

# Suites numériques

## Partie C : Étude des suites récurrentes du type $u_{n+1} = f(u_n)$

L'objectif de cette partie est d'étudier une classe particulière de suites définies par récurrence : les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec  $f$  une fonction définie sur une partie de  $\mathbb{R}$  et à valeurs réelles. Plus précisément, c'est la nature (c'est-à-dire sa convergence ou divergence) d'une telle suite qui va nous intéresser.

En général il est totalement illusoire de penser que l'on va pouvoir expliciter son terme général. Nous allons devoir puiser dans d'autres théorèmes d'existence de limite. Disons le tout de suite : c'est le théorème de la limite monotone qui est la star de cette partie.

Dans cette partie, pour les résultats généraux, on se donne  $D$  une union d'un nombre fini d'intervalles non vides et non réduits à un point et une fonction  $f$  définie sur  $D$  et à valeurs réelles. Enfin on définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par :

$$u_0 \in D \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

Lorsque  $f$  est une fonction affine, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est arithmético-géométrique, géométrique ou arithmétique et on sait expliciter son terme général (cf. partie A) puis déterminer sa limite (cf. partie B).

### I Existence de la suite : une histoire de stabilité

Une première question à se poser est : la suite est-elle bien définie, c'est-à-dire, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le terme  $u_n$  existe-il ? Et bien non, a priori.

*Par exemple, supposons que  $f : x \mapsto 2 - \sqrt{x}$ . Si on prend  $u_0 = 9$ , alors  $u_1 = f(u_0) = f(9) = 2 - 3 = -1$  et  $u_2$  n'est pas défini puisque  $f$  n'est pas définie en  $-1$ . L'histoire s'arrête-là pour cette suite.*

Il faut donc s'assurer que l'on va pouvoir appliquer indéfiniment la fonction  $f$ , c'est-à-dire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in D$ . Ainsi la première chose à faire est de s'assurer que  $D$  soit une partie stable par  $f$ . Rappelons la définition (déjà vue dans la partie A du chapitre 4) :

**Définition (partie stable).** On dit que  $D$  est stable par  $f$  si  $f(D) \subset D$ , c'est-à-dire, pour tout  $x \in D$ ,  $f(x) \in D$ .

**Théorème (existence de la suite).** Supposons que  $D$  soit stable par  $f$ . Si  $u_0 \in D$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n$  est bien défini et  $u_n \in D$ .

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $u_0 \in D$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $H(n)$  : «  $u_n$  est bien défini et  $u_n \in D$  ». Raisonnons par récurrence.

- Par hypothèse  $u_0$  existe et appartient à  $D$  donc  $H(0)$  est vraie.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons  $H(n)$  vraie. Puisque  $u_n \in D$ ,  $u_{n+1} = f(u_n)$  existe (puisque  $f$  est définie sur  $D$ ). De plus  $D$  est stable par  $f$  donc  $u_{n+1} = f(u_n) \in D$ . Ainsi  $H(n+1)$  est vraie.

Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $H(n)$  est vraie. □

#### Remarques :

- Si  $D$  est stable par  $f$ , on a  $u_1 = f(u_0)$ , puis  $u_2 = f(u_1) = f \circ f(u_0)$ , puis  $u_3 = f(u_2) = f \circ f \circ f(u_0)$ , etc. Plus généralement :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ fois}}(u_0).$$

Ce théorème est à savoir redémontrer si une question d'un sujet de concours le demande (le programme ne dit pas explicitement que ce résultat est exigible).

Il faut retenir ce principe. Toutefois, on en sait pas expliciter cette composée de  $f$   $n$  fois en général.

Que faire si  $D$  n'est pas stable par  $f$  ? Et bien, on se met à la recherche d'une partie  $D' \subsetneq D$  qui soit stable par  $f$  et on se limite à ne considérer que des termes initiaux appartenant à  $D'$ .

Reprenons l'exemple de  $f : x \mapsto 2 - \sqrt{x}$ .



C'est en faisant une étude de la fonction  $f$  qu'on arrive à déterminer des parties stables par  $f$  incluses dans  $D$ . Hélas, rien ne dit que c'est toujours possible en général.

- Parfois,  $u_0$  n'appartient pas à un domaine stable  $D'$  mais on arrive à montrer que les termes de la suite finissent par appartenir à  $D'$  (souvent  $u_1 \in D'$  ou  $u_2 \in D'$ ). Alors, par une récurrence analogue :

**Proposition.** Soit  $D'$  une partie stable par  $f$ . Supposons que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien définie et qu'il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0} \in D'$ . Alors, pour tout  $n \geq n_0$ ,  $u_n \in D'$ .

Dans la pratique, nous allons même chercher des parties stables par  $f$  sur lesquelles la fonction  $f$  possède certaines caractéristiques (typiquement est strictement monotone). En effet, si les termes de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  passent sans cesse d'un domaine de  $D$  à un autre où les propriétés de  $f$  sont différentes, nous risquons d'avoir beaucoup de mal à étudier la suite.

