Chapitre 26

Analyse asymptotique

Partie B : Développements limités

Dans cette partie, on considère D une union d'intervalles non vides et non réduit à un point. On considère a un **réel** adhérent à D. On se donne enfin f et g des fonctions de D dans $\mathbb{R}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.

I Notion de développement limité

1) Définition et interprétation

Dans la partie A, nous avons vu que

$$\sqrt{1+x} - 1 \underset{0}{\sim} \frac{x}{2} \qquad \cos(x) - 1 \underset{0}{\sim} -\frac{x^2}{2}, \qquad \ln(x) \underset{1}{\sim} x - 1$$

Ces équivalents se reformulent de la façon suivante :

Il s'agit à chaque fois d'une approximation simple (polynomiale) de ces fonctions au voisinage de 0 pour les deux premières et de 1 pour la troisième. On a vu que cela permet de lever des formes indéterminées dans le calcul de limite. Mais, lorsqu'on somme des équivalents, on a aussi vu que cela pouvait être insuffisant. Peut-on obtenir des termes supplémentaires, pour obtenir une approximation encore meilleure ?

Définition. *On dit que f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a (ou en a) s'il existe des réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ tels que*

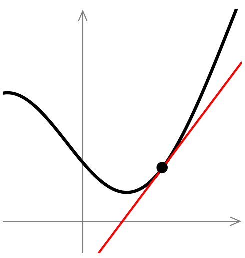
$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

On dit aussi que f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a ou encore un DL$_n(a)$.

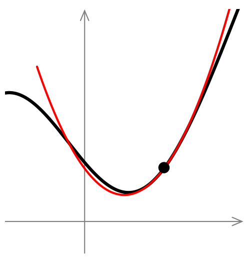
Remarque : Autrement dit, f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a s'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $f(x) \underset{a}{=} P(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$. Dans la définition, il s'agit du polynôme

$$P = c_0 + c_1 X + c_2 X^2 + \cdots + c_n X^n = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k.$$

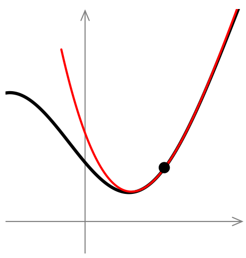
Le polynôme P est appelé la partie régulière du développement limité. Les réels $c_0, c_1, \dots, c_n$ sont appelée les coefficients (d'ordre $0, 1, 2, \dots, n$ respectivement) du développement limité.



À l'ordre 1

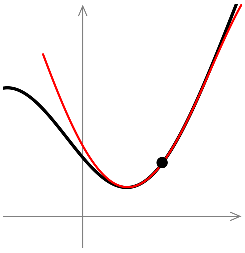


À l'ordre 2

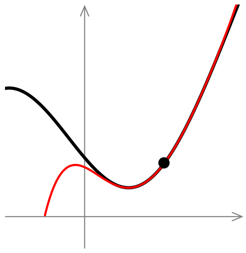


À l'ordre 3

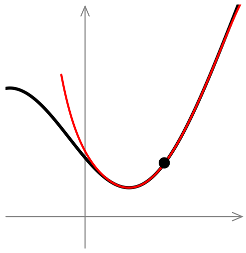
Plus l'ordre du développement limité est élevé, meilleure est l'approximation de la fonction par la partie régulière, comme on peut le voir sur les dessins ci-contre (en noir la courbe de la fonction, en rouge la courbe de la partie régulière du DL).



À l'ordre 4



À l'ordre 5



À l'ordre 6

2) Premiers exemples

- *Reprenons les trois exemples du paragraphe précédent :*

- *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

3) Premières propriétés

a) Troncature

Proposition (troncature). *Si f admet un DL à l'ordre n au voisinage de a alors, pour tout $p \leqslant n$, f admet un DL à l'ordre p au voisinage de a. Plus précisément : si*

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

alors , pour tout $p \leqslant n$,

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_p(x-a)^p + \mathrm{o}\left((x-a)^p\right).$$

On dit alors que le développement limité de f est tronqué à l'ordre n.

Démonstration. Soit $p \in \mathbb{N}$. Il existe $(c_0, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_p(x-a)^p + \underbrace{c_{p+1}(x-a)^{p+1} + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)}_{=\mathrm{o}(x^p)}$$

ce qui permet de conclure. □

b) Unicité du DL

Proposition (unicité du DL). *Si f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a, alors celui-ci est unique.*

C'est-à-dire la liste des coefficients $c_0, \ldots, c_n$ du DL est unique.

