

Programme de colles - Semaine n° 7

du 10 au 16 novembre 2025

Cette semaine, les colles de Mathématiques portent sur les chapitres suivants (voir au dos pour plus de détails) :
10 – Calcul intégral

Les questions de cours (les 10 premières minutes de la colle) seront choisies par l'examineur parmi la liste suivante :

- Déterminer une primitive de $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$ lorsque a et b sont non nuls (en utilisant des nombres complexes).

- Montrer que $\int_{1/2}^2 \frac{\ln(t)}{1+t^2} dt = 0$ à l'aide d'une étude de fonction.

- Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ln(2).$$

- Montrer que¹, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{2n} = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} \frac{\pi}{2}$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt.$$

- Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ avec le changement de variable $x = \sin(t)$.

- Calculer² $\int^x \frac{dt}{(1+t^2)^3}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

- Déterminer une primitive de $x \mapsto \frac{1}{2 + \cos(x)}$ sur $] -\pi ; \pi[$ via le changement de variable $x = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$.

Les exercices (les 45 minutes restantes) consisteront essentiellement en des calculs de sommes et de produits de réels ou de complexes ou la preuve d'égalités/inégalités portant sur les sommes et produits.

Prévisions pour la semaine 8 : chapitre 11 (équations différentielles linéaires)

1. On obtient une relation de récurrence avec une IPP et on peut ensuite conclure par récurrence immédiate après avoir calculé les premiers termes et expliqué rapidement à l'oral comment on calcule le produit des premiers nombres impairs.

2. En cherchant une relation de récurrence sur la suite $(F_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n(x) = \int^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

Détails des chapitres au programme

Chapitre 10 – Calcul intégral

- Primitives.
 - ★ Notion de primitive. Si f est continue sur un intervalle, alors f admet une primitive sur I . Unicité des primitives à une constante additive près. Unicité de la primitive qui passe par un point donné du plan.
 - ★ Primitives des fonctions usuelles.
 - ★ Linéarité de la primitivation.
 - ★ Primitive d'une fonction se présentant comme un produit (de la forme $u' \times G \circ u$). Cas particuliers des fonctions du type $\varphi' \times e^\varphi$ avec $\varphi : I \rightarrow \mathbb{C}$. Cas particulier des fonctions du type $x \mapsto e^{ax} \cos(bx)$ ou $x \mapsto e^{ax} \sin(bx)$.
- Intégrales d'une fonction continue.
 - ★ Aire sous la courbe d'une fonction continue positive (définition intuitive et admise pour le moment) puis à valeurs réelles puis à valeurs complexes. Inversion des bornes. Cas des mêmes bornes.
 - ★ Théorème fondamental de l'analyse. Lien entre primitives et intégrales. Primitive générique. Dérivation des fonctions définies par une intégrale (dont les bornes varient).
 - ★ Relation de Chasles. Linéarité de l'intégrale. Positivité de l'intégrale. Croissance de l'intégrale. Inégalité triangulaire.
- Intégration par parties.
- Changement de variable. Intégrales d'une fonction paire/impair sur un domaine symétrique par rapport à l'origine.
- Primitive d'une fonction rationnelle réelle.
 - ★ Primitives de $x \mapsto 1/(x - r)^n$.
 - ★ Primitives de $x \mapsto 1/(ax^2 + bx + c)$.
 - ★ Primitives de $x \mapsto (\lambda x + \mu)/(ax^2 + bx + c)^n$.
 - ★ Fonctions polynomiales ou rationnelles en \cos et \sin .