Chapitre 23

Calcul Matriciel

L'objectif de ce chapitre est d'introduire la notion de matrice qui n'est rien d'autre qu'un tableau de nombres (ou plus généralement d'éléments d'un corps) sur lequel nous allons définir des opérations et faire des calculs. L'intérêt premier de ce chapitre est le lien très fort qu'il y a entre les matrices et les systèmes linéaires.

Cependant c'est dans le chapitre 34, que les matrices trouveront leur intérêt majeur cette année.

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne un corps (typiquement $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ mais pas forcément). On se donne n, p, q, r des entiers naturels non nuls.

I Notion de matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$

1) Définitions

Définition (matrice). *Une matrice A à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est une famille $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, que l'on représente sous la forme d'un tableau à n lignes et p colonnes*

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, $L_i = \begin{pmatrix} a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,p} \end{pmatrix}$ est appelé la $i^{\text{ème}}$ ligne de A et

$$C_j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

est appelé la $j^{\text{ème}}$ colonne de A.

Dans une matrice, le premier indice est l'indice de la ligne et le second celui de la colonne. Pour tous $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, $a_{i,j}$ est appelé le terme (ou le coefficient) de A d'indice (i,j) et il se trouve donc en $i^{\text{ème}}$ ligne et $j^{\text{ème}}$ colonne.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes et à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Si $n = p$, on dit que la matrice est carrée de taille n ou d'ordre n. L'ensemble des matrices carrées de taille n est noté $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (au lieu de $\mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$).

On dit aussi une matrice de taille $n \times p$. Lorsque $n = p$, on note aussi $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Quand il n'y a pas de confusion sur l'espace dans lequel évoluent les indices, on notera simplement $A = (a_{i,j})_{i,j}$ ou, encore plus simplement, $A = (a_{i,j})$.

Même si $\mathbb{K}$ doit être un corps dans ce cours, on note parfois $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{Z})$ pour parler de l'ensemble des matrices à coefficients entiers.

Exemples :

- $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$, $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ 1+3\mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$, $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ \sqrt{2} \\ \pi \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$.
- *Si on définit $M = (i+j-1)_{\substack{1\leqslant i\leqslant 3\\ 1\leqslant j\leqslant 4}}$, alors on a $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{K})$.*

Remarques :

- Une matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}}$ de taille $n \times p$ à coefficient dans $\mathbb{K}$ est tout simplement une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$. Autrement dit c'est une application $(i,j) \longmapsto a_{i,j}$ de $[\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$ dans $\mathbb{K}$. Ainsi on a $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = \mathbb{K}^{[\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;p]\!]}$.

Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note parfois $A_{i,j}$ ou $(A)_{i,j}$ son coefficient d'ordre $(i,j) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$.

- Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont la même taille et les mêmes coefficients. En d'autres termes, deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont égales si et seulement si $A_{i,j} = B_{i,j}$ pour tous $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $j \in [\![1\,;p]\!]$.
- Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}}$ est une matrice carrée, les $a_{i,i}$ sont appelés coefficients diagonaux de A :

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{a_{1,1}} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \mathbf{a_{2,2}} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & \mathbf{a_{n,n}} \end{pmatrix}.$$

2) Quelques matrices particulières

Définition (matrices lignes, colonnes).

- *Une matrice de taille $1 \times p$ est appelée matrice ligne (ou vecteur ligne) de taille p.*
- *Une matrice de taille $n \times 1$ est appelée matrice colonne (ou vecteur colonne) de taille n.*

Remarques :

- On note souvent
  - ⋆ $A = (a_j)_{1\leqslant j\leqslant p}$ une matrice ligne à p colonnes au lieu de $(a_{1,j})_{1\leqslant j\leqslant p}$.
  - ⋆ $A = (a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ une matrice colonne à n lignes au lieu de $(a_{i,1})_{1\leqslant i\leqslant n}$.
- Nous « identifierons » parfois les matrices lignes ou colonnes de taille n aux éléments de $\mathbb{K}^n$ ayant les mêmes coordonnées.

  Par exemple les matrices $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ *et* $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ *au triplet* $(1,2,3)$.

  De la même façon, nous identifierons souvent une matrice 1×1 à l'élément de $\mathbb{K}$ qu'elle contient.

Nous justifierons ces identifications (intuitives !) au chapitre 30, quand nous parlerons d'espaces vectoriels isomorphes.

Définition (matrices élémentaires). *Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf le coefficient d'indice (i,j) qui est égal à 1. En d'autres termes, $E_{i,j}$ est la matrice suivante :*

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} & & & & j & & \end{matrix} & \end{array}$$

Cette matrice est appelée matrice élémentaire d'indice (i,j) dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Ne pas perdre de vue le fait que la matrice $E_{i,j}$ dépend de la taille $n\times p$ des matrices de l'espace sur lequel on travaille. Pour les utiliser avec cette notation, il ne doit y avoir aucune ambiguïté sur cet espace.

Exemple : *Les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ sont :*

S'il n'y a aucune ambiguïté sur la taille de la matrice, on la note plus simplement 0. Attention, on ne la confondra pas avec le 0 du corps $\mathbb{K}$.

On ne définit pas de matrice identité non carrée.

Définition (matrice nulle). *On note $0_{n,p}$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls. Si $n=p$, on la note 0_n.*

Définition (matrice identité). *On appelle matrice identité d'ordre n et on note I_n la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf les coefficients diagonaux qui valent 1. Autrement dit :*

$$\mathrm{I}_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

II Opérations sur les matrices

Mais lorsque $(x,y)\in\mathbb{K}^2$, on note plus simplement xy le produit $x\cdot y$.

Notons $+$ l'addition sur le corps $\mathbb{K}$ et $\cdot$ la multiplication. Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés scalaires.

1) Addition et multiplication par un scalaire

On ne peut sommer que des matrices de même taille (c'est-à-dire avec le même nombre de lignes et le même nombre de colonnes).

Définition (addition de deux matrices). *Soient $A=(a_{i,j})_{i,j}$ et $B=(b_{i,j})_{i,j}$ deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit l'addition (ou la somme) de A et B, et on note $A+B$, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i,j) est $a_{i,j}+b_{i,j}$ pour tout $(i,j)\in [\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;p]\!]$. Autrement dit $A+B=(a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$*

En d'autres termes, on somme coefficient par coefficient (attention, ce ne sera pas le cas pour le produit dans le paragraphe suivant), et on multiplie tous les coefficients par λ.

Définition (multiplication d'une matrice par un scalaire). *Soit $\lambda\in\mathbb{K}$. Soit $A=(a_{i,j})_{i,j}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la multiplication de A par λ, et on note $\lambda\cdot A$ ou simplement λA, la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i,j) est $\lambda a_{i,j}$ pour tout $(i,j)\in [\![1\,;n]\!]\times[\![1\,;p]\!]$. Autrement dit $\lambda A=(\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.*

Exemples :

- *Dans $\mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$, on a*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -2 \\ -2 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Notons l'addition de deux matrices est encore notée $+$ même s'il s'agit d'une opération différente que celle sur $\mathbb{K}$.

- *Dans $\mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$,*

$$\begin{aligned} 2\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 0.5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 10 \\ -4 & 1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 & -8 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Les propriétés 5 à 8 reliant les lois $+$ et $\cdot$ ci-dessus nous permettront d'affirmer au chapitre 28 que $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Proposition. *Soient A, B et C dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soient $(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2$. On a :*

1. *$A+B=B+A$,*
2. *$A+(B+C)=(A+B)+C$,*
3. *$A+0_{n,p}=0_{n,p}+A=A$,*
4. *$A+(-A)=(-A)+A=0_{n,p}$,*
5. *$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$,*
6. *$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$,*
7. *$\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$,*
8. *$1\cdot A=A$.*

⇝ Démonstration laissée en exercice.

Corollaire. $(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +)$ *est un groupe abélien. L'élément neutre est la matrice nulle* $0_{n,p}$ *et, pour tout* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, le symétrique de* A *est* $-A$*.*

Démonstration. Découle directement de la proposition précédente : la somme est une loi interne, commutative, associative, $0_{n,p}$ est bien un élément neutre et, pour tout $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ le symétrique de A est bien $-A$. □

En d'autres termes, les matrices scalaires sont les matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix},$$

avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Définition (matrice scalaire). *Pour tout* $\lambda \in \mathbb{K}$*, la matrice* $\lambda \mathrm{I}_n$ *est appelée matrice scalaire ou homothétie.*

Définition. *Soit* $r \in \mathbb{N}^*$*. Soit* $(M_1, \dots, M_r) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})^r$*. On dit qu'une matrice* M *est combinaison linéaire de* $M_1, \dots, M_r$ *s'il existe* $(\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \mathbb{K}^r$ *tel que*

$$M = \sum_{k=1}^{r} \lambda_k M_k.$$

Exemple : *Si* $A \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$*, alors* A *est combinaison linéaire des matrices élémentaires. En effet :*

On peut généraliser ce résultat :

Dans le chapitre 28, on dira que les matrices élémentaires forment une base de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Proposition. *Pour tout* $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$*, on a :*

$$A = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} a_{i,j} E_{i,j}.$$

Démonstration.