Démonstration.

Attention, on rappelle qu'on ne peut pas simplifier les o !

□

Corollaire. *On suppose que D est symétrique par rapport à 0 et que f admet un DL à l'ordre n au voisinage de 0.*

- *Si f est impaire sur D, alors tous les coefficients d'ordre pair ($c_0, c_2, c_4, \dots$) sont nuls.*
- *Si f est paire sur D, alors tous les coefficients d'ordre impair ($c_1, c_3, c_5, \dots$) sont nuls.*

Démonstration.

□

Remarque : Cela peut permettre notamment d'augmenter « gratuitement » l'ordre d'un DL si on connaît sa parité.

Par exemple, nous verrons dans le paragraphe III que $\cos$ *admet un développement limité à tout ordre. On a déjà vu que* $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^2\right)$. *Comme* $\cos$ *est paire, ses coefficients d'ordre impair sont nuls et donc* $\cos(x) \underset{0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

c) Se ramener à un DL en 0

La plupart des développements limités usuels sont en 0 (comme on le verra dans le paragraphe III) et on peut s'y ramener facilement :

Proposition. *La fonction f admet un développement limité d'ordre n au voisinage de a si et seulement si la fonction $h \longmapsto f(a+h)$ admet un développement limité d'ordre n en 0. Plus précisément, pour tout $(c_0, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$,*

$$f(x) \underset{x \to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$$

si et seulement si

$$f(a+h) \underset{h \to 0}{=} c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + o\big(h^n\big).$$

Lorsqu'on cherche un $\mathrm{DL}_n(a)$, il est souvent bien plus simple de se ramener à un $\mathrm{DL}_n(0)$ en faisant le « changement de variable $x = x_0 + h$ » :

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Exemple : *Déterminons un développement limité d'ordre 2 en* $\dfrac{\pi}{2}$ *de* $\sin$.

d) Lien avec les équivalents

Lorsqu'une fonction admet en a un développement limité dont la partie régulière n'est pas nulle, alors elle est équivalent au premier terme non nul de son DL :

Théorème. *Supposons que f admet un DL à l'ordre n en a :*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$$

avec $c_0, \ldots, c_n$ non tous nuls. Notons $k = \min\{j \in [\![0\,;n]\!] \mid c_j \neq 0\}$. Alors

$$f(x) \underset{a}{\sim} c_k(x-a)^k.$$

Démonstration. Par définition $c_0 = \cdots = c_{k-1} = 0$ et $c_k \neq 0$. En tronquant le DL à l'ordre k, on obtient :

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_k(x-a)^n + o\big((x-a)^k\big) \underset{a}{\sim} c_k(x-a)^k. \qquad \square$$

Les DL sont donc des armes redoutables pour trouver des équivalents (particulièrement quand il y a une somme) et donc des limites. Nous verrons des exemples dès que nous aurons listé les développements limités à tout ordre des fonctions usuelles.

4) DL avec O

On rencontrera parfois des DL avec un O au lieu d'un o, c'est-à-dire

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathsf{O}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

au lieu de

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathsf{o}\left((x-a)^{n}\right).$$

Ci-contre le DL avec le O entraîne celui avec le o mais la réciproque est fausse.

L'avantage de cette écriture est que :

- Elle nous évite de devoir calculer le coefficient devant x^{n+1} qui peut être parfois compliqué. Cela sera souvent suffisant dans le chapitre 27.
- Le O étant très maniable, cette écriture est aussi très maniable et permet de regrouper sous une même bannière des termes très divers.
- Elle indique l'ordre de grandeur du prochain terme donc dire que le prochain terme est un $\mathsf{O}\left(x^{n+1}\right)$ est plus précis que dire que c'est un $\mathsf{o}\left(x^{n}\right)$.
- Si on connaît un DL à l'ordre n et que l'on sait qu'il y a un DL à l'ordre $n+1$ (sans le connaître), alors on peut remplacer $\mathsf{o}\left(x^{n}\right)$ par $\mathsf{O}\left(x^{n+1}\right)$.

Par exemple elle dit qu'il n'y a pas de terme en $x^{n+\frac{1}{2}}$.

Par contre, si on ne sait pas qu'il y a un DL à l'ordre $n+1$, on ne peut rien dire. Nous verrons surtout dans la partie C que, pour les développements dits asymptotiques, il peut exister des termes de tout type (par exemple $x^{n+\frac{1}{2}}$ ou $\frac{x^n}{\ln(x)}$).

