 38 (préhilbertiens)

1. On ne demande pas la preuve de l'unicité
2. Permuter les vecteurs multiplie par la signature de la permutation, ajouter à un vecteur une CL des autres laisse invariant le déterminant, nullité en une famille liée.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 35 – Variables aléatoires sur un univers fini

- Notion de variable aléatoire finie.
  - ⋆ Variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E. Variable aléatoire réelle. Univers image ou support $X(\Omega)$. Exemples de construction explicite.
  - ⋆ Événements associés à X : $[X \in A] = X^{-1}(A)$, $[X = a] = X^{-1}(\{a\})$ et, quand cela a un sens, $[X \leqslant a]$, $[a \leqslant X \leqslant b]$, etc. Système complet d'événements associé à X.
- Loi d'une variable aléatoire.
  - ⋆ Notation $\mathbb{P}_X$. C'est une probabilité sur $X(\Omega)$. Caractérisation de la loi d'une variable aléatoire par les $\mathbb{P}(X = x)$, $x \in X(\Omega)$. La famille $(\mathbb{P}(X = x))_{x\in X(\Omega)}$ est une distribution de probabilités sur $X(\Omega)$. Lien entre les $\mathbb{P}(X \leqslant k)$ et les $\mathbb{P}(X = k)$ lorsque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$. Existence d'une variable aléatoire de loi donnée. Égalité en loi (notation $X \sim Y$).
  - ⋆ Lois usuelles : loi certaine, loi uniforme sur E (notation $\mathcal{U}(E)$), loi de Bernoulli (notation $\mathcal{B}(p)$), loi binomiale (notation $\mathcal{B}(n, p)$). L'indicatrice d'un événement suit une loi de Bernoulli. Une variable aléatoire comptant le nombre de succès dans n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p suit une loi $\mathcal{B}(n, p)$.
  - ⋆ Loi d'un transfert de variable aléatoire. Notation $f(X)$. Formule de $\mathbb{P}(f(X) = y)$ comme somme des $\mathbb{P}(X = x)$ sur tous les antécédents x de y par f. Si $X \sim Y$, alors $f(X) \sim f(Y)$.
  - ⋆ Loi conditionnelle sachant qu'un événement de probabilité non nulle est réalisé.
  - ⋆ Loi d'un couple de variables aléatoires.
    - — Loi conjoindre d'un couple. Confusion entre $X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et $(X, Y)(\Omega)$ quitte à ce que des événements élémentaires soient de probabilités nulles. Existence d'un couple de variables aléatoires de loi donnée.
    - — Lois marginales. La connaissance de la loi conjoindre d'un couple (X, Y) de variables aléatoires permet toujours d'en déduire les lois marginales du couple (utilisation de la formule des probabilités totales avec le système complet d'événement associé à une marginale). La réciproque est fausse.
    - — Généralisation aux n-uplets de variables aléatoires.
- Variables aléatoires indépendantes.
  - ⋆ Indépendance de deux variables aléatoires. Caractérisation $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$ pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$. Existence d'un couple de variables aléatoires indépendantes de lois marginales données. Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$.
  - ⋆ Indépendance mutuelle de n variables aléatoires. Lien avec les événements mutuellement indépendants. Sous-famille de variables aléatoires. Caractérisation. Existence d'un n-uplet de variables aléatoires indépendantes de lois marginales données.
  - ⋆ Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp f(Y)$. Lemme des coalitions.
  - ⋆ Méthodes pour trouver la loi du maximum/minimum de variables aléatoires indépendantes. Méthodes pour trouver la loi d'une somme de variables aléatoires indépendantes. Stabilité de la loi binomiale. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont i.i.d de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \cdots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- Espérance et variance.
  - ⋆ Espérance d'une variable aléatoire réelle ou complexe.
    - — Définition $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{x\in X(\Omega)} x\mathbb{P}(X = x)$. Interprétation. Variable centrée. Espérance d'une variable constante.
    - — Formule $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{\omega\in\Omega} X(\omega)\mathbb{P}(\{\omega\})$. Linéarité de l'espérance. Variable centrée associée à X. Positivité de l'espérance. Croissance de l'espérance. Inégalité triangulaire.

— Espérance des variables aléatoires des variables aléatoires de lois usuelles ($\mathcal{U}([\![a\,;b]\!])$, $\mathcal{B}(p)$, $\mathcal{B}(n,p)$). Si $E \subset \mathbb{C}$ et $X \sim \mathcal{U}(E)$, alors $\mathbb{E}(X)$ est la moyenne arithmétique des éléments de E. Formule $\mathbb{E}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{P}(A)$.
— Théorème de transfert.
— L'indépendance multiplie les espérance.

⋆ Variance d'une variable aléatoire réelle.
  — Définition et interprétation (notation $\mathbb{V}(X)$). Positivité de la variance. CNS de variance nulle. Écart-type (notation $\sigma(X)$). Variable réduite.
  — Formule de Koenig-Huygens. Formules $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$ et $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$. Variable centrée réduite associée à X.
  — Variance des variables aléatoires des variables aléatoires de lois $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$.
  — Covariance. Formule de Koenig-Huygens pour la variance. Variables décorrélées. Des variables indépendantes sont décorrélées mais la réciproque est fausse. Formule de développement de la variance d'une somme avec la covariance. L'indépendance somme les variances.

- Inégalités de concentration
  ⋆ Inégalité de Markov. Inégalité de Bienyaimé-Tchebychev.
  ⋆ Application aux sommes de variables indépendantes. Cas binomial. Interprétation fréquentiste. Introduction à la loi faible des grands nombres (HP).

Chapitre 36 – Groupe symétrique

- Structure de groupe.
  ⋆ Définition d'une permutation. Notation S_n. C'est un groupe de cardinal $n!$. Notation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$. Composition et puissance (notation multiplicative de la composition). Groupe non abélien si $n \geqslant 3$.
  ⋆ Support d'une permutation. Le support d'une composition est inclus dans l'union des supports. Si les supports sont disjoints, il y a égalité et les permutations commutent.
  ⋆ Orbite d'un élément suivant une permutation. Relation d'équivalence.
  ⋆ Transpositions et cycles. Notation cyclique.
- Décomposition d'une permutation.
  ⋆ Décomposition en produit de cycles à supports disjoints. Unicité à l'ordre près des termes. Méthode.
  ⋆ Décomposition en produit de transpositions. Non unicité. Méthodes.
- Signature $\varepsilon(\sigma)$ d'une permutation σ. Si σ est le produit de p permutations, alors sa signature est $(-1)^p$. Signature d'un cycle.

Chapitre 37 – Déterminant (le début)

- Introduction géométrique du déterminant
- Forme n-linéaires alternées.
  ⋆ Applications multilinéaires. Formule de développement. Factorisation plusieurs fois par un scalaire.
  ⋆ Formes alternées. Échanger deux vecteurs multiplie par -1. Permuter des vecteurs multiplie par la signature. Invariance par ajoute à un terme une combinaison linéaire des autres termes. Nullité en une famille liée.
- Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base.
  ⋆ Déterminant dans une base $\mathscr{B}$: définition avec la somme. Notation $\det_{\mathscr{B}}$. C'est l'unique forme n-linéaire alternée sur E qui vaut 1 sur $\mathscr{B}$. L'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E est un K-espace vectoriel de dimension 1 dont $(\det_{\mathscr{B}})$ est une base.
  ⋆ Propriété de changement de base. CNS pour qu'une famille soit une base. Propriétés de $\det_{\mathscr{B}}$ en tant que forme n-linéaire alternée. Bref retour sur l'orientation d'une base.