

Programme de colles - Semaine n° 5

du 13 au 18 octobre 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :
7 – Sommes et produits

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Calculer¹ $\sum_{k=0}^n \cos(kx)$ et $\sum_{k=0}^n \sin(kx)$ pour tous $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.
- Énoncer la formule de factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$, pour tout $(a, b, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{N}^*$, et la montrer avec télescopage.
- Énoncer et démontrer la « formule du chef » et la formule du triangle de Pascal.
- Énoncer la formule du binôme de Newton et exposer l'étape d'hérédité de sa démonstration par récurrence.
- Démontrer la « formule du chef » et calculer $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.
- Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $\cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$ est une racine de la fonction polynomiale

$$x \mapsto \sum_{p=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2p} (-1)^p (1-x^2)^p x^{n-2p}.$$

Les exercices (les 45 minutes restantes) consisteront essentiellement en des calculs de sommes et de produits de réels ou de complexes ou la preuve d'égalités/inégalités portant sur les sommes et produits.

Prévisions pour la semaine 6 (après les vacances) : chapitre 7, 8 (systèmes linéaires) et 9 (décomposition en éléments simples)

1. Attention au cas où $x \in 2\pi\mathbb{Z}$ (non traité en cours mais immédiat non ?).

Détails des chapitres au programme

Chapitre 7 – Sommes et produits

- Sommes de nombres.
 - ★ Notation \sum . Somme de complexes, d'une borne inférieure à une borne supérieure, sur les indices d'une famille, sur un nombre fini d'indices vérifiant une propriété. Somme vide. Nombre de termes dans une somme.
 - ★ Somme d'un terme constant. Somme des premiers entiers, des premiers carrés d'entiers, des premiers cubes d'entiers. Sommes géométriques Somme des n racines $n^{\text{ième}}$ de l'unité. Factorisation de $a^n - b^n$ par $a - b$.
 - ★ Relation de Chasles. Sommation par paquet. Factorisation par une constante. Linéarité de la somme. Linéarité de la conjugaison, des parties réelles et imaginaires. Application : somme de sinus, de cosinus. Changement d'indice. Sommes télescopiques. Somme d'inégalités. Inégalité triangulaire.
 - ★ Sommes doubles et interversion de sommes. Cas des domaines rectangulaires, triangulaires, triangulaires stricts. Un mot sur le cas général et sur les sommes multiples.
 - ★ Multiplication de deux sommes. Carré d'une somme. Formule avec les doubles produits.
- Produits de nombres.
 - ★ Notation \prod . Produit de complexes, d'une borne inférieure à une borne supérieure, sur les indices d'une famille, sur un nombre fini d'indices vérifiant une propriété. Produit vide.
 - ★ Relation de Chasles. Multiplication par paquets. Produits télescopiques. Changement d'indice. Produits doubles, interversion de produits.
 - ★ Factorisation dans un produit. Produit de multiplications, d'inverses, de quotients, de puissances entières, de modules, de conjugués. Produit d'inégalités.
 - ★ Produit d'exponentielles. Logarithme d'un produit. Produit de puissances généralisées.
 - ★ Factorielles. Produit des premiers nombres pairs ou impairs.
 - ★ Coefficients binomiaux. Définition $\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. Écriture en produit. Convention $\binom{n}{p} = 0$ pour $p \notin \llbracket 0; n \rrbracket$. Cas particuliers $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{n}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{n-1}$ et $\binom{n}{2}$. Symétrie. Formule du chef. Formule de Pascal. Les coefficients binomiaux sont des entiers. Triangle de Pascal.
- Formule du binôme de Newton. Cas particuliers classiques. Application à la trigonométrie pour obtenir des formules trigonométriques de factorisation.
- Sommes et produits de fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C} .