## II Un premier exemple

Supposons que  $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{4}{7}x$  et que  $D = \mathbb{R}_+$ . Ainsi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie par  $u_0 \in D$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{2} + \frac{4}{7}u_n.$$



### III Étude générale

L'exemple précédent a permis de mettre en évidence plusieurs grands axes dans l'étude de ces suites :

- l'utilisation d'intervalles stables sur lequel  $f$  est monotone
- l'utilisation du signe de  $g : x \mapsto f(x) - x$  et des points fixes de  $f$  (qui sont les valeurs d'annulation de  $g$ ),
- l'utilisation du théorème de la limite monotone (qui demande d'avoir montré que la suite est croissante majorée ou décroissante minorée).

Tâchons d'en faire des théorèmes généraux.

#### 1) Les points fixes sont les limites éventuelles

Rappelons la définition d'un point fixe.

**Définition (point fixe).** Soit  $a \in D$ . On dit que  $a$  est un point fixe de  $f$  sur  $D$  si  $f(a) = a$ .



**Théorème.** Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite  $\ell \in D$  et si  $f$  est **continue** en  $\ell$ , alors  $\ell = f(\ell)$ , c'est-à-dire  $\ell$  est un point fixe de  $f$  sur  $D$ .

DÉMONSTRATION.

En général, on ne connaît pas  $\ell$  avant d'appliquer ce résultat donc on a besoin de savoir que  $f$  est continue sur  $D$  tout entier (ou du moins sur un sous domaine de  $D$  contenant  $\ell$ ).

□

Remarques :

-  Ce théorème dit seulement que les points fixes sont des limites éventuelles. Il ne dit pas que, lorsque  $f$  admet un point fixe,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers celui-ci. Si on n'a pas démontré au préalable que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge, on ne peut donc rien dire.  
En revanche, si on sait que  $f$  n'admet pas de point fixe, cela prouve que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut pas converger.
-  L'hypothèse que  $f$  est continue est indispensable sinon (on l'a vu dans le paragraphe III.2 de la partie B),  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  peut ne pas converger vers  $f(\ell)$  et donc  $\ell$  peut ne pas être un point fixe dans ce cas.
- Nous verrons dans le chapitre 19 que certains points fixes sont attractifs, d'autres répulsifs. La dérivée de  $f$  joue alors un rôle primordial.
- Comment déterminer les points fixes de  $f$ ? On peut essayer de résoudre l'équation  $f(x) = x$ , d'inconnue  $x \in D$ . Mais en général, on étudie la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$  et on détermine ses valeurs d'annulation qui sont les points fixes de  $f$  (et le signe de  $g$  sera de toute façon utile dans le prochain paragraphe).
- Les points fixes ont d'autres intérêts. Notamment :
  - ★ Si  $u_0$  est un point fixe de  $f$ , alors  $u_1 = f(u_0) = u_0$ , puis  $u_2 = f(u_1) = f(u_0) = u_0$ , puis  $u_3 = f(u_2) = f(u_0) = u_0$ , etc. Par récurrence immédiate, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = u_0$ . Retenons :

Si  $u_0$  est un point fixe de  $f$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est constante.

Plus généralement, si il existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $u_{n_0}$  est un point fixe de  $f$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stationnaire (à  $u_{n_0}$  à partir du rang  $n_0$ ).

Dit autrement, si un terme de la suite tombe sur un point fixe, la suite reste piégée à ce point fixe.

- ★ Si  $I$  est un segment dont les bornes sont des points fixes et si  $f$  est croissante sur  $I$ , alors  $I$  est stable par  $f$ . En effet : supposons que  $I = [a; b]$  avec  $a$  et  $b$  des points fixes de  $f$ . Pour tout  $x \in I$ , on a  $a \leq x \leq b$  donc  $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$  et donc  $a \leq f(x) \leq b$ , c'est-à-dire  $f(x) \in I$ .

C'est encore vrai dès que  $I$  est un intervalle (ouvert, fermé ou semi-ouvert) dont toutes les bornes réelles sont des points fixes.

Il nous faut donc des résultats qui établissent l'existence de limite. Tournons-nous vers le théorème de la limite monotone et donc vers l'étude des variations de la suite.

## 2) Variations de la suite

Le programme officiel mentionne que les résultats théoriques de ce paragraphe doivent avoir été mis en évidence. Nous les énonçons comme des propositions mais ils devront être redémontrés si c'est demandé.

### a) Utilisation du signe de $g : x \mapsto f(x) - x$

**Proposition.** Supposons que  $D$  est stable par  $f$  et que  $u_0 \in D$ . On introduit  $g : x \mapsto f(x) - x$ .

- Si  $g$  est positive sur  $D$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- Si  $g$  est négative sur  $D$ , alors  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

Si, de plus,  $g$  ne s'annule pas sur  $D$ , alors la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stricte.

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $g$  est positive sur  $D$  (le cas négatif est analogue). Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , comme  $u_n \in D$  (puisque  $D$  est stable par  $f$ ),  $g(u_n) \geq 0$  donc  $f(u_n) \geq u_n$ , c'est-à-dire  $u_{n+1} \geq u_n$ . Ainsi  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Si, de plus,  $g$  ne s'annule pas sur  $D$ , l'inégalité est stricte et donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.  $\square$

### Exemples :

- Reprenons l'exemple de  $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{4}{7}x$  du paragraphe II mais cette fois avec l'intervalle  $D = \left[-\frac{8}{7}; 0\right]$  et  $u_0 \in D$ .