Exemple : *On connaît un DL à l'ordre 2 de* $\cos$ *et on verra dans le paragraphe III que* $\cos$ *admet des développements limités à tout ordre. Puisque* $\cos$ *est pair, les coefficients de degré impairs sont nuls. Ainsi on peut affirme que*

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \mathsf{O}\left(x^4\right).$$

On verra dans le paragraphe III que, dans ce O, se cache un $\dfrac{x^4}{24} + \mathsf{o}\left(x^4\right)$

II Théorèmes d'existence de développements limités

1) CNS d'un DL à l'ordre 0 et à l'ordre 1

Proposition (CNS d'un DL à l'ordre 0). *Supposons que f soit définie en a. La fonction f admet un développement limité à l'ordre 0 en a si et seulement si f est continue en a. Dans ce cas, $c_0 = f(a)$.*

Supposons que f n'est pas définie en a et possède un DL à l'ordre 0 en a :

$$f(x) = c_0 + o(1)$$

Alors $f(x) \xrightarrow[x\to a]{} c_0$. Ainsi f est prolongeable par continuité en a en posant $f(a) = c_0$.

Démonstration.

□

Proposition (CNS d'un DL à l'ordre 1). *Supposons que f soit définie en a. La fonction f admet un développement à l'ordre 1 en a si et seulement si f est dérivable en a. Dans ce cas, $c_0 = f(a)$ et $c_1 = f'(a)$.*

Démonstration.

□

On pourrait croire que l'on peut continuer ainsi indéfiniment, à savoir que f admet un DL d'ordre n en a si et seulement si f est n fois dérivable en a. Mais ce résultat est faux à partir de $n = 2$.

Plus précisément, l'existence d'un DL à l'ordre 2 en a n'implique pas que f soit deux fois dérivable en a.

Par exemple, considérons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

2) La formule de Taylor-Young

Dans le chapitre précédent, nous avons vu (et démontré) une condition nécessaire d'existence d'un développement limité d'ordre n : la formule de Taylor-Young. Reformulons simplement le théorème en terme de développement limité :

Théorème (formule de Taylor-Young). *Si f est de classe $\mathscr{C}^n$ au voisinage de a, alors f admet un développement limité à l'ordre n au voisinage de a :*

$$f(x) \underset{a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

Remarque : Sous forme plus condensée, $f(x) \underset{a}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$.

Notons que cette formule est vraie dès que f est n fois dérivable en a mais le programme impose l'hypothèse $\mathscr{C}^n$ et nous avons utilisé cette dernière pour la preuve présentée dans le chapitre 25.

C'est principalement ce théorème qui va nous permettre d'obtenir les développements limités des fonctions usuelles dans la paragraphe suivant.

III Développements limités usuels

Théorème (développements limités usuels). *Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. Les fonctions $x \longmapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$, $x \longmapsto \ln(1 \pm x)$, $x \longmapsto (1+x)^\alpha$, $\exp$, ch, sh, $\cos$, $\sin$ et Arctan admettent des développements limités à tout ordre en 0. Plus précisément, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,*

- $$\frac{1}{1-x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{0}{=} 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$
- $$\frac{1}{1+x} \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{0}{=} 1 - x + x^2 + -x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$
- $$\ln(1-x) \underset{0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{0}{=} -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \cdots - \frac{x^n}{n} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$
- $$\ln(1+x) \underset{0}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$
- $$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &\underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right) \\ &\underset{0}{=} 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 \\ &\qquad + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)\end{aligned}$$
- $$\mathrm{e}^x \underset{0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \mathrm{o}\left(x^n\right) \underset{0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \mathrm{o}\left(x^n\right)$$

Moyen mnémotechnique pour retenir les DL de $x \mapsto \ln(1 \pm x)$: ce sont les primitives des DL de $x \mapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$.

Moyen mnémotechnique pour retenir les DL de ch et sh : ce sont le DL de $\exp$ en ne gardant que les termes d'ordre pair et impair respectivement.

- $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \underset{0}{=} 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$
- $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right) \underset{0}{=} x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$
- $\cos(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right) \underset{0}{=} 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$
- $\sin(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$

  $\underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$
- $\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$

  $\underset{0}{=} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} + \cdots + \dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + \mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$

Moyen mnémotechnique pour retenir les DL de $\cos$ et $\sin$: ce sont le DL de ch et sh mais en alternant les signes.