□

2) Produit de matrices

a) Définition

Le produit de deux matrices n'est pas le produit terme à terme. Cette définition peut sembler tirée par les cheveux au premier abord. Nous verrons pourquoi il en est ainsi dans le paragraphe IV.

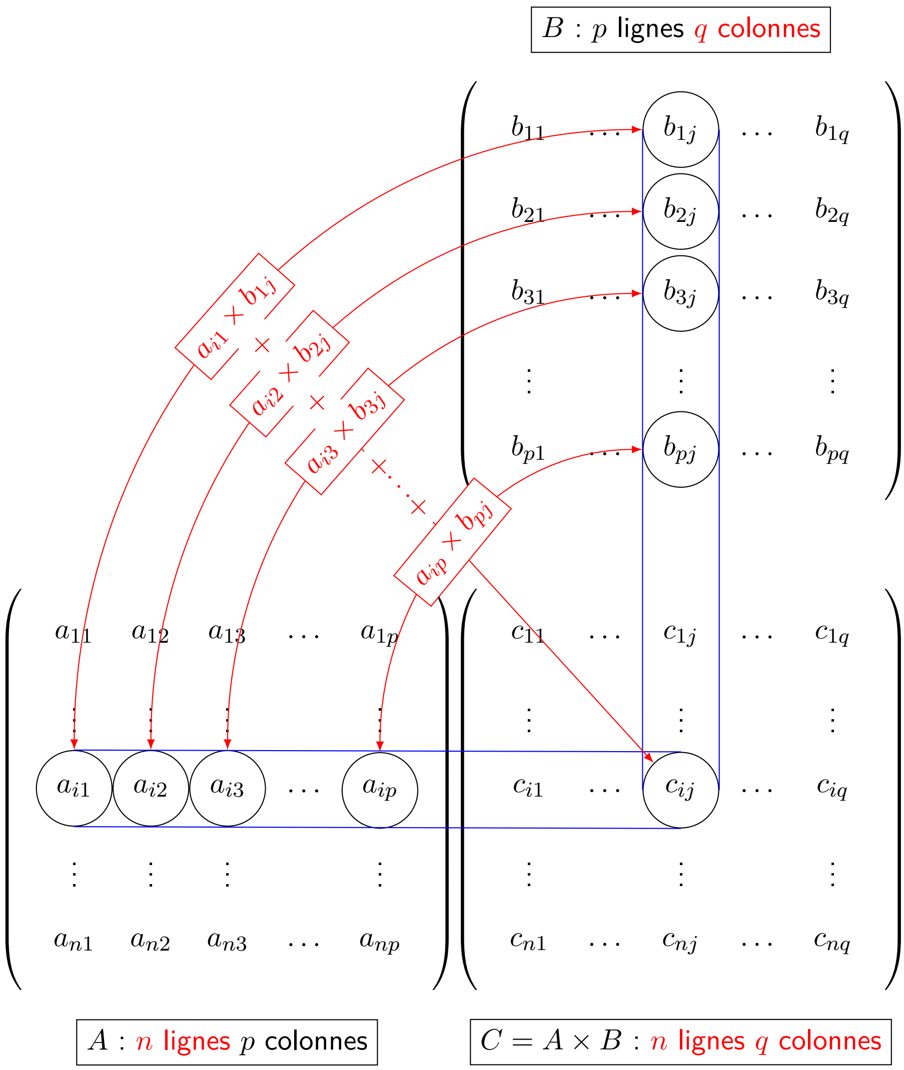
Le produit de deux matrices carrées de même taille est toujours défini.

Définition. *Soient* $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B = (b_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$*. On appelle produit des matrices* A *et* B *la matrice notée* AB *ou* $A \times B$ *appartenant à* $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ *dont le coefficient d'indice* $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;q]\!]$ *est*

$$\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}.$$

⚠ On multiplie une matrice de taille $n \times p$ par une matrice de taille $p \times q$ et on obtient une matrice de taille $n \times q$. Le produit AB n'est donc défini que lorsque le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B. En particulier, AB peut être définie sans que BA le soit.

On peut présenter le produit matriciel de $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ sous la forme ci-dessouss (qui prend de la place mais facilite les calculs de chaque coefficient de AB), parfois appelée « produit en papillon ».



Exemple : *Soient* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & -3 \\ -2 & -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 \\ 2 & 6 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Premières propriétés du produit matriciel

On généralise aisément les propriétés ci-contre à un nombre quelconque de matrices (de taille convenable).

Proposition (associativité). *Quand il est défini, le produit de matrices est associatif, c'est-à-dire, pour toutes matrices $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$.*

Démonstration.

$\square$

Nous verrons au paragraphe III.1 que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau : il est donc non commutatif et non intègre. Ci-contre, A et B sont deux exemples de diviseurs de 0.

Le produit de matrices n'est pas commutatif ! Dans un premier temps, pour qu'il ait un sens dans les deux cas, il faut que les deux matrices soient carrées. Et même si c'est le cas, il n'y a aucune raison qu'il soit commutatif.

Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En particulier, on voit qu'on peut avoir $AB = 0$ avec $A \neq 0$ et $B \neq 0$! Il est donc faux de dire : « On a $AB = 0$. Or un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins des facteurs est nul donc $A = 0$ ou $B = 0$ ». Si $AB = 0$, on ne peut rien dire !

Au chapitre 34, on pourra tout de même dire que $\mathrm{Im}(B) \subset \mathrm{Ker}(A)$.

Définition. *On dit que deux matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commutent si $AB = BA$.*

On généralise aisément les propriétés ci-contre à une combinaison linéaire quelconque (de taille convenable).

Proposition (bilinéarité). *Quand il est défini, le produit de matrices est bilinéaire, c'est-à-dire que, pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $\widetilde{B} \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}$,*

- $A \times (\lambda B + \mu \widetilde{B}) = \lambda AB + \mu A\widetilde{B}$,
- $(\lambda B + \mu \widetilde{B}) \times C = \lambda BC + \mu \widetilde{B}C$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

c) Produit par une matrice scalaire

On a même encore

$$0_{q,n} \times A = 0_{q,p}$$

et

$$A \times 0_{p,q} = 0_{n,q}.$$

Proposition (produit par une matrice scalaire). *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $(\lambda \mathrm{I}_n) \times A = A \times (\lambda \mathrm{I}_p) = \lambda A$. En particulier :*

$$0_n \times A = A \times 0_p = 0_{n,p} \qquad \text{et} \qquad \mathrm{I}_n \times A = A \times \mathrm{I}_p = A.$$

Démonstration. Déjà $(\lambda \mathrm{I}_n) \times A$ et $A \times (\lambda \mathrm{I}_p)$ sont bien des matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!] \times [\![1\,;p]\!]$. On a

Dans cette somme, seule le terme d'indice $k = i$ est potentiellement non nul.

$$((\lambda \mathrm{I}_n) \times A)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} (\lambda \mathrm{I}_n)_{i,k} A_{k,j} = (\lambda \mathrm{I}_n)_{i,i} A_{i,j} = \lambda A_{i,j}$$

et

$$(A \times (\lambda \mathrm{I}_p))_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} (\lambda \mathrm{I}_n)_{k,j} = A_{i,j} (\lambda \mathrm{I}_n)_{j,j} = \lambda A_{i,j}.$$

Ainsi $(\lambda \mathrm{I}_n) \times A = A \times (\lambda \mathrm{I}_p) = \lambda A$. Les cas particuliers s'obtiennent en prenant $\lambda = 0$ puis $\lambda = 1$. $\square$

Remarque : En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \mathrm{I}_n$ commute avec toute matrice carrée de taille n. On montrera dans l'exercice 28 que la réciproque est vraie : si une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ commute avec toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors M est une matrice scalaire.

d) Produit de deux matrices élémentaires

Le symbole de Kronecker permet de donner des résultats plus synthétiques et de ne pas s'embarrasser avec des études de cas.