Il restera à étudier le cas où  $u_0 < -\frac{8}{7}$ . C'est en fait assez simple :

- Si  $-2 < u_0 < -\frac{8}{7}$ , alors  $f(-\frac{8}{7}) < f(u_0) < f(-2)$  donc  $0 < u_1 < \frac{6}{7}$ . On se retrouve dans le cas de figure du paragraphe II mais à partir du rang 1 et donc  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ .
- Si  $u_0 = -2$ , alors  $u_1 = f(u_0) = f(-2) = \frac{6}{7}$  donc la suite est stationnaire à  $\frac{6}{7}$  (dès le rang 1).
- Si  $u_0 < -2$ , alors  $f(u_0) > f(-2)$  donc  $u_1 > \frac{6}{7}$ . On se retrouve dans le cas de figure du paragraphe II mais à partir du rang 1 et donc  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ .

- Supposons maintenant que  $f : x \mapsto \sin(x) + x$ ,  $D = [0; 3\pi]$  et  $u_0 \in D$ .

Le premier exemple ci-dessous a une particularité : la fonction  $f$  n'est pas monotone sur la partie stable sur laquelle on l'étudie. Mais on a tout de même réussi à s'en sortir grâce à l'étude du signe de  $g$ . La plupart du temps, on arrive à se ramener à un domaine stable sur lequel la fonction  $f$  est monotone. On a alors des résultats spécifiques.

## b) Le cas où $f$ est croissante

**Proposition.** Supposons que  $D$  est stable par  $f$  et que  $u_0 \in D$ . Si  $f$  est croissante sur  $D$ , alors la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone. Plus précisément :

- Si  $u_1 \geq u_0$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- Si  $u_1 \leq u_0$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.

Si  $f$  est strictement croissante et  $u_1 \neq u_0$ , alors la monotonie de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est stricte.

**DÉMONSTRATION.** Supposons que  $u_1 \geq u_0$  (le cas  $u_1 \leq u_0$  est analogue). Raisonnons par récurrence. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $H(n) : « u_{n+1} \geq u_n »$ .

- $H(0)$  est vraie par hypothèse.
- Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $H(n)$  est vraie, c'est-à-dire  $u_{n+1} \geq u_n$ . Alors, par croissance de  $f$  sur  $D$ ,  $f(u_{n+1}) \geq f(u_n)$ , c'est-à-dire  $u_{n+2} \geq u_{n+1}$ . Ainsi  $H(n+1)$  est vraie.

Par récurrence, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} \geq u_n$ . On en déduit que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Si  $u_1 > u_0$  et  $f$  est strictement croissante, alors toutes les inégalités ci-dessus sont strictes et donc  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.  $\square$

**Remarque :** Ce cas de figure est très intéressant notamment si on sait que  $D$  est bornée et  $f$  croissante. On sait alors immédiatement que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge (que la suite soit croissante ou décroissante). Si on ne sait pas que  $D$  est bornée (mais par exemple seulement majorée ou seulement minorée), on devra être précis et comparer  $u_1$  avec  $u_0$ , c'est-à-dire étudier le signe de  $u_1 - u_0 = g(u_0)$ . On voit que la fonction  $g$  a encore son mot à dire ici.

**Exemple :** Supposons que  $f = \sin$ ,  $D = [0; \frac{\pi}{2}]$  et  $u_0 \in D$ .



On voit donc que la croissance de  $f$  entraîne la monotonie de la suite, mais pas forcément sa croissance !



On ne peut pas poser  $H(n) : « (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ est croissante} »$  puisque le  $n$  de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est muet donc  $H(n)$  ne dépendrait alors pas de  $n$  ! Erreur classique.

### c) Le cas où $f$ est décroissante


**Proposition.** Supposons que  $D$  est stable par  $f$  et que  $u_0 \in D$ . Si  $f$  est décroissante sur  $D$ , alors les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones de monotonie contraire. Plus précisément :

- Si  $u_2 \geq u_0$ ,  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante.
- Si  $u_2 \leq u_0$ ,  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  croissante.


Si  $f$  est strictement décroissante et  $u_2 \neq u_0$ , alors les monotonie de  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont strictes.

**DÉMONSTRATION.** Puisque  $f$  est décroissante sur  $D$  et que  $D$  est stable par  $f$ ,  $f \circ f$  est croissante sur  $D$ . Notons  $h = f \circ f$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_n = u_{2n}$ . Alors  $D$  est stable par  $h$  et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $v_{n+1} = h(v_n)$ . On peut alors appliquer la proposition du cas croissante : supposons que  $u_2 \geq u_0$  (les autres cas sont analogues), alors  $v_1 \geq v_0$  et donc  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a donc  $u_{2n+2} \geq u_{2n}$  et, par décroissance de  $f$  sur  $D$ ,  $u_{2n+3} = f(u_{2n+2}) \leq f(u_{2n}) = u_{2n+1}$ . Par conséquent  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.  $\square$

#### Remarques :

- Si le calcul du signe de  $u_2 - u_0$  est difficile, on peut aussi utiliser les résultats du paragraphe III.2.a et étudier la signe de  $\varphi : x \mapsto f \circ f(x) - x$ . On a alors  $\varphi(u_0) = u_2 - u_0$ . Plus généralement, si  $\varphi$  est positive (respectivement négative), alors  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante (respectivement décroissante).
-  Les limites finies éventuelles des suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont des points fixes de  $f \circ f$  (et non pas de  $f$  !!!), c'est-à-dire les valeurs d'annulation de  $\varphi$ .