Moyen mnémotechnique pour retenir les DL de Arctan : c'est le même que le DL de $\sin$ mais sans les ! au dénominateur.

DÉMONSTRATION. Toutes les fonctions citées sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0 donc la formule de Taylor-Young assure qu'elles admettent des développements limités à tout ordre en 0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- Le DL de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ à l'ordre n a été déterminé dans le paragraphe I.2.
- Le DL de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x}$ à l'ordre n s'obtient à partir du précédent en substituant x par $-x$ (possible puisque $-x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$).
- Le DL de $f : x \longmapsto \ln(1-x)$ à l'ordre n peut s'obtenir en primitivant celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}$ (cf. paragraphe IV.5) mais il découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $x \in \,]-1\,;1[$,

$$f'(x) = \frac{-1}{1-x}, \quad f''(x) = \frac{-1}{(1-x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{-2}{(1-x)^3}, \ldots$$

  Par récurrence immédiate, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \dfrac{-(k-1)!}{(1-x)^k}$ et donc $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = -\dfrac{(k-1)!}{k!} = -\dfrac{1}{k}$.
- Le DL de $x \longmapsto \ln(1+x)$ à l'ordre n peut s'obtenir à partir du précédent en substituant x par $-x$ (possible puisque $-x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$).
- Le DL de $f : x \longmapsto (1+x)^\alpha$ à l'ordre n découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tous $x \in \,]-1\,;1[$ et $k \in [\![0\,;n]\!]$, $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ et donc $\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$.

Notons que, si $\alpha \in \mathbb{N}$, alors $f^{(k)}(x) = 0$ pour tout $k > \alpha$. C'est attendu puisqu'à alors f est une fonction polynomiale de degré α.

- Le DL de $\exp$ à l'ordre n découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, $\exp^{(k)} = \exp$ et donc $\dfrac{\exp^{(k)}(0)}{k!} = \dfrac{1}{k!}$.
- Le DL de ch à l'ordre $2n$ découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $p \in [\![0\,;2n]\!]$, $\mathrm{ch}^{(p)} = \begin{cases} \mathrm{ch} & \text{si } p \text{ pair} \\ \mathrm{sh} & \text{si } p \text{ impair} \end{cases}$ donc $\dfrac{\mathrm{ch}^{(p)}(0)}{p!} = \begin{cases} \dfrac{1}{p!} & \text{si } p \text{ pair} \\ 0 & \text{si } p \text{ impair} \end{cases}$

  On effectue alors le changement d'indice $p = 2k$ (autorisé puisque les termes d'indice impair sont nuls).
- Le DL de sh à l'ordre $2n+1$ découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $p \in [\![0\,;2n+1]\!]$, $\mathrm{sh}^{(p)} = \begin{cases} \mathrm{sh} & \text{si } p \text{ impair} \\ \mathrm{ch} & \text{si } p \text{ pair} \end{cases}$ donc $\dfrac{\mathrm{sh}^{(p)}(0)}{p!} = \begin{cases} \dfrac{1}{p!} & \text{si } p \text{ impair} \\ 0 & \text{si } p \text{ pair} \end{cases}$

On effectue alors le changement d'indice $p = 2k+1$ (autorisé puisque les termes d'indice pair sont nuls).

- Le DL de $\cos$ à l'ordre $2n$ découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $p \in [\![0\,;2n]\!]$, $\cos^{(p)} = \begin{cases} \cos & \text{si } p \equiv 0\,[4] \\ -\sin & \text{si } p \equiv 1\,[4] \\ -\cos & \text{si } p \equiv 2\,[4] \\ \sin & \text{si } p \equiv 3\,[4] \end{cases}$ donc $\dfrac{\cos^{(p)}(0)}{p!} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{p}{2}}}{p!} & \text{si } p \text{ pair} \\ 0 & \text{si } p \text{ impair} \end{cases}$

  On effectue alors le changement d'indice $p = 2k$ (autorisé puisque les termes d'indice pair sont nuls).