Définition. *Pour tout $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$, on définit le symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$ par :*

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad i \neq j \\ 1 & \text{si} \quad i = j \end{cases}$$

Exemple : *Nous avons vu au chapitre 10 que :*

$$\forall (n,k) \in \mathbb{Z}^2, \qquad \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-k)t} \mathrm{d}t = \delta_{n,k} \times 2\pi.$$

Le résultat ci-contre est toujours valable pour des matrices élémentaires rectangulaires (quand le produit est bien défini). Plus précisément : soient $i \in [\![1\,;n]\!]$, $(j,k) \in [\![1\,;p]\!]$ et $\ell \in [\![1\,;q]\!]$. Notons respectivement :

- $E_{i,j}$ la matrice élémentaire d'indice (i,j) de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- $E_{k,\ell}$ la matrice élémentaire d'indice (k,ℓ) de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
- $E_{i,\ell}$ la matrice élémentaire d'indice (i,ℓ) de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.

Alors on a encore : $E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,l}$. Il suffit donc de retenir le résultat pour les matrices carrées et de se souvenir qu'il est encore valable pour les matrices rectangulaires, quand tout est bien défini.

Proposition. *Plaçons-nous dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(i,j,k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^4$. Alors :*

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,l}$$

Démonstration.

□

Cette remarque sera très utile pour exprimer les opérations élémentaires sur les colonnes et les lignes à l'aide de matrices élémentaires dans le paragraphe IV.3.

Remarque : Si $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si $(k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$, alors :

e) Produit par une matrice colonne

Autrement dit, si on note U_j le vecteur colonne de taille p dont tous les coefficients sont nuls sauf celui de la ligne j qui vaut 1, alors le vecteur colonne AU_j (de taille n) est la $j^{\text{ième}}$ colonne de A.

Lemme. *Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $j \in [\![1\,;p]\!]$. Alors*

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \times \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ {\color{red}j} \\ \\ \\ \end{array} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$$

Démonstration. Cela se voit bien en faisant le produit avec les mains. Montrons-le rigoureusement.

$\square$

Exemple : *Soient A et B deux éléments de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que, pour tout vecteur colonne X, $AX = BX$. Montrons que $A = B$.*

Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, en notant U_j le vecteur colonne de taille n dont toutes les coordonnées sont nulles sauf celle en position j qui vaut 1, alors $AU_j = BU_j$, si bien que A et B ont même j-ème colonne. L'indice j étant quelconque, les colonnes de A et B sont les mêmes donc $A = B$.

Proposition. *Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_p \end{pmatrix}^T \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors AX est un vecteur colonne (de taille n) combinaison linéaire des colonnes de A. Plus précisément, si on note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A :*

$$AX = \sum_{k=1}^{p} x_k C_k.$$

Autrement dit

$$AX = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,p} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{1k} x_k \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{2,k} x_k \\ \vdots \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{n,k} x_k \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}).$$

Démonstration. En reprenant les notations $U_1, \dots, U_p$ de la proposition précédente,

□

Une autre conséquence du lemme est la suivante :

Corollaire. *Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ Notons $C_1, \dots, C_q$ les colonnes de B. Alors, pour tout $k \in [\![1, q]\!]$, la $k^{\text{ième}}$ colonne de AB est égale à AC_k.*

⇝ Démonstration laissée en exercice.

3) Transposition

En clair, A^T est obtenue à partir de A à l'aide d'une symétrie par rapport à la diagonale (ou en échangeant les lignes et les colonnes).

Définition. *Soient $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On définit la transposée de A, et on note A^T, la matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice $(i,j) \in [\![1\,;p]\!] \times [\![1\,;n]\!]$ est $a_{j,i}$.*

Exemple : *Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$, alors $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{K})$.*

Remarques :

- La transposée d'une matrice colonne est une matrice ligne et vice versa. Aussi, lorsque $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est une matrice colonne, on l'écrira souvent $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^T$ pour gagner de la place.
- Le produit $X^T X$ est une matrice de taille 1×1. Son unique coefficient est le scalaire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k^2$. On identifiera souvent d'ailleurs $X^T X$ avec le scalaire en question.

Cela permettra de définir la norme associée à un produit scalaire sur $\mathbb{K}^n$ dans le chapitre 38

⚠ A ne pas confondre avec XX^T qui est la matrice carrée de taille n

$$\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & \dots & x_1x_n \\ x_2x_1 & x_2^2 & \dots & x_2x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \dots & x_n^2 \end{pmatrix}$$

dont le coefficient d'indice (i,j) est x_ix_j pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$.

Si $n = p$, la transposition a pour réciproque elle-même : c'est une involution. ⚠ Ce n'est pas le cas si $n \neq p$.

Proposition. *Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors $(A^T)^T = A$. En particulier, la transposition est une bijection de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.*

⇝ Démonstration laissée en exercice.

Ainsi, quand on transpose, on inverse l'ordre des matrices. Moyen mnémotechnique : $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ donc $A^T \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ donc $B^T = \mathcal{M}_{q,p}(\mathbb{K})$, si bien que B^TA^T est défini mais pas A^TB^T.

Proposition. *Pour tous $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, alors $(AB)^T = B^TA^T$.*

Démonstration.

□

On généralise aisément par récurrence à un nombre quelconque de matrices.

Proposition (linéarité de la transposition). *Soient* $(A, B) \in (\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}))^2$ *et* $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. *Alors* $(\lambda A + \mu B)^T = \lambda A^T + \mu B^T$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

III Anneau des matrices carrées de taille n

Le produit de deux matrices carrées de même taille n est toujours défini et est encore une matrice carrée de taille n. Cela fait du produit une loi de composition interne sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Ce constat justifie à lui seul ce paragraphe.

1) Structure d'anneau

Mais ce n'est pas un corps puisqu'il n'est pas commutatif.

Théorème. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est un anneau.*

Démonstration. On a vu dans le paragraphe II.1 que $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien. On a vu dans le paragraphe II.2.b que la LCI $\times$ est associative et distributive (il s'agit de la propriété de bilinéarité en prenant $\lambda = \mu = 1$) par rapport à $+$. Enfin elle admet un élément neutre qui est la matrice I_n. $\square$

C'est un anneau non commutatif et non intègre dès que $n \geqslant 2$ (mais si $n = 1$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ a un intérêt limité) et donc ce n'est pas un corps.

Par exemple, on a déjà vu que

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui est un contre exemple à la commutativité et à l'intégrité lorsque $n = 2$. *Pour* $n \geqslant 3$ *quelconque, il suffit de penser aux matrices élémentaires* $E_{1,2}$ *et* $E_{2,3}$ *où (cf. paragraphe II.2.d)* $E_{1,2}E_{2,3} = E_{1,3}$ *mais* $E_{2,3}E_{1,2} = O_n$.

2) Puissances entières de matrices

Puisqu'il s'agit d'un anneau, on peut définir la notion de puissance entière de matrices :

Définition. *Pour tous* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $k \in \mathbb{N}^*$, *on pose* $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

On convient que $A^0 = \mathrm{I}_n$.

Remarques :

- Si A n'est pas carrée, on ne peut pas calculer les puissances successives de A car le produit $A \times A$ n'est pas défini.
- Si $\lambda \in \mathbb{K}$, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $(\lambda \mathrm{I}_n)^p = \lambda^p \mathrm{I}_n$.
- Une puissance de A non nulle peut être une matrice nulle.

  Par exemple, si $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, *alors* $A^2 = 0$ *mais* $A \neq 0$.

On parle de matrice nilpotente. On en reparlera dans le paragraphe III.5

Exemple : *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Calculons les puissances successives de la matrice* J_n, *la matrice carrée de taille* n *dont tous les coefficients sont égaux à* 1.

Attention, cette relation n'est pas valable pour $k = 0$ car $J_n^0 = \mathrm{I}_n$.

Les résultats suivants découlent tous du chapitre 17 que :

Proposition. *Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $(k, \ell) \in \mathbb{N}^2$. Alors*

- $A^k \times A^\ell = A^\ell \times A^k = A^{k+\ell}$,
- $(A^k)^\ell = (A^\ell)^k = A^{k\ell}$,
- *Si A et B commutent, alors :*
  - ⋆ A^k *et* B^ℓ *commutent,*
  - ⋆ $(AB)^k = A^k B^k$,

Théorème. *Soient $p \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**. Alors :*

$$A^p - B^p = (A - B) \times \left(\sum_{k=0}^{p-1} A^k B^{p-1-k} \right).$$

Remarque : En particulier, pour tous $p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, puisque I_n commute avec A, on a :

$$\mathrm{I}_n - A^p = (\mathrm{I}_n - A) \times \sum_{k=0}^{p-1} A^k.$$

Théorème (Formule du binôme de Newton). *Soient $p \in \mathbb{N}^*$. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui **commutent**. Alors :*

$$(A + B)^p = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k} = \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^{p-k} B^k.$$

Exemples :

Rappelons que I_3 commute avec toute matrice de taille 3.