**Exemple :** Supposons que  $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$ ,  $D = [1; 3]$  et  $u_0 \in D$ .

En effet : si on se donne  $(x, y) \in D^2$  tel que  $x < y$ , alors  $f(x) > f(y)$  puis  $f(f(x)) < f(f(y))$ .  La stabilité est indispensable pour pouvoir, passer à la fonction  $f$  dans l'inégalité  $f(x) > f(y)$  !

Notons que les points fixes de  $f$  sont encore des points fixes de  $f \circ f$  mais que la réciproque est fausse. Par exemple, si  $f : x \mapsto -x$ , alors 1 est point fixe de  $f \circ f$  mais pas de  $f$ .

Si  $u_0 > 0$ , alors  $u_1 = 1 + \frac{2}{u_0} > 1$  puis  $0 < \frac{2}{u_1} < 2$  donc  $1 < u_2 < 3$ . Par conséquent  $u_2 \in [1; 3]$  et, comme  $]1; 3[$  est stable par  $f$ , on a  $u_n \in D$  pour tout  $n \geq 2$ . On applique alors le raisonnement de l'exemple (mais à partir du rang 2).



### 3) Représentation graphique

Il existe une représentation graphique propre à ce type de suites, très pratique pour faire des conjectures.

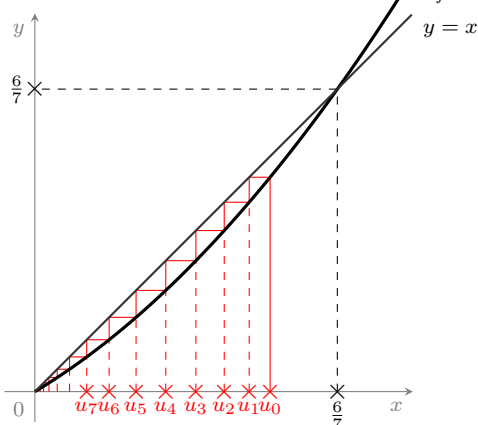
- On commence par tracer le graphe  $C_f$  de la fonction  $f$  ainsi que la première bissectrice des axes (la droite d'équation  $y = x$ ).
- On part du point de coordonnées  $(u_0, 0)$  (sur l'axe des abscisses, donc) et on va verticalement jusqu'à  $C_f$  : le point atteint aura donc pour coordonnées  $(u_0, f(u_0))$ , c'est-à-dire  $(u_0, u_1)$ .
- Ensuite on va horizontalement jusqu'à la première bissectrice. Puisque l'ordonnée vaut  $u_1$ , on arrive donc au point de coordonnées  $(u_1, u_1)$ .
- On va ensuite verticalement jusqu'à  $C_f$  : le point atteint aura donc pour coordonnées  $(u_1, f(u_1))$ , c'est-à-dire  $(u_1, u_2)$ .
- On va ensuite horizontalement jusqu'à la première bissectrice, et donc on arrive au point de coordonnées  $(u_2, u_2)$ .
- On va ensuite verticalement jusqu'à  $C_f$  : le point atteint aura donc pour coordonnées  $(u_2, f(u_2))$ , c'est-à-dire  $(u_2, u_3)$ .
- Et ainsi de suite. On alterne en allant verticalement jusqu'à  $C_f$  puis horizontalement jusqu'à la première bissectrice. Les abscisses successives sont les termes de la suite.

car, sur cette droite, les abscisses et les ordonnées sont égales.

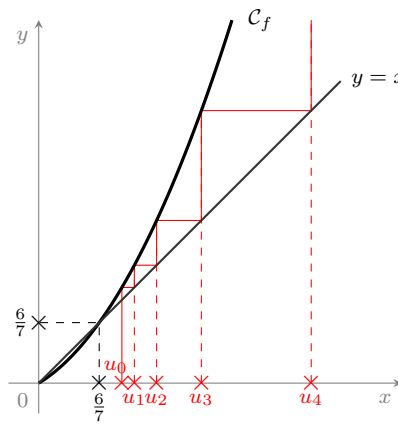
**Exemples :**

- Avec l'exemple de la fonction  $f : x \mapsto \frac{x^2}{2} + \frac{4}{7}x$  :

★ pour un  $u_0 \in ]0; \frac{6}{7}[$  :

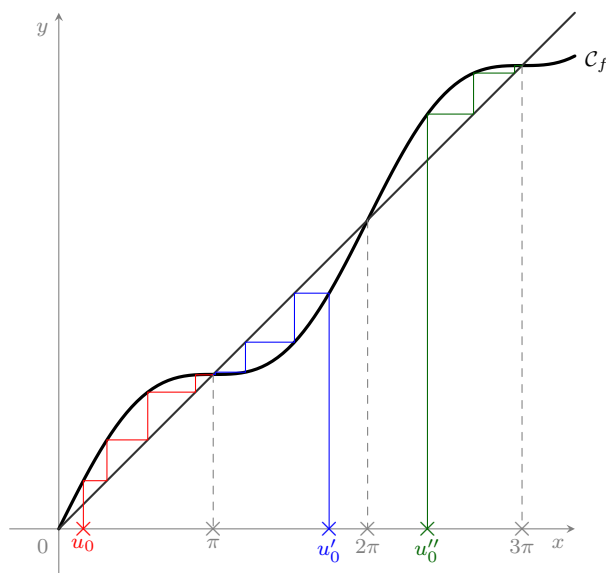


★ pour un  $u_0 \in ]\frac{6}{7}; +\infty[$  :



On observe bien que, lorsque  $u_0 \in ]0; \frac{6}{7}[$ , la suite converge vers 0 et que, lorsque  $u_0 > \frac{6}{7}$ , la suite tend vers  $+\infty$ .