- Le DL de $\sin$ à l'ordre $2n+1$ découle de la formule de Taylor-Young puisque, pour tout $p \in [\![0\,;2n{+}1]\!]$, $\sin^{(p)} = \begin{cases} \sin & \text{si } p \equiv 0\,[4] \\ \cos & \text{si } p \equiv 1\,[4] \\ -\sin & \text{si } p \equiv 2\,[4] \\ -\cos & \text{si } p \equiv 3\,[4] \end{cases}$ donc $\dfrac{\sin^{(p)}(0)}{p!} = \begin{cases} \dfrac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p!} & \text{si } p \text{ impair} \\ 0 & \text{si } p \text{ pair} \end{cases}$

  On effectue alors le changement d'indice $p = 2k+1$ (autorisé puisque les termes d'indice pair sont nuls).

- Le DL de Arctan est admis temporairement (et sera montré dans le paragraphe IV.5).

$\square$

Exemples :

- *Par exemple, à l'ordre 5 (ce qui est en général amplement suffisant) :*
  - $\star$ $\dfrac{1}{1-x} \underset{0}{=}$
  - $\star$ $\dfrac{1}{1+x} \underset{0}{=}$
  - $\star$ $\ln(1-x) \underset{0}{=}$
  - $\star$ $\ln(1+x) \underset{0}{=}$
  - $\star$ $\mathrm{e}^x \underset{0}{=}$
  - $\star$ $\mathrm{ch}(x) \underset{0}{=}$
  - $\star$ $\mathrm{sh}(x) \underset{0}{=}$
  - $\star$ $\cos(x) \underset{0}{=}$
  - $\star$ $\sin(x) \underset{0}{=}$
  - $\star$ $\mathrm{Arctan}(x) \underset{0}{=}$

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminons le développement de $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ à l'ordre n en 0.*

  C'est le cas où $\alpha = -\frac{1}{2}$ dans la formule pour $(1+x)^\alpha$. A savoir retrouver car c'est très très classique !

  - $\star$ *Commençons par les DL d'ordres 0 à 3 :*

⋆ *A l'ordre n quelconque maintenant :*

- *On montre de même que*

$$\sqrt{1+x} \underset{0}{=} 1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}-\frac{x^3}{16}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-1}(2n-1)}\binom{2n}{n}x^n+o(x^n)$$

C'est le cas où $\alpha=\frac{1}{2}$ cette fois.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

- *Voyons un premier exemple d'application des développements limités à la recherche d'un équivalent. Déterminons un équivalent de* $\dfrac{(\sin(x)-x)\operatorname{Arctan}(x)}{\mathrm{e}^x-1-x}$ *en* 0*. On a :*

Remarque : Le programme n'impose pas de connaitre les DL en 0 de Arcsin et Arccos. Nous verrons dans le paragraphe IV.5 comment les obtenir (plus ou moins) rapidement.

Théorème. *La fonction* $\tan$ *admet des développements limités à tout ordre en* 0*. On a*

$$\tan(x) \underset{0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\mathrm{o}\left(x^3\right).$$

Démonstration. Puisque $\tan$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ au voisinage de 0, la formule de Taylor-Young assure que $\tan$ admet des développements limités à tout ordre en 0. On a

$$\tan'=1+\tan^2, \qquad \tan''=2(1+\tan^2)\tan, \qquad \tan^{(3)}=2\tan'(1+3\tan^2)$$

donc $\tan'(0)=1$, $\tan''(0)=0$ et $\tan^{(3)}(0)=2$. La formule de Taylor-Young à l'ordre 3 permet de conclure. □

Remarque : En TD, nous utiliserons parfois plusieurs termes du DL de $\tan$ en 0 :

$$\tan(x) \underset{0}{=} x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right)$$

Nous verrons en TD et dans les paragraphes suivants, plusieurs méthodes pour l'obtenir.

Au delà de l'ordre 7 (ou plutôt de l'ordre 8 puisque le coefficient d'ordre 8 est nul), les coefficients sont difficiles à retenir. Contrairement aux DL du théorème précédent, il n'y a pas de formule simple pour les coefficients.

IV Opérations sur les développements limités

Dans la pratique, on utilise rarement la formule de Taylor-Young puisqu'elle demande le calcul des dérivées successives des fonctions, ce qui est rapidement fastidieux. À la place, on utilise les DL usuels pour obtenir ceux de fonctions construites à l'aide des fonctions usuelles à partir de sommes, produits, quotients, composées, etc.