- *Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculons A^p lorsque* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Méthode classique dans l'exemple suivant : écrire A_n comme somme de deux matrices qui commutent. Puisque les matrices du type $\lambda \mathrm{I}_n$ commutent avec toute matrice carrée de taille n, on cherche à écrire A_n sous la forme $\lambda \mathrm{I}_n + B_n$ avec B_n une matrice dont les puissances sont faciles à calculer.

- *Soit $n \in \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$. Considérons la matrice* $A_n = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 3 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 3 & & 1 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

3) Matrices carrées particulières

a) Matrices diagonales

Attention, cela ne signifie pas que les coefficients diagonaux de D sont non nuls ! Par exemple, la matrice D ci-contre est diagonale alors qu'elle a un coefficient diagonal nul. Plus fort : la matrice nulle est diagonale !

Définition. *Soit $D = (d_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que D est diagonale si tous les coefficients non diagonaux de D sont nuls, c'est-à-dire si $d_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.*
On note $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées diagonales.

Exemples :

- *Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda \mathrm{I}_n$ est diagonale.*
- *La matrice $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbb{K})$ est diagonale.*

... non officiellement au programme.

Remarque : Pour tout $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on rencontre parfois la notation

$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Par exemple $\mathrm{I}_n = \mathrm{Diag}((1)_{1 \leqslant i \leqslant n})$.

Proposition. *$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est stable par somme et stable par multiplication par un élément de $\mathbb{K}$. En particulier $(\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), +)$ est un groupe abélien.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Proposition. *Soient $A = (a_{i,j})_{i,j}$ et $B = (b_{i,j})_{i,j}$ deux matrices de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$. Alors $AB \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et les coefficients diagonaux de AB s'obtiennent par multiplication terme à terme :*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_nb_n \end{pmatrix}.$$

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

En particulier, deux matrices diagonales (carrées de même taille) commutent.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Par récurrence, on obtient :

Corollaire. *Soient $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et $p \in \mathbb{N}$. Alors $A^p \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ et*

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{pmatrix}^p = \begin{pmatrix} a_1^p & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_n^p \end{pmatrix}.$$

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ est commutatif, contrairement à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. En revanche, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ n'est toujours pas intègre (il suffit de multiplier le matrices élémentaires $E_{1,1}$ et $E_{2,2}$).

Proposition. *$(\mathcal{D}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau commutatif.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

b) Matrices triangulaires

Définition. *Soit $T = (t_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que T est triangulaire supérieure (respectivement inférieure) si $t_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i > j$ (respectivement $i < j$).*

On note $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices carrées triangulaires supérieures (respectivement inférieures).

En d'autres termes, T est triangulaire supérieure si tous les coefficients en dessous (au sens strict) de la diagonale sont nuls. Attention, cela ne signifie pas que les autres sont non nuls !

Exemples : *La matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ est triangulaire supérieure, et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ est triangulaire inférieure.*

Proposition. *$\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ sont stables par somme et stables par multiplication par un élément de $\mathbb{K}$. En particulier $(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}), +)$ et $(\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}), +)$ sont des groupes abéliens.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

Contrairement aux matrices diagonales, deux matrices triangulaires ne commutent pas forcément. Par exemple, les deux matrices triangulaires ci-contre ne commutent pas.

Proposition. *Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaires supérieures (respectivement inférieures). Alors AB est triangulaire supérieure (respectivement inférieure), et les coefficients diagonaux s'obtiennent par multiplication terme à terme.*

Démonstration.

$\square$

Les termes non diagonaux ne s'obtiennent pas par multiplication terme à terme ! Par exemple, dans le produit ci-dessous, on a écrit à droite les coefficients pouvant être obtenus « gratuitement » :

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & \pi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & * & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 3\pi \end{pmatrix}.$$

On multiplie en effet deux matrices triangulaires supérieures donc le produit est triangulaire supérieur, d'où les zéros sous la diagonale. De plus, les coefficients diagonaux sont obtenus par multiplication terme à terme. Cependant, les coefficients au-dessus de la diagonale (représentés par des étoiles ci-dessus) ne peuvent pas être obtenus aussi rapidement, il n'y a pas de raccourci, il faut les calculer à la main.

Le produit d'une matrice triangulaire supérieure et d'une matrice triangulaire inférieure n'est pas forcément triangulaire. Par exemple,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 13 \end{pmatrix}.$$

Proposition. *$(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K}), +, \times)$ et $(\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K}), +, \times)$ sont des anneaux non commutatifs.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

c) Matrices symétriques et antisymétriques

Définition. *Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A est*

- *symétrique si $A^T = A$, i.e. si $a_{j,i} = a_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$.*
- *antisymétrique si $A^T = -A$, i.e. si $a_{j,i} = -a_{i,j}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$.*

On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices carrées d'ordre n qui sont symétriques (respectivement antisymétriques).

On ne parle de matrices (anti)symétriques que pour des matrices carrées. En effet, si A n'est pas carrée, alors A et A^T n'ont pas la même taille donc ne peuvent être ni égales ni opposées.

Proposition. *Les coefficients diagonaux d'une matrice antisymétrique sont nuls.*

Démonstration. Soit $A = (a_{i,j})_{i,j} \in A_n(\mathbb{K})$. Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, en prenant $j = i$, on obtient $a_{i,i} = -a_{i,i}$ donc $a_{i,i} = 0$. $\square$

Remarques :

- Si A est symétrique, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, en prenant $j = i$, il vient $a_{i,i} = a_{i,i}$: en d'autres termes, on n'a aucune condition sur les coefficients diagonaux, ceux-ci sont quelconques. En revanche la condition $a_{i,j} = a_{j,i}$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ signifie que A est symétrique par rapport à la diagonale (d'où le nom de matrice symétrique).

  Par exemple, la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 7 & -1 & 7 \\ 3 & -1 & -4 & \sqrt{2} \\ -2 & 7 & \sqrt{2} & 5 \end{pmatrix}$$

  est symétrique : les coefficients diagonaux sont absolument quelconques, et ceux au-dessus de la diagonale sont égaux à ceux en dessous.

- Si A est antisymétrique, on vient de montrer que les coefficients diagonaux sont non nuls. Pour le reste, la condition $a_{i,j} = -a_{j,i}$ signifie que les coefficients au-dessus de la diagonaux sont opposés à ceux qui sont en dessous.

  Par exemple, la matrice ci-dessous est antisymétrique :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -3 \\ 6 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- On a $\mathcal{D}_n(\mathbb{K}) \subset \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \cap \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{0_n\}$.

Ce résultat est analogue à celui démontré au chapitre 2 : toute fonction est somme d'une unique fonction paire et d'une unique fonction impaire.

Exemple : *Montrons que, pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il existe $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ uniques telles que $M = S + A$.*

Mais $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas munis d'une structure d'anneau. En effet le produit de deux matrices symétrique n'est pas symétrique a priori. Par exemple le produit des matrices symétriques $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \notin \mathcal{S}_2(\mathbb{K})$. Le produit des matrices antisymétriques $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ est $\mathrm{I}_2 \notin \mathcal{A}_2(\mathbb{K})$

Proposition. *$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont stables par somme et stables par multiplication par un élément de $\mathbb{K}$. En particulier $(\mathcal{S}_n(\mathbb{K}), +)$ et $(\mathcal{A}_n(\mathbb{K}), +)$ sont des groupes abéliens.*

Démonstration. Soient S_1, S_2 dans $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et A_1, A_2 dans $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$,

$$(S_1 + S_2)_{i,j} = (S_1)_{i,j} + (S_2)_{i,j} = (S_1)_{j,i} + (S_2)_{j,i} = (S_1 + S_2)_{j,i},$$

$$(A_1 + A_2)_{i,j} = (A_1)_{i,j} + (A_2)_{i,j} = -(A_1)_{j,i} - (A_2)_{j,i} = -(A_1 + A_2)_{j,i}$$

$$(\lambda S_2)_{i,j} = \lambda (S_2)_{i,j} = \lambda (S_2)_{j,i} = (\lambda S_2)_{j,i}$$

et

$$(\lambda A_2)_{i,j} = \lambda (A_2)_{i,j} = -\lambda (A_2)_{j,i} = -(\lambda A_2)_{j,i}$$

donc $S_1 + S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, $A_1 + A_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, $\lambda S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda A_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. En prenant $\lambda = -1$, il vient que $-S_2 = (-1)S_2 \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $-A_2 = (-1)A_2 \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$. Ainsi $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-groupes (pour l'addition) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont des groupes. □

4) Matrices inversibles

a) Résultats généraux

Une matrice inversible est donc carrée par définition. Cela n'a aucun sens de parler d'inversibilité pour une matrice non carrée.

Définition. *Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que :*

- *B est un inverse à gauche de A si $BA = \mathrm{I}_n$.*
- *B est un inverse à droite de A si $AB = \mathrm{I}_n$.*
- *B est un inverse de A si B est un inverse à gauche **et** à droite de A, c'est-à-diresi $BA = AB = \mathrm{I}_n$.*

Si A admet un inverse, on dit que A est inversible.