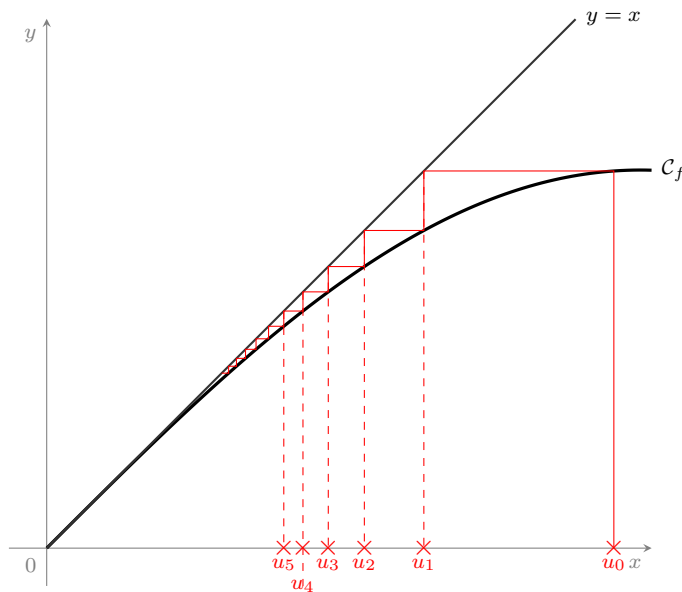
- Avec l'exemple de la fonction  $f : x \mapsto \sin(x) + x$  et  $u_0 \in [0; 3\pi]$  :



On observe bien que :

- lorsque  $u_0 \in ]0; \pi[$  ou  $]\pi; 2\pi[$ , la suite converge vers  $\pi$  (ici on a pris  $u_0 = \frac{1}{2}$  et  $u_0 = u'_0 = \frac{11}{2}$ ).
- lorsque  $u_0 \in ]2\pi; 3\pi[$ , la suite converge vers  $3\pi$  (ici on a pris  $u_0 = u''_0 = \frac{15}{2}$ ).

- Avec l'exemple de la fonction  $f = \sin$  et  $u_0 \in [0; \frac{\pi}{2}]$  :

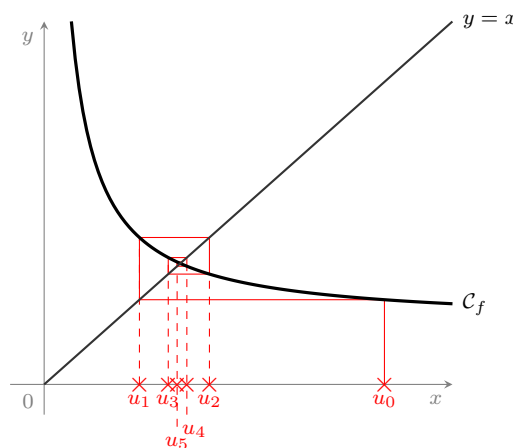
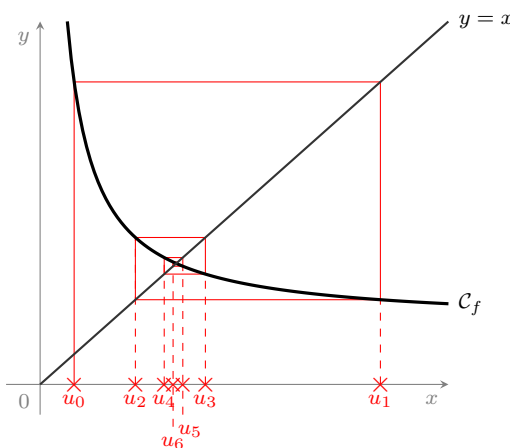


On observe bien que la suite converge vers 0.

- Avec l'exemple de la fonction  $f : x \mapsto 1 + \frac{2}{x}$  et  $u_0 \in [1; 3]$  :

★ pour un  $u_0 \in [1; 2[$  :

★ pour un  $u_0 \in ]2; 3]$  :



Le cas où  $f$  est décroissant est typique puisque l'on observe des « escargots ». Ici on observe une convergence vers le point fixe 2. Mais, dans d'autres exemples, on pourrait aussi observer des spirales qui s'éloignent du point fixe.

#### 4) Bilan : plan général d'étude

Résumons le plan d'étude des suites de ce type qui se dégage des résultats précédents et des exemples :

- On commence par justifier que  $f$  est bien définie sur un intervalle stable  $D$ . Cela garantit que la suite est bien définie et que ses termes appartiennent à  $D$ .
- On étudie les variations de  $f$  sur  $D$  ainsi que le signe de la fonction  $g : x \mapsto f(x) - x$  sur  $D$ .
- On en déduit alors :
  - ★ des intervalles stables par  $f$  sur lesquels  $g$  est positif (ou négatif) ou, mieux encore, sur lesquels  $f$  est monotone.
  - ★ les points fixes de  $f$ , qui sont exactement les valeurs d'annulation de  $g$ .
- On peut s'aider d'une représentation graphique (cf. paragraphe précédent) pour conjecturer les limites selon les valeurs de  $u_0$ .