1) Combinaison linéaire

Proposition. *Soit $(\lambda, \mu) \in (\mathbb{R}^*)^2$. Si les fonctions f et g admettent des développements limités d'ordre n en a dont les parties régulières sont les polynômes P et Q respectivement, alors $\lambda f + \mu g$ admet un développement limité d'ordre n en a dont la partie régulière $\lambda P + \mu Q$.*

⚠ Pour sommer un DL à l'ordre p et un DL à l'ordre $n < p$, on commence par tronquer le premier à l'ordre n puis on somme. En bref on somme les ordres communs et tout ce qui reste est aspiré par le « trou noir » du $\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$.

Démonstration. On a alors

$$\begin{aligned}(\lambda f + \mu g)(x) &\underset{a}{=} \lambda(P(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)) + \mu(Q(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right))\\ &\underset{a}{=} \lambda P(x-a) + \mu Q(x-a) + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).\end{aligned}$$

On conclut en remarquant que $\lambda P + \mu Q \in \mathbb{R}_n[X]$. □

Exemple : *Donner le DL à l'ordre 4 en 0 de $f : x \longmapsto \sin(x) + 2\ln(1+x)$.*

On a regroupé les deux $\mathrm{o}\left(x^4\right)$: rappelons qu'on peut sommer les mêmes o !

2) Produit

Proposition. *Si les fonctions f et g admettent des développements limités d'ordre n en a dont les parties régulières sont les polynômes P et Q respectivement, alors $f \times g$ admet un développement limité d'ordre n en a dont la partie régulière est $P \times Q$ tronqué à l'ordre n.*

⚠ Là encore, pour faire le produit d'un DL à l'ordre p et un DL à l'ordre $n < p$, on commence par tronquer le premier à l'ordre n puis on les multiplie. Ce qui reste est aspiré par le « trou noir » du $\mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$.

Démonstration. Il existe $(c_0, \dots, c_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ tel que $PQ = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} c_k X^k$. On a

$$\begin{aligned}(fg)(a+h) &\underset{h\to 0}{=} (P(h) + \mathrm{o}\left(h^n\right))(Q(h) + \mathrm{o}\left(h^n\right))\\ &\underset{h\to 0}{=} P(h)Q(h) + P(h)\mathrm{o}\left(h^n\right) + Q(h)\mathrm{o}\left(h^n\right) + \mathrm{o}\left(h^n\right)o(h^n)\\ &\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + \sum_{k=n+1}^{2n} c_k h^k + h^n\big(P(h)\mathrm{o}\left(1\right) + Q(h)\mathrm{o}\left(1\right) + o(h^n)\big)\\ &\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + h^n \underbrace{\left(\sum_{k=n+1}^{2n} c_k h^{k-n} + P(h)\mathrm{o}\left(1\right) + Qh)\mathrm{o}\left(1\right) + \mathrm{o}\left(h^n\right)\right)}_{\xrightarrow[h\to 0]{} 0}\\ &\underset{h\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k h^k + \mathrm{o}\left(h^n\right).\end{aligned}$$

Ainsi

$$(fg)(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

et la partie régulière est bien PQ tronqué à l'ordre n. □

En clair : pour le produit de DL à l'ordre n, on multiplie les parties régulière en ne gardant que les termes de degré inférieur à n. Réfléchir aux ordres peut donc parfois éviter des calculs compliqués et inutiles.

Exemple : *Donner le DL à l'ordre 5 en 0 de $f : x \longmapsto \sin(x) \times (\cos(x) - 1)$.*

- ***Méthode naïve :*** *Donnons le DL de $\sin$ et $\cos -1$ à l'ordre 5, et développons :*

- ***En pratique :*** *Tout d'abord, il est inutile d'écrire un terme quand on se rend compte qu'il a un ordre trop grand donc, dans notre exemple, quand on se rend compte qu'il est négligeable devant x^5. Par conséquent, quand on développe, on n'écrit que les termes de degré inférieur ou égal à 5, les autres étant aspirés par le $\mathrm{o}\left(x^5\right)$ qu'on met à la fin de l'expression. De plus, il est même inutile de mettre certains termes au début du calcul. Dans notre exemple :*
  - ⋆ *le premier terme de $\sin(x)$ est x, donc tous les termes de $\cos(x) - 1$ seront multipliés au moins par x donc leur degré augmentera au moins de 1. Puisqu'on veut du degré 5 à la fin, il suffit de donner le DL du $\cos$ à l'ordre 4.*
  - ⋆ *le premier terme de $\cos(x) - 1$ est $-\dfrac{x^2}{2}$, donc tous les termes de $\sin(x)$ seront multipliés au moins par x^2 donc leur degré augmentera au moins de 2. Puisqu'on veut du degré 5 à la fin, il suffit de donner le DL du $\sin$ à l'ordre 3.*

  En conclusion, en pratique, on écrira simplement :

On ne développe pas tous les termes (par exemple, on n'écrit pas le terme $x^3 \times x^4$ ni le terme $x^3 \times \mathrm{o}\left(x^4\right)$) : encore une fois, on n'écrit pas les termes dont on sait déjà qu'ils seront négligeables !