Remarque : En d'autres termes, une matrice inversible est un élément inversible de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ pour le produit. Cependant, dans l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, nous avons le résultat bien pratique suivant :

Théorème (admis provisoirement). *Soient A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si B est un inverse à gauche **ou** à droite de A, alors B est un inverse de A.*

Autrement dit $AB = \mathrm{I}_n$ si et seulement si $BA = \mathrm{I}_n$.

⚠ Ce résultat semble miraculeux puisque l'anneau n'est pas commutatif ! Nous le montrerons dans le chapitre 34.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A admet un inverse, celui-ci est unique. On le note A^{-1}.*

On utilise sans le dire l'associativité du produit.

Démonstration. Supposons A inversible. Soient B et C deux inverses de A. Alors, en particulier, $AB = AC = \mathrm{I}_n$. En multipliant par B à gauche, il vient : $BAB = BAC = B$. Or, $BA = \mathrm{I}_n$ donc $\mathrm{I}_n B = \mathrm{I}_n C$ c'est-à-dire que $B = C$. □

Remarque : Ainsi, si on arrive à une égalité du type $A \times B = \mathrm{I}_n$ **ou** $B \times A = \mathrm{I}_n$, alors on peut dire directement que A est inversible et que $B = A^{-1}$.

Définition (groupe linéaire). *L'ensemble des matrices inversibles de taille n est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Il s'agit d'un groupe appelé groupe linéaire d'ordre n.*

Il s'agit bien d'un groupe puisqu'il s'agit de l'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (cf. chapitre 17). On le redémontrera dans le prochain paragraphe.

Exemples :

- $\mathrm{I}_n \times \mathrm{I}_n = \mathrm{I}_n$ *donc* I_n *est inversible et* $\mathrm{I}_n^{-1} = \mathrm{I}_n$.
- *De même, si $\lambda \neq 0$, alors $\lambda \mathrm{I}_n$ est inversible, et $(\lambda \mathrm{I}_n)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}\mathrm{I}_n$.*
- *La matrice nulle n'est pas inversible. En effet, dans un anneau non réduit à un singleton, l'élément neutre pour l'addition n'est jamais inversible pour la multiplication (cf. chapitre 17).*
- *Lorsque $n \geqslant 2$, les matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ne sont pas inversibles. En effet, soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ et supposons que $E_{i,j}$ est inversible. Il existe alors $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $E_{i,j}B = \mathrm{I}_n$. Soit $k \in [\![1\,;n]\!] \backslash \{i\}$. Alors $E_{j,k}E_{i,j}B = E_{j,k}\mathrm{I}_n$ et donc $0_n = E_{j,k}$, ce qui est absurde.*

Il existe donc des éléments non nuls qui ne sont pas inversible : on retrouve le fait que $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un corps (en dehors du fait qu'il n'est pas commutatif).

b) Premières propriétés

⚠ On change l'ordre quand on inverse un produit !

Proposition. *Soient A et B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Soit $\lambda \in \mathbb{K}^*$. Alors*

1. *A^{-1} est inversible et $(A^{-1})^{-1} = A$.*
2. *AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*
3. *Si $k \in \mathbb{N}$, alors A^k est inversible et $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$.*
4. *λA est inversible et $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$.*
5. *A^T est inversible et $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.*

Les propriétés 1 à 3 ont déjà été prouvées dans le chapitre 17.

Démonstration.

1. On a $AA^{-1} = A^{-1}A = \mathrm{I}_n$ donc, par définition, A est bien l'inverse de A^{-1}.
2. On a $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = A\mathrm{I}_nA^{-1} = AA^{-1} = \mathrm{I}_n$ et $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}\mathrm{I}_nB = B^{-1}B = \mathrm{I}_n$ si bien que AB est inversible d'inverse $B^{-1}A^{-1}$.
3. Ce dernier point ce montre par récurrence sur k à partir du point précédent.
4. De même que précédemment, il suffit de voir que le produit des deux matrices λA et $\dfrac{1}{\lambda}A^{-1}$ est égal à I_n.

On utilise l'associativité du produit sans le dire.

5. On a $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = \mathrm{I}_n^T = \mathrm{I}_n$ si bien que A^T est inversible d'inverse $(A^{-1})^T$.

Ce n'est pas un groupe abélien !

Remarques :

- Avec les propriétés 1 et 2, on retrouve le fait que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un groupe pour $\times$ dont l'élément neutre est I_n.

  Ce n'est pas un groupe pour l'addition.

  Par exemple $\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $-\mathrm{I}_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *mais* $\mathrm{I}_n + (-\mathrm{I}_n) = 0_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$

- Les matrices inversibles sont celles par lesquelles on peut « simplifier ». Attention, il faut le faire proprement (cf. chapitre 17), c'est-à-dire multiplier par l'inverse à gauche ou à droite le cas échéant. On ne peut pas « barrer sauvagement » !

  Par exemple, si A est inversible et si on a $AB = AC$ alors, en multipliant par A^{-1} à gauche, on obtient $A^{-1}AB = A^{-1}AC$ donc $B = C$.

Mais, si on a $AB = CA$ alors on ne peut rien affirmer ! On peut en effet avoir $AB = CA$ avec $B \neq C$, même si A est inversible !

- L'an prochain (et aussi dès cette année de façon guidée), vous verrez des méthodes pour écrire certaines matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sous la forme $A = PDP^{-1}$ avec $P \in GL_n(\mathbb{K})$ et $D \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ (on parle de diagonalisation). Cette écriture est très pratique à plus d'un titre, notamment pour calculer des puissances. En effet, on a alors :

c) Le cas particulier des matrices 2×2

La quantité $ad - bc$ est appelée le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On peut aussi définir une notion de déterminant pour une matrice carré quelconque mais le calcul est beaucoup plus compliqué. Nous y consacrerons le chapitre 36 tout entier.

Théorème. *Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration.

□

Exemple : *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

d) Utilisation d'un polynômes annulateur

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme en la matrice A toute matrice qui s'écrit comme combinaison linéaire de puissances de A. Supposons que l'on dispose d'un polynôme

$$P = a_p X^p + a_{p-1} X^{p-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

Ne pas oublier de changer le a_0 en $a_0 A^0 = a_0 \mathrm{I}_n$!

à coefficients dans $\mathbb{K}$. Alors

$$P(A) = a_p A^p + a_{p-1} A^{p-1} + \cdots + a_1 A + a_0 \mathrm{I}_n$$

est un polynôme en A. On dit qu'il est annulateur de A si $P(A) = 0_n$. On obtient alors

$$a_p A^p + a_{p-1} A^{p-1} + \cdots + a_1 A = -a_0 \mathrm{I}_n$$

donc

$$A(a_p A^{p-1} + a_{p-1} A^{p-2} + \cdots + a_1 \mathrm{I}_n) = -a_0 \mathrm{I}_n$$

et donc, lorsque le coefficient constant a_0 est non nul,

$$A\left(-\frac{a_p}{a_0} A^{p-1} - \frac{a_{p-1}}{a_0} A^{p-2} + \cdots - \frac{a_1}{a_0} \mathrm{I}_n\right) = \mathrm{I}_n.$$

On ne peut rien conclure avec cette méthode lorsque $a_0 = 0$.

On en déduit que A est inversible et que

$$A^{-1} = -\frac{a_p}{a_0} A^{p-1} - \frac{a_{p-1}}{a_0} A^{p-2} + \cdots - \frac{a_1}{a_0} \mathrm{I}_n.$$

On peut bien sûr raisonner en terme de somme :

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0} \sum_{k=1}^{p} a_k A^{k-1}.$$

La notion de polynôme annulateur sera étudiée officiellement et plus largement dans en deuxième année. Vous verrez notamment comment en trouver un pour une matrice donnée. Tout ce qu'il faut retenir de ce paragraphe est cette méthode quand on dispose d'une telle relation polynomiale nulle sur la matrice A.

Exemple : *Considérons* $A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 5 & 1 & 3 \\ 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$. *On a* $(A+\mathrm{I}_3)(A-2\mathrm{I}_3)^2 = 0_3$. *En effet :*

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & -2 & -3 \\ 5 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}}_{A+\mathrm{I}_3} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{A-2\mathrm{I}_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} -15 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 25 & 10 & 15 \end{pmatrix}}_{(A+\mathrm{I}_3)(A-2\mathrm{I}_3)}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -15 & -6 & -9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 25 & 10 & 15 \end{pmatrix}}_{(A+\mathrm{I}_3)(A-2\mathrm{I}_3)} \times \underbrace{\begin{pmatrix} -5 & -2 & -3 \\ 5 & -1 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}}_{A-2\mathrm{I}_3} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{(A+\mathrm{I}_3)(A-2\mathrm{I}_3)^2}$$

Ainsi :

5) Matrices nilpotentes

Le programme impose de rencontrer des exemples de matrices nilpotentes mais ne dit pas d'en faire une étude générale. Celles-ci sont très classiques et très utiles. Faisons la quand même.