Les variations de  $g$  et le signe de  $f$  au sens **strict** si possible.

Tout ça strictement si possible.

- Sur chaque intervalle  $I$  du type décrit dans le troisième point, on suppose que  $u_0 \in I$  et on utilise les résultats du paragraphe III.2 pour déterminer les variations de la suite.

Plus précisément :

- ★ si  $g$  est positive sur  $I$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- ★ si  $g$  est négative sur  $I$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
- ★ si  $f$  est croissante sur  $I$ ,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est monotone et ses variations sont dictées par le signe de  $u_1 - u_0$ .
- ★ si  $f$  est décroissante sur  $I$ ,  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones de monotonie contraire dictées par le signe de  $u_2 - u_0$ .


Dans la pratique, on choisit l'approche qui semble la plus adaptée au cas de figure étudiée.

- On utilise ensuite le théorème de la limite monotone. Plus précisément :

- ★ Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et que l'intervalle  $I$  admet une borne supérieure  $b$  (atteinte ou non),  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet donc une limite qui appartient à  $[u_0; b]$  (voire à  $]u_0; b]$  si on sait qu'il y a stricte croissance).
- ★ Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et que l'intervalle  $I$  n'est pas majoré, on ne peut pas conclure tout de suite. En effet rien ne dit que les termes n'appartiennent pas en fait à un intervalle plus petit et qui est majoré. Mais si on remarque que  $f$  est continue et n'admet pas de point fixe sur  $I$ , on raisonne ainsi :
  - On raisonne par l'absurde en supposant la suite est majorée par un réel  $M$ .
  - Par théorème de la limite monotone, elle admet une limite  $\ell \in [u_0; b]$  (voire à  $]u_0; b]$  si on sait qu'il y a stricte croissance).
  - Par continuité de  $f$  sur  $I$ ,  $\ell$  est un point fixe.
  - On conclut que c'est absurde et donc que la suite n'est pas majorée. Par théorème de la limite monotone, elle tend vers  $+\infty$ .

Si  $I$  est ouvert en  $b$ , les inégalités strictes ne passant pas à la limite, il faut impérativement inclure  $b$  dans la liste des limites possibles.

- ★ Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante, c'est analogue.
- ★ Dans le cas de figure où  $f$  est décroissante sur  $I$  et donc que  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones de monotonie contraire, on raisonne de la même façon avec chacune de ces deux suites.

 Avec deux risques d'erreur :

- Si ces deux suites convergent, rien ne dit qu'elles ont la même limite.
  - Si elles convergent, leurs limites sont des points fixes de  $f \circ f$  et non de  $f$ .
- Si on arrive à montrer qu'elles admettent la même limite finie, alors la suite converge vers la limite en question.

## 5) Importance de la croissance de $f$ sur un domaine stable

L'approche décrite ci-dessus est très efficace à condition que l'on arrive à trouver des intervalles stables sur lesquels  $f$  est croissant (ou décroissant mais alors on se ramène à une fonction de récurrence croissante en considérant  $f \circ f$  et en étudiant les suites des termes de rangs pairs/impairs).

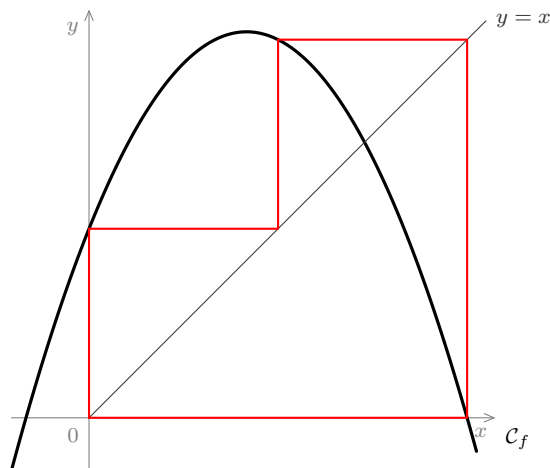
On verra dans le chapitre 19, que l'on peut s'en sortir quand la fonction  $f$  est dite « contractante ».

Mais sans ces hypothèses, la suite peut être extrêmement difficile à étudier, voire impossible. Regardons l'exemple de la fonction

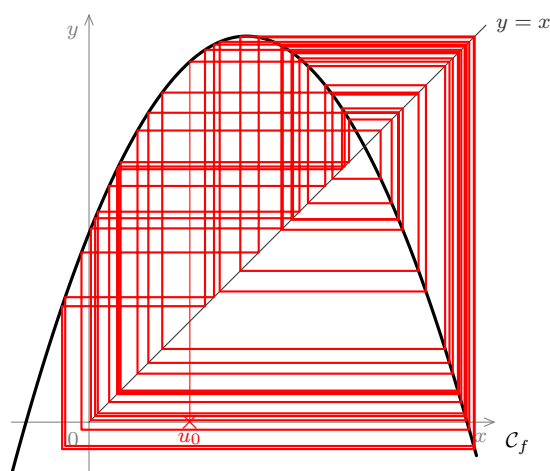
$$f : x \mapsto -\frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{2}x + 1.$$

- Si  $u_0 = 0$ , alors  $u_1 = f(u_0) = f(0) = 1$  puis  $u_2 = f(u_1) = f(1) = 2$  puis  $u_3 = f(u_2) = f(2) = 0$ . Et ainsi de suite : la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est 3-périodique. En particulier, elle n'admet pas de limite.