Exemples :

- *Donner le DL de $\sin^2$ à l'ordre 4 en 0.*

- *Donner le DL de* $x \longmapsto x^3\cos(x)$ *à l'ordre 8.*

3) Composition

Conformément au programme, il n'y a pas de résultat général à connaître concernant les compositions dans les développements limités. Le principe est très simple : si on dispose d'une fonction f qui admet un DL d'ordre n en a :

$$f(u) \underset{u\to a}{=} c_0 + c_1(u-a) + \cdots + c_n(u-a)^n + \mathrm{o}\left((u-a)^n\right),$$

alors on peut remplacer u par toute quantité qui tend vers a. C'est le principe de substitution dans les o vu dans le paragraphe IV.1.b de la partie A. Cette quantité peut être :

- u_n avec $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite telle que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$.
- $u(x)$ avec u une fonction telle que $u(x) \xrightarrow[x\to b]{} a$ où b est un point adhérent au domaine de définition de u.
- un développement limité d'une fonction u en un réel b de son domaine de définition et dont le coefficient constant est a.

Puisque tous les DL usuels sont en 0, on compose à droite par une fonction ou un développement limite, **qui tend vers** 0.

Contentons-nous d'exemples pour bien comprendre le principe :

Exemples :

- *Donner le DL à l'ordre* 5 *en* 0 *de* $x \longmapsto \sin(2x)$.

- *Donner le DL à l'ordre* 5 *en* 0 *de* $x \longmapsto \sin(x^2)$.

- *Donnons le DL de* $\ln$ *au voisinage de* 2 *à l'ordre* 3.

Il faut absolument penser à se ramener au DL de $\ln(1 \pm u)$ qui est le seul que l'on connaît avec du $\ln$.

- *Donner le DL de* $x \longmapsto e^x \sin(x^2)$ *à l'ordre* 7 *en* 0.

- *Donner le DL de* $\sin \circ \tan$ *à l'ordre* 4 *en* 0.

On a tout de suite simplifié le

$$\mathrm{o}\left(\left(x + \frac{x^3}{3} + \mathrm{o}\left(x^4\right)\right)^4\right)$$

en $\mathrm{o}\left(x^4\right)$: cela doit vous sembler évident (et ça l'est puisqu'un o d'un terme équivalent à x^4 est un $\mathrm{o}\,(4)$.

- *Reprenons l'exemple de* $u_n = 1 - \left(n + \dfrac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)$ *dont nous avons échoué, dans le paragraphe II.7 de la partie A, à donner un équivalent. La raison est que nous n'avions que les équivalents usuels pour faire le calcul, c'est-à-dire des DL à l'ordre 1.*

4) Quotient

Commençons par deux exemples que l'on sait déjà obtenir facilement avec les techniques des paragraphes précédents :

Exemples :

- *Donner le DL de* $x \longmapsto \dfrac{\cos(x)-1}{x^2}$ *à l'ordre* 5 *en* 0.

- *Calculer le DL à l'ordre 3 de* $x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{2+x}$ *en* 0.

Pour obtenir le DL d'un quotient $\dfrac{f}{g}$ de fonctions dont on connait des DL et telles que $g(a) \neq 0$, on écrit $g(x) = g(a) + g(x) - g(a) = g(a)\left(1 + \dfrac{g(x)-g(a)}{g(a)}\right)$ et on utilise celui de $x \longmapsto \dfrac{1}{1 \pm u}$. Cela revient donc à faire une composition (cf. paragraphe précédent).

Lorsque $g(a) = 0$, on peut quand même s'en sortir dans certains cas : notons $c_k(x-a)^k$ le premier terme non nul du DL de f et $b_p(x-a)^p$ le premier terme non nul du DL de g (on a forcément $p \geqslant 1$).
• Si $p \leqslant k$, alors on simplifie au numérateur et au dénominateur par $(x-a)^p$ pour se ramener au cas décrit ci-contre (avec un DL dont le terme constant n'est pas nul) et obtenir un DL du quotient (cf. exemple suivant).
• si $p > k$, alors on n'obtiendra pas de développement limité mais plutôt un développement asymptotique (cf. partie C de ce chapitre).

