

# Programme de colles - Semaine n° 6

du 3 au 9 novembre 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :

- 7 – Sommes et produits
- 8 – Systèmes linéaires
- 9 – Décomposition en éléments simples

Il n'y a pas de questions de cours mais, pour chaque élève,

- d'abord une résolution d'un système linéaire à 3 ou 4 équations et 3 ou 4 inconnues à coefficients entiers avec la méthode du pivot de Gauss<sup>1</sup>.
- ensuite une décomposition en éléments simples<sup>2</sup>

Le cours sera considéré comme su si la méthode du pivot de Gauss et les techniques de décomposition en éléments simples sont bien connues.

S'il reste du temps, un exercice sur les sommes et produits pourra être proposé.

## Prévisions pour la semaine 7 : chapitre 10 (calcul intégral)

1. On se ramènera à un système triangulaire exclusivement en utilisant la méthode du pivot de Gauss. Aucune déviation de la méthode du pivot de Gauss ne sera tolérée (notamment aucun échange de ligne ne devra avoir lieu si le pivot est non nul). Il pourra y avoir des inconnues auxiliaires. Une fois le système sous forme triangulaire, on pourra continuer la méthode ou procéder par remontées successives. Aucun coefficient rationnel ne devra apparaître sauf éventuellement dans l'étape de remontée (ou la dernière étape si on remonte avec un pivot de Gauss).

2. En utilisant le moins possible la résolution de système mais en priorité les autres techniques vues en cours.

# Détails des chapitres au programme

## Chapitre 7 – Sommes et produits

Cf. programme de la semaine 5.

## Chapitre 8 – Systèmes linéaires

- Définitions et exemples
  - ★ Système linéaire à  $n$  équations et  $p$  inconnues. Coefficients. Second membre. Inconnues. Lignes. Système homogène. Solutions. Système équivalents. Système compatible/incompatible.
  - ★ Somme et multiplication par un scalaire d'un élément de  $\mathbb{K}^p$ .
  - ★ Résolution des système triangulaires lorsque  $n = p$ . Existence et unicité d'une solution si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls. Remontées successives.
  - ★ Cas triangulaire lorsque  $n < p$ . Infinité de solutions si et seulement si les coefficients diagonaux sont tous non nuls (aucune sinon). Cas  $n > p$ .
- Méthode du pivot de Gauss
  - ★ Opérations sur les lignes d'un système :  $L_i \leftrightarrow L_j$ ,  $L_i \leftrightarrow L_i + \alpha L_j$ ,  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  et  $L_i \leftrightarrow \lambda L_i + \alpha L_j$  lorsque  $\lambda \neq 0$ . Ces opérations donnent un système équivalent.
  - ★ Méthode du pivot de Gauss : cas général et multiples exemples. Bilan sur le nombre de solutions.

## Chapitre 9 – Décomposition en éléments simples

- Rappels et compléments sur les fonctions polynomiales et rationnelles.
  - ★ Fonction polynomiale. Unicité des coefficients. Degré. Coefficient dominant. Coefficient constant. Degré d'un produit, d'une puissance entière.
  - ★ Division euclidienne de fonctions polynomiales.
  - ★ Racines. Un polynôme de degré  $p$  a au plus  $p$  racines. Factorisation par  $x - a$  lorsque  $a$  est racine. Théorème de factorisation des fonctions polynomiales sur  $\mathbb{C}$ , sur  $\mathbb{R}$ .
  - ★ Fonctions rationnelles sur  $\mathbb{K}$ . Notion de pôle.
- Théorème de décomposition en éléments simples sur  $\mathbb{C}$  et sur  $\mathbb{R}$ .
- Méthodes pratiques de décomposition en éléments simples
  - ★ En résolvant un système : par unicité des coefficients ou en évaluant en des valeurs particulières.
  - ★ Technique de base : multiplication puis limite en un pôle. Cas où tous les pôles sont simples. Cas des pôles multiples.
  - ★ Autres méthodes : utilisation des limites en  $\pm\infty$ , utilisation de la parité, faire un détour par les complexes (à éviter toutefois).