On s'en sort aussi si on arrive à montrer que  $g$  est de signe constant.



- Si  $u_0 = \frac{8}{15}$ , on obtient une suite totalement chaotique sans aucune convergence ou périodicité :



## IV Un exemple plus difficile

Notons  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :  $u_0 \in \mathbb{R}$  et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 4 - \frac{u_n^2}{9}.$$

On pose alors  $f : x \mapsto 4 - \frac{x^2}{9}$  et  $g : x \mapsto f(x) - x$ .

**Variations de  $f$  et signe de  $g$ .**

- La fonction strictement décroissante sur  $\mathbb{R}_+$  et strictement croissante sur  $\mathbb{R}_-$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$g(x) = \frac{36 - x^2 - 9x}{9} = \frac{(3 - x)(x + 12)}{9}.$$

En effet le discriminant du trinôme au numérateur est

$$\Delta = (-9)^2 - 4 \times (-1) \times 36 = 9 \times (9 + 16) = (3 \times 5)^2$$

donc celui-ci admet pour racines  $\frac{9 - 15}{-2} = 3$  et  $\frac{9 + 15}{-2} = -12$ . On en déduit le tableau de signe de  $g$  :

|        |           |       |     |           |     |
|--------|-----------|-------|-----|-----------|-----|
| $x$    | $-\infty$ | $-12$ | $3$ | $+\infty$ |     |
| $g(x)$ | $-$       | $0$   | $+$ | $0$       | $-$ |

**Points fixes de  $f$ .** En particulier  $-12$  et  $3$  sont les uniques points fixes de  $f$  et donc ce sont les limites finies éventuelles de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . On peut donc déjà affirmer que :

- Si  $u_0 = -12$ , alors la suite est constante égale à  $-12$  et donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -12$ .
- Si  $u_0 = 3$ , alors la suite est constante égale à  $3$  et donc  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 3$ .

**Intervalles stables par  $f$ .** Cherchons des intervalles stables par  $f$  en nous aidant de ses variations, de ses points fixes et aussi de la parité de  $f$ .

- Puisque  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty; -12]$  et que  $f(-12) = -12$ , on en déduit que  $]-\infty; -12[$  est stable par  $f$ . Par conséquent, si  $u_0 < -12$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n < -12$ .
- Si  $x > 12$ , alors  $f(x) < f(12) = f(-12) = -12$ . Ainsi, si  $u_0 > 12$ ,  $u_1 < -12$  et donc pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n < -12$ .
- Si  $x \in ]-12; 0[$ , alors  $-12 < f(x) < f(0) = 4$ . Si  $x \in [0; 4]$ , alors  $\frac{12}{9} = f(4) \leq f(x) \leq f(0) = 4$ . Si  $x \in ]4; 12[$ , alors  $f(12) < f(x) < f(4)$  donc  $-12 < f(x) < \frac{12}{9}$ . On en déduit que  $]-12; 4]$  et  $[0; 4]$  sont stables par  $f$ . Par conséquent :
  - ★ Si  $u_0 \in [0; 4]$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in [0; 4]$ .
  - ★ Si  $u_0 \in ]-12; 4]$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \in ]-12; 4]$ .

**Cas où  $u_0 < -12$  ou  $u_0 > 12$ .** On a vu qu'alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n < -12$ . On en déduit que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n = g(u_n) < 0$  : la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est strictement décroissante. Le théorème de la limite monotone assure que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  admet une limite  $\ell$  finie ou égale à  $-\infty$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que  $\ell \in \mathbb{R}$ . Puisque  $f$  est continue en  $\ell$ , on en déduit que  $\ell$  est un point fixe de  $f$ . Mais  $\ell < u_1 < -12$  et il n'y a aucun point fixe strictement inférieur à  $-12$ . C'est absurde :  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -\infty$ .

**Cas où  $u_0 = 12$ .** On a alors  $u_1 = f(12) = f(-12) = -12$  puis, par récurrence immédiat,  $u_n = -12$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Ainsi  $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} -12$ .