Définition. *On dit que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $N^p = 0_n$. Le plus petit entier p qui vérifie cette condition est appelé l'indice de nilpotence de N.*

Ce plus petit entier existe car l'ensemble

$$\{k \in \mathbb{N} \,|\, N^k = 0_n\}$$

est une partie non vide (car N nilpotente) de $\mathbb{N}$ donc admet un plus petit élément.

Exemples :

- *Pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $i \neq j$, la matrice élémentaire $E_{i,j} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente d'indice 2 (car non nulle et $E_{i,j}^2 = 0_n$).*
- *Les matrices*

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sont respectivement nilpotentes d'indices 3 et 4 (je vous laisse le vérifier).

Proposition. *Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice p. Alors, pour tout $k \geqslant p$, $N^k = 0_n$.*

DÉMONSTRATION. Soit $k \geqslant p$. Alors $N^k = N^p \times N^{k-p} = 0_n \times N^{k-p} = 0_n$. □

Proposition. *Soient $(N, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si N et M sont nilpotentes et* ***commutent****, alors $N \times M$ est nilpotente.*

DÉMONSTRATION.

□

⚠ C'est faux si les deux matrices ne commutent pas ! Un produit de deux matrices nilpotentes n'est pas forcément nilpotente ! Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes d'indice 2, mais leur produit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas car, par une récurrence immédiate, $P^k = P \neq 0$ pour tout $k \geqslant 1$.

Résultat classique mais HP : à savoir redémontrer !

Proposition. *Soient $(N, M) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si N et M sont nilpotentes et* ***commutent****, alors $N + M$ est nilpotente.*

Démonstration.

$\square$

L'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices nilpotentes (de taille n) n'est donc pas un groupe (pour la somme). Cependant, il est stable par multiplication par un scalaire : on dit par conséquent que c'est un cône et on parle du cône nilpotent.

⚠ C'est faux si les deux matrices ne commutent pas ! Une somme de deux matrices nilpotentes n'est pas forcément nilpotente ! Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sont nilpotentes d'indice 2, mais leur somme $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas. En effet, une récurrence immédiate prouve que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $S^{2k} = I_2$ et $S^{2k+1} = S$. En particulier, pour tout $p \in \mathbb{N}, S^p \neq 0$.

Proposition. *Une matrice nilpotente n'est pas inversible.*

Démonstration. Si N est inversible alors, pour tout $p \in \mathbb{N}$, N^p est inversible donc $N^p \neq 0$ (puisque la matrice nulle n'est pas inversible) et donc N n'est pas nilpotente. D'où le résultat par contraposée. $\square$

⚠ La réciproque est fausse ! Une matrice non inversible n'est pas forcément nilpotente ! Par exemple, la matrice élémentaire $E_{1,1}$ n'est pas inversible (car c'est un diviseur de zéro, cf. paragraphe II.2.d, mais aussi car c'est une matrice diagonale avec des coefficients diagonaux nuls, cf. paragraphe IV.4.c) mais n'est pas nilpotente. En effet (comme elle est diagonale), pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $E_{1,1}^p = E_{1,1}$. Cependant, on a tout de même le résultat suivant :

Le cas $p = 0$ est inutile : pour toute matrice M, on a $M^0 = \mathrm{I}_n$ donc n'est pas nulle !

Proposition. *Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente d'indice p. Alors $\mathrm{I}_n - N$ est inversible et :*

$$(\mathrm{I}_n - N)^{-1} = \sum_{k=0}^{p-1} N^k$$

Démonstration.

$\square$

Il y a encore beaucoup à dire sur les matrices nilpotentes. Nous en reparlerons dans les chapitres 30 et 34. Nous montrerons notamment les résultats suivant :

Proposition. *L'indice d'une matrice nilpotente de taille n (pas forcément triangulaire) est inférieur ou égal à n. Par conséquent, pour tout $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,*

- *si N est nilpotente, alors $N^n = 0$.*
- *si $N^n \neq 0$, alors M n'est pas nilpotente.*

C'est intuitif : les rangées de coefficients vont « monter d'un étage » à chaque fois jusqu'à disparaître. Cependant, attention, la réciproque est fausse ! Une matrice peut être nilpotente sans être triangulaire ! Par exemple, la matrice

$$N = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 & 1 \\ \mathrm{j}^2 & 1 & \mathrm{j} \end{pmatrix}$$

est nilpotente d'indice 2 (j est ici le complexe $e^{2i\pi/3}$).

Proposition.

- *Une matrice triangulaire supérieure stricte (i.e. avec une diagonale nulle) est nilpotente d'indice inférieur ou égal à n.*
- *Si $k \in [\![2\,;n]\!]$, alors la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$*

$$\begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ k-1 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

est nilpotente d'indice k.

IV Liens entre matrices et systèmes linéaires

Nous renvoyons au chapitre 8 pour les notions de systèmes linéaires, d'opérations élémentaires et pour la présentation de la méthode du pivot de Gauss pour les résoudre. Dans ce paragraphe, nous allons voir le lien entre les systèmes et les matrices et comment les propriétés de l'une se reportent sur les propriétés de l'autre, et vice versa.

1) Matrice associée à un système

Proposition/Définition (liens avec les matrices). *Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et*

$$(S) \quad \left\{ \begin{array}{c} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array} \right.$$

un système linéaire de n équations à p inconnues où, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, $a_{ij} \in \mathbb{K}$ et $b_i \in \mathbb{K}$. Posons

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

La matrice A est appelée la matrice associée au système (S). Nous avons alors :

- *$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ est solution du système (S) si et seulement si $AX = B$.*
- *$(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ est solution du système homogène (S_0) si et seulement si $AX = 0$ (où 0 désigne ici $0_{n,1}$, la matrice à n lignes et 1 colonne dont tous les coefficients sont nuls).*

On a $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, $X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. Par abus, on dira parfois que $B \in \mathbb{K}^n$ et $X \in \mathbb{K}^p$. On confondra aussi le système avec l'équation $AX = B$ et une solution du système avec le vecteur X.

Exemple : *Le système*

$$\begin{cases} \quad\quad y - z + t = 1 \\ 3x + 2y + z - 9t = 1 \\ x + y \quad\quad - 3t = -2 \\ x + y - z \quad\quad = 2 \end{cases}$$

se réécrit $\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & -9 \\ 1 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix}}_{X} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}}_{B}.$

2) Ensemble des solutions

Proposition. *Un système linéaire $AX = B$ est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A.*

DÉMONSTRATION. Si le système est compatible et si X est une solution, alors $B = AX$ donc B est combinaison linéaire des colonnes de A d'après le paragraphe II.2.e. La réciproque est évidente en prenant X le vecteur colonne formé des coefficients de la combinaison linéaire. □

On dit que l'ensemble des solutions est un espace affine (cf. chapitre 37).

Proposition. *Les solutions d'un système compatible $AX = B$ sont les $X_0 + Y$, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.*

DÉMONSTRATION. Soit X_0 une solution particulière (qui existe car le système est compatible). Soit $X \in M_{p,1}(\mathbb{K})$. Alors :

Car X_0 est solution.

$$\begin{aligned} X \text{ est solution} &\iff AX = B \\ &\iff AX = AX_0 \\ &\iff A(X - X_0) = 0 \\ &\iff X - X_0 \text{ est solution du système homogène associé } (S_0) \\ &\iff X \text{ est la somme de } X_0 \text{ et d'une solution de } (S_0) \end{aligned}$$

□

Remarque : C'est donc un résultat similaire à celui des équations différentielles : « solution générale du système complet = solution particulière + solution générale du système homogène ».

3) Opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes

Ce sont évidemment les mêmes que pour les systèmes.

Définition. *Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $L_1, L_2, \dots, L_n$ les n lignes de M. On appelle opération élémentaire sur les lignes de M l'une des trois opérations suivantes :*

- *L'échange des lignes i et j, avec $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]$ tels que $i \neq j$. On la note $L_i \leftrightarrow L_j$.*
- *La multiplication de la ligne $i \in [\![1\,;n]\!]$ par un scalaire λ **non nul**. On la note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.*
- *L'ajout à la ligne $i \in [\![1\,;n]\!]$ de la ligne $j \in [\![1\,;n]\!] \backslash \{i\}$ multipliée par un scalaire α. On la note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.*

On peut évidemment définir de la même façon les opérations élémentaires sur les colonnes.