Exemples :

- *Calculer le DL à l'ordre 4 de* $\dfrac{1}{\cos}$.

- *Donner le DL de* $x \longmapsto \dfrac{x^3}{\mathrm{sh}(x) - x}$ *à l'ordre* 2.

- *Donner le DL de* $x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{\cos(x)}}$ *à l'ordre* 4 *en* 0.
On pourrait donner le DL de $\cos$ *puis appliquer le DL de* $\sqrt{1+u}$ *puis celui de* $\dfrac{1}{1+u}$ *mais on peut gagner une étape en mélangeant les deux dernières et en donnant le DL de* $\dfrac{1}{\sqrt{1+u}} = (1+u)^{-1/2}$ *(que l'on a vu dans le paragraphe III). Plus précisément :*

5) Primitivation

Soit I un intervalle non vide inclus dans D.

Lemme. *Supposons que* $a \in I$. *Soit* g *une fonction définie et dérivable sur* I *telle que* $g'(x) \underset{a}{=} \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$. *Alors* $g(x) \underset{a}{=} g(a) + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$.

Démonstration.

$\square$

Théorème (primitivation d'un DL). *Supposons que $a \in I$ et que f admette une primitive F sur I. Supposons aussi que f admet un développement limite à l'ordre n en a :*

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + a_cn(x-a)^n + \mathsf{o}\left((x-a)^n\right).$$

Alors F admet un développement limité à l'ordre $n+1$ en a :

$$F(x) \underset{a}{=} F(a) + c_0(x-a) + \frac{c_1}{2}(x-a)^2 + \frac{c_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{c_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathsf{o}\left((x-a)^{n+1}\right).$$

L'idée est simple : si f est petite alors ses primitives le sont (penser à l'aire sous la courbe) donc on peut primitiver un o.

Remarques :

- On peut donc toujours primitiver le DL d'une fonction continue (puisqu'une fonction continue admet des primitives).
- Ne pas oublier de primitiver le petit o.
- Ne pas oublier le $F(a)$!

Démonstration.

$\square$

Exemples :

- *Retrouver le DL de $x \longmapsto \ln(1+x)$ en 0 à tout ordre.*

- *Démontrons le DL de* Arctan *en* 0 *à tout ordre, temporairement dans le paragraphe III.*

- *Déterminons les DL de* Arccos *et* Arcsin *en* 0 *à tout ordre.*

On ne peut pas dériver un développement limité en général.

Par exemple, reprenons la fonction

$$f : x \longmapsto \begin{cases} x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

du paragraphe II.1. On a vu que f *admet un DL à l'ordre* 2 *en* 0 *mais n'est pas dérivable deux fois en* 0 *: dès lors,* f' *n'est pas dérivable en* 0 *donc n'admet pas de DL à l'ordre* 1*, alors que* f *admet un DL à l'ordre* 2*.*

Néanmoins, si on arrive à justifier l'existence du DL de la dérivée, alors on peut dériver le DL en utilisant le théorème de primitivation et l'unicité du DL. Plus précisément :

La méthode ci-contre n'est pas officiellement au programme. Il faudra donc la reproduire si besoin.

- On dispose du DL d'une fonction f à l'ordre $n \in \mathbb{N}^*$:

$$f(x) \underset{a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

- On justifie que f' admet un développement limité d'ordre $n-1$ (en général grâce à la formule de Taylor-Young si f' est de classe $\mathscr{C}^{n-1}$) :

$$f'(x) \underset{a}{=} b_0 + b_1(x-a) + b_2(x-a)^2 + \cdots + b_{n-1}(x-a)^{n-1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

- On peut alors primitiver le DL de f' :

$$f(x) \underset{0}{=} f(0) + b_0(x-a) + \frac{b_1}{2}(x-a) + \frac{b_2}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{b_{n-1}}{n}(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right).$$

- Par unicité du DL à l'ordre f de n, on a : $f(0) = c_0$ et, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $\dfrac{b_{k-1}}{k} = c_k$ donc $b_{k-1} = kc_k$ et donc

$$f'(x) \underset{a}{=} c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \cdots + nc_n(x-a)^{n-1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

On a bien pu dériver le DL de f.