**Cas où  $0 \leq u_0 \leq 4$ .** On a vu qu'alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq u_n \leq 4$ . Comme  $f$  est décroissante sur  $[0; 4]$  et que c'est un intervalle stable par  $f$ , on en déduit que les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont monotones (de monotonie contraire). Comme elles sont bornées (par 0 et 4), elles convergent vers des limites  $\alpha$  et  $\beta$  appartenant à  $[0; 4]$  par théorème de la limite monotone. Puisque  $f \circ f$  est continue en  $\alpha$  et  $\beta$  (car c'est une application polynomiale), on en déduit que  $\alpha$  et  $\beta$  sont des points fixes de  $f \circ f$ . Déterminons-les : on se donne  $x \in [0; 4]$ . On a

$$\begin{aligned} f \circ f(x) = x &\iff 4 - \frac{(4 - x^2/9)^2}{9} = x \\ &\iff 4 - \frac{16}{9} + \frac{8x^2}{9^2} - \frac{x^4}{9^3} = x \\ &\iff 4 \times 9^3 - 16 \times 9^2 + 8 \times 9x^2 - x^4 - 9^3x = 0 \\ &\iff x^4 - 8 \times 9x^2 + 9^3x - 4 \times 9^2 \times 5 = 0. \end{aligned}$$

Il s'agit d'une application polynomiale de degré 4. Mais, comme  $-12$  et  $3$  sont des points fixes de  $f$ , ce sont aussi des points fixes de  $f \circ f$  donc des racines de l'application polynomiale ci-dessus. Autrement dit, on peut la factoriser par  $x \mapsto (x - 3)(x + 12) = x^2 + 9x - 36$ . Il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^2$  tel que, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$x^4 - 8 \times 9x^2 + 9^3x - 4 \times 9^2 \times 5 = (x^2 + 9x - 36)(ax^2 + bx + c).$$

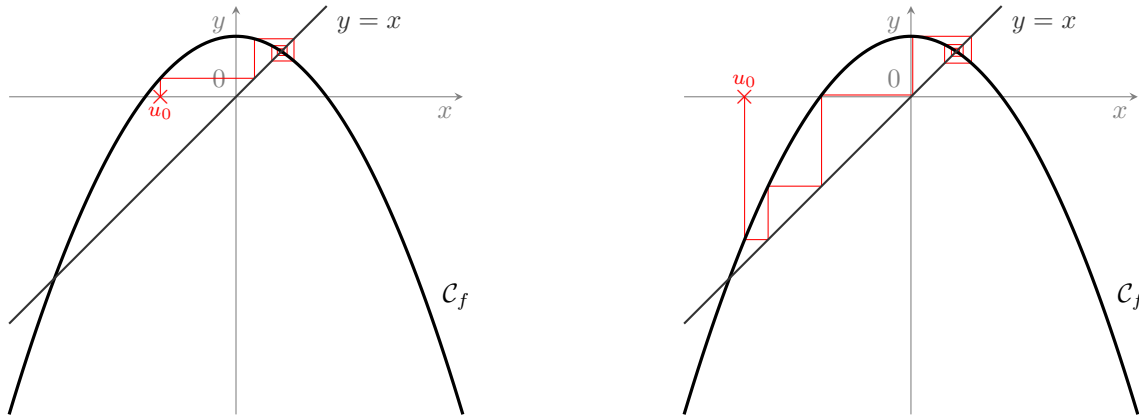
Le coefficient dominant de l'application polynomiale de droite est  $a$ , son coefficient constant est  $-36c$  et son coefficient de degré 3 est  $b + 9a$ . Par unicité des coefficients d'une application polynomiale, on a donc  $a = 1$ ,  $-36c = -4 \times 9^2 \times 5$  et  $b + 9a = 0$ . On en déduit que  $a = 1$ ,  $b = -9$  et  $c = 45$ . Finalement :

$$f \circ f(x) = x \iff (x - 3)(x + 12)(x^2 - 9x + 45) = 0.$$

Mais l'application polynomiale  $x \mapsto x^2 - 9x + 45$  admet pour discriminant  $-99 < 0$  donc elle est à valeurs strictement positives. Nous en déduisons que seul  $3$  est un point fixe de  $f \circ f$  sur  $[0; 4]$ . Par conséquent

$\alpha = \beta = 3$  et donc, comme les suites  $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  admettent 3 pour limite commune, on conclut que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 3$ .

**Cas où**  $-12 < u_0 < 0$  **ou**  $4 < u_0 < 12$ . On a alors  $-12 < u_1 \leq 4$  si bien que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $-12 < u_n \leq 4$ . On ne peut pas conclure tout de suite puisque  $f$  n'est pas monotone et  $g$  n'est pas de signe constant sur  $] -12 ; 4 ]$ . Aidons-nous de dessins :



Il semblerait que les termes de la suite finissent par rejoindre l'intervalle  $[0 ; 4]$ . Montrons-le rigoureusement. On sait déjà que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $-12 < u_n \leq 4$ . Raisonnons par l'absurde et supposons que, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $-12 < u_n < 0$ . On a alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n = g(u_n) > 0$ . La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors strictement croissante et majorée (par 0). Elle converge donc vers un réel  $\ell \in ]u_1 ; 0]$  par théorème de la limite monotone. Mais comme  $f$  est continue en  $\ell$ , il s'ensuit que  $\ell$  est un point fixe de  $f$  donc  $\ell = -12$  ou  $\ell = 3$ . C'est absurde. Ainsi, il existe un rang  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $u_k \in [0 ; 4]$ . Puisque  $[0 ; 4]$  est stable par  $f$ , on montre par récurrence que, pour tout  $n \geq k$ ,  $u_n \in [0 ; 4]$ . On a déjà montré plus haut que, dans ce cas,  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 3$  (c'est du moins la même preuve à partir du rang  $k$  au lieu du rang 0).

#### Bilan.

- Si  $|u_0| > 12$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$ .
- Si  $|u_0| = 12$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -12$ .
- Si  $|u_0| < 12$ , alors  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 3$ .