Définition. *Soit $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Notons $C_1, C_2, \dots, C_p$ les p colonnes de M. On appelle opération élémentaire sur les colonnes de M l'une des trois opérations suivantes :*

- *L'échange des colonnes i et j, avec $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]$ tels que $i \neq j$. On la note $C_i \leftrightarrow C_j$.*
- *La multiplication de la colonne $i \in [\![1\,;n]\!]$ par un scalaire λ **non nul**. On la note $C_i \leftarrow \lambda C_i$.*
- *L'ajout à la colonne $i \in [\![1\,;n]\!]$ de la colonne $j \in [\![1\,;n]\!]\backslash\{i\}$ multipliée par un scalaire α. On la note $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$.*

Dans cette définition, on se place sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, mais on peut bien sûr définir des matrices de transvection, dilatation, permutation de taille quelconque (mais carrées).

Définition. *Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.*

- *On dit que*

$$\mathrm{I}_n + \alpha E_{i,j} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & \alpha & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad & & & & & & & j & & & \end{matrix} & \end{array}$$

  est une matrice de transvection.
- *On dit que*

$$\mathrm{I}_n - E_{i,i} + \lambda E_{i,i} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad & & & & i & & & & & & \end{matrix} & \end{array}$$

  est une matrice de dilatation.
- *On dit que*

$$\mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i} = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} \\ \begin{matrix} \quad & & & & i & & & j & & & \end{matrix} & \end{array}$$

  est une matrice de permutation.

Moyen mnemotechnique pour ne pas confondre avec les opérations sur les colonnes : L pour lignes/left.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Soient $\alpha \in K$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Effectuer une opération élémentaire sur les lignes de A se traduit matriciellement par :*

- *multiplier A à gauche par la matrice de transvection ci-dessus revient à effectuer sur A l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.*
- *multiplier A à gauche par la matrice de dilatation ci-dessus revient à effectuer sur A l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.*
- *multiplier A à gauche par la matrice de permutation ci-dessus revient à effectuer sur A l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$.*

Démonstration. En remarque dans le paragraphe II.2.d, on a vu que, pour tout $(k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $E_{k,\ell}A$ est la matrice carré dont seule la $k^{\text{ième}}$ ligne est éventuellement non nulle, celle-ci contenant $\ell^{\text{ième}}$ ligne de A. Ainsi :

- $\alpha E_{i,j}A$ est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ ligne contient α fois la $j^{\text{ième}}$ ligne de A, les autres lignes étant nulles. Par conséquent $(\mathrm{I}_n + \alpha E_{i,j})A = A + \alpha E_{i,j}A$ est bien la matrice A à laquelle on fait l'opération $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.
- $(\lambda - 1)E_{i,i}A$ est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ ligne contient $\lambda - 1$ fois la $i^{\text{ième}}$ ligne de A, les autres lignes étant nulles. Par conséquent $(\mathrm{I}_n - E_{i,i} + \lambda E_{i,i})A = A + (\lambda - 1)E_{i,j}A$ est bien la matrice A à laquelle on fait l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Coupons la somme en deux parties :
  - ⋆ $(E_{i,i} + E_{j,j})A = E_{i,i}A + E_{j,j}A$ est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ ligne contient la $i^{\text{ième}}$ ligne de A et la $j^{\text{ième}}$ ligne contient la $j^{\text{ième}}$ ligne de A, les autres lignes étant nulles. Ainsi $(\mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j})A$ est la matrice A dont on a remplacé les coefficients des $i^{\text{ième}}$ et $j^{\text{ième}}$ lignes par des 0.
  - ⋆ $(E_{i,j} + E_{j,i})A = E_{i,j}A + E_{j,i}A$ est la matrice dont la $i^{\text{ième}}$ ligne contient la $j^{\text{ième}}$ ligne de A et la $i^{\text{ième}}$ ligne contient la $j^{\text{ième}}$ ligne de A, les autres lignes étant nulles.

  Ainsi $(\mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,j} + E_{j,i})A$ est bien la matrice A à laquelle on fait l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$. □

Attention, contrairement à la multiplication à gauche où on agit sur L_i, quand on multiplie à droite, on agit sur C_j. Toujours vérifier, au moins avec les mains, afin de ne pas se tromper !

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Soient $\alpha \in K$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Effectuer une opération élémentaire sur les colonnes de A se traduit matriciellement par :*

- *multiplier A à droite par la matrice de transvection ci-dessus revient à effectuer sur A l'opération $C_j \leftarrow C_j + \alpha C_i$.*
- *multiplier A à droite par la matrice de dilatation ci-dessus revient à effectuer sur A l'opération $C_i \leftarrow \lambda C_i$.*
- *multiplierA à droite par la matrice de permutation ci-dessus revient à effectuer sur A l'opération $C_i \leftrightarrow C_j$.*

⇝ Démonstration laissée en exercice.

On reconnaît la matrice de permutation échangeant les lignes (quand on multiplie à gauche) ou les colonnes (quand on multiplie à droite) 1 et 3

Exemple : *Un calcul immédiat donne :*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} = \boxed{}$$

et

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} == \boxed{}$$

Le résultat ci-contre est attendu puisque les matrices de transvection, de dilatation et de permutation traduisent des opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes, et que ce sont des opérations réversibles (cf. chapitre 8).

Proposition. *Toute matrice de transvection, de dilatation ou de permutation est inversible.*

Démonstration. Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ avec $i \neq j$. Soient $\alpha \in \mathbb{K}$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

- On a
$$(\mathrm{I}_n + \alpha E_{i,j})(\mathrm{I}_n - \alpha E_{i,j}) = \mathrm{I}_n + \alpha E_{i,j} - \alpha E_{i,j} - \alpha^2 E_{i,j}E_{i,j} = \mathrm{I}_n,$$
car $i \neq j$ donc $E_{i,j}E_{i,j} = 0_n$. Ainsi la matrice de transvection $\mathrm{I}_n + \alpha E_{i,j}$ est inversible.
- On a
$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_n + (\lambda-1)E_{i,i})&\left(\mathrm{I}_n + \left(\frac{1}{\lambda}-1\right)E_{i,i}\right)\\ &= \mathrm{I}_n + \left(\lambda - 1 + \frac{1}{\lambda} - 1\right)E_{i,i} + (\lambda-1)\left(\frac{1}{\lambda}-1\right)E_{i,i}E_{i,i}.\end{aligned}$$
Comme $E_{i,i}E_{i,i} = E_{i,i}$, il vient que
$$\begin{aligned}(\mathrm{I}_n + (\lambda-1)E_{i,i})&\left(\mathrm{I}_n + \left(\frac{1}{\lambda}-1\right)E_{i,i}\right)\\ &= \mathrm{I}_n + \left(\lambda - 1 + \frac{1}{\lambda} - 1 + \frac{\lambda}{\lambda} - \lambda - \frac{1}{\lambda} + 1\right) = \mathrm{I}_n.\end{aligned}$$
Ainsi la matrice de dilatation $\mathrm{I}_n + (\lambda-1)E_{i,j}$ est inversible.
- On a $E_{i,i}^2 = E_{i,i}$, $E_{j,j}^2 = E_{j,j}$, $E_{i,j}^2 = E_{j,i}^2 = O_n$, $E_{i,j}E_{j,i} = E_{i,i}$, $E_{j,i}E_{i,j} = E_{j,j}$, $E_{i,j}E_{j,j} = E_{i,j}$ et $E_{j,i}E_{i,i} = E_{j,i}$. On obtient alors, en développant :
$$(\mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,i} + E_{i,j})^2 = \mathrm{I}_n.$$
(je vous laisse écrire le détail). Ainsi la matrice de permutation $\mathrm{I}_n - E_{i,i} - E_{j,j} + E_{i,i} + E_{i,j}$ est inversible (d'inverse elle-même). □

On développe le carré ci-contre en n'écrivant donc que les termes non nuls (les carrés d'abord puis les doubles produits par exemple).

Corollaire. *Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.*

Démonstration. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Effectuer une opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes de A revient à multiplier A par une matrice inversible, à gauche ou à droite. Mais le produit de deux matrices inversibles étant inversible, le résultat est donc une matrice inversible : les opérations élémentaires préservent l'inversibilité. □

4) Systèmes de Cramer

a) Notion de système de Cramer

On ne parle donc de systèmes de Cramer que lorsqu'on a autant d'équations que d'inconnues, c'est-à-dire quand la matrice associée est carrée.

Définition. *Un système (S) de n équations à n inconnues est dit de Cramer si sa matrice associée A est inversible.*

Proposition. *Si $AX = B$ est un système de Cramer, alors il admet une unique solution : $X = A^{-1}B$.*

Démonstration. On suppose donc que A est inversible. Soit X un vecteur colonne. Alors $AX = B$ si et seulement si $X = A^{-1}B$. □

Cas particulier important !

Remarque : Si $AX = B$ est un système de Cramer et si $X = 0$ est solution, (c'est-à-dire si $B = 0$, c'est-à-dire si le système est homogène), alors c'est la seule.

b) Critères d'inversibilité ou non inversibilité

Nous verrons au chapitre 34 que la réciproque est vraie.

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si le système $AX = 0$ admet une solution non nulle, alors A n'est pas inversible.*

DÉMONSTRATION. Le vecteur colonne nul est solution évidente. S'il y a une solution non nulle, alors il n'y a pas unicité de la solution, donc le système n'est pas de Cramer, donc la matrice n'est pas inversible. □

Exemple : *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$.

En particulier, si A a une ligne ou une colonne nulle, alors A n'est pas inversible.

Corollaire. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A a deux lignes ou deux colonnes proportionnelles, alors A n'est pas inversible.*

DÉMONSTRATION.

- Supposons qu'il existe $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $C_j = \lambda C_i$. Alors, si on note X le vecteur colonne dont les coordonnées sont nulles sauf celle en ligne i qui vaut λ et celle en ligne j qui vaut -1, il vient $AX = 0$, ce qui permet de conclure.
- Si A a maintenant deux lignes proportionnelles, alors A^T a deux colonnes proportionnelles, donc n'est pas inversible, donc A n'est pas inversible. □

⚠ La réciproque est fausse ! Une matrice qui n'a pas deux lignes ou deux colonnes proportionnelles n'est pas forcément inversible. Par exemple, la matrice A de l'exemple précédent n'est pas inversible sans avoir pas deux lignes ou deux colonnes proportionnelles. Ce n'est qu'une condition suffisante de non inversibilité. Nous montrerons au chapitre 34 qu'une matrice est non inversible si et seulement si elle admet une ligne ou une colonne qui est combinaison linéaire des autres (mais cela ne se voit pas forcément à l'oeil nu).

Dans le chapitre 34, nous montrerons encore plus fort : si on se donne **un** second membre B (n'importe lequel, celui que l'on veut) et que l'on montre que $AX = B$ admet une unique solution, alors, pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y = AX$ admet une unique solution (et donc A est inversible).

Théorème (caractérisation de l'inversibilité en termes de systèmes linéaires). *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si, pour tout second membre $Y \in \mathbb{K}^n$, le système linéaire $Y = AX$, d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$, admet une unique solution.*

DÉMONSTRATION.

Dans le paragraphe IV.4.d, nous reprendrons cette preuve pour mettre au point une méthode de calcul de l'inverse.

$\square$

c) Cas particulier des matrices diagonales et triangulaires

Proposition. *Une matrice diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Plus précisément, si* $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in (\mathbb{K}^*)^n$ *et* $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$*, alors* $A^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\dfrac{1}{\lambda_1}, \dots, \dfrac{1}{\lambda_n}\right)$.

Démonstration. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$. Notons $A = \mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

- Si, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, $\lambda_i \neq 0$, alors
$$\mathrm{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathrm{Diag}\left(\frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_n}\right) = \mathrm{Diag}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_n}\right) = \mathrm{Diag}(1, \dots, 1) = \mathrm{I_n}.$$
Ainsi A est inversible et $A^{-1} = \mathrm{Diag}\left(\dfrac{1}{\lambda_1}, \dots, \dfrac{1}{\lambda_n}\right)$.
- Réciproquement, supposons qu'il existe $i_0 \in [\![1\,;n]\!]$ tel que $\lambda_{i_0} = 0$. Considérons le vecteur colonne X_0 dont toutes les coordonnées sont nulle sauf celle à la $i_0$ième ligne. Alors $AX_0 = 0$ tandis que $X_0 \neq 0$ donc A n'est pas inversible. $\square$

On ne peut en revanche rien dire en général sur les coefficients non diagonaux de l'inverse. Il faudra utiliser les méthodes du prochain paragraphe pour inverse A.

Proposition. *Une matrice A triangulaire supérieure (respectivement inférieure) est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. Dans ce cas, A^{-1} est triangulaire supérieure (respectivement inférieure) avec pour coefficients diagonaux les inverses de ceux de A.*

Démonstration. Soit $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ (raisonnement analogue si $A \in \mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$). Pour tout $Y \in \mathbb{K}^n$, $AX = B$ est alors un système triangulaire. Or on a vu dans le chapitre 8 qu'un système triangulaire admet une unique solution si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls. D'où l'équivalence.

Supposons que A est inversible et notons $B = A^{-1}$. Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, posons $H(j)$: « $b_{j,j} = \dfrac{1}{a_{j,j}}$ et $b_{i,j} = 0$ pour tout $i > j$. »

- Pour tout $i \geqslant 1$,
$$(\mathrm{I}_n)_{i,1} = (BA)_{i,1} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,1} = b_{i,1}a_{1,1}$$
car A est triangulaire supérieure. Dès lors :
  - ⋆ Lorsque $i = 1$, $1 = b_{1,1}a_{1,1}$ donc $b_{1,1} = \dfrac{1}{a_{1,1}}$.

   ⋆ Lorsque $i > 1$, $0 = b_{i,1}a_{1,1}$ donc $b_{i,1} = 0$.

  Ainsi $H(1)$ est vraie.

- Soit $j \in [\![2\,;n]\!]$. Supposons que $H(1), \dots, H(j-1)$ sont vraies. Pour tout $i \geqslant j$,

$$(\mathrm{I}_n)_{i,j} = (BA)_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} b_{i,k}a_{k,j} = \sum_{k=1}^{j} b_{i,k}a_{k,j},$$

  car A est triangulaire supérieure. Par hypothèses de récurrence $b_{i,k} = 0$ lorsque $k \leqslant j-1$ et $i > k$. Par conséquent $(\mathrm{I}_n)_{i,j} = b_{i,j}a_{j,j}$.

   ⋆ Lorsque $i = j$, $1 = b_{j,j}a_{j,j}$ donc $b_{j,j} = \dfrac{1}{a_{j,j}}$.

   ⋆ Lorsque $i > j$, $0 = b_{i,j}a_{j,j}$ donc $b_{i,j} = 0$.

  Ainsi $H(j)$ est vraie.

Par récurrence forte, on en déduit que $H(1), \dots, H(n)$ sont vraies. Autrement dit $A^{-1} = B$ est triangulaire supérieure et ses coefficients diagonaux sont les inverses de ceux de A. □

d) Calcul de l'inverse d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice dont on cherche si elle est inversible et, le cas échéant, dont on souhaite calculer l'inverse.

Une première piste est d'utiliser le critère d'inversibilité en termes de systèmes linéaires vu dans le paragraphe IV.4.b. On se donne $Y = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^T \in \mathbb{K}^n$ un second membre quelconque et on essaie de résoudre $AX = Y$, d'inconnue $X \in \mathbb{K}^n$. Pour cela, on lui applique bien sûr la méthode du pivot de Gauss. On le met d'abord sous forme triangulaire.

Ce critère ne fonctionne que si le système est triangulaire ! !

- Si l'un des coefficients diagonaux est nul, le système n'admet pas de solution et donc A n'est pas inversible.
- Si tous les coefficients diagonaux sont non nuls, on poursuit la résolution et on obtient $X = A^{-1}Y$. On « voit » alors apparaître un nouveau système linéaire donc X est le second membre et Y le vecteur des inconnues, et la matrice associée A^{-1}.

Exemple : *Soit* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Il s'agit en fait de la même méthode mais sans écrire les coefficients. On parle de méthode de Gauss-Jordan mais cette terminologie n'est pas officielle dans le programme.

Mais cette méthode est fastidieuse car il faut écrire les coefficients $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$, alors qu'on voit bien qu'on aurait pu se contenter de ne faire ces calculs que sur les coefficients. C'est justement ce que nous allons faire. On se donne une matrice carrée A et on se demande si elle est inversible.

- Lorsque l'on effectue des opérations élémentaires sur les lignes de A, cela revient à multiplier A (à gauche) par des matrices inversibles, disons, dans l'ordre, $M_1, \dots, M_N$. Si on tombe en cours de route sur une matrice B non inversible (par exemple si B a une ligne nulle), alors on peut affirmer que la matrice originelle A n'est pas inversible : en effet, si A est inversible alors, par produit de matrices inversibles, $B = M_N \times \cdots \times M_1 \times A$ est inversible, d'où le résultat par contraposée.
- De même, si on tombe en cours de route sur une matrice B dont on sait qu'elle est inversible (typiquement une matrice triangulaire dont les coefficients triangulaires sont tous non nuls), alors on peut affirmer que la matrice originelle A est inversible. En effet, avec les mêmes notations que ci-dessus, on a alors $A = M_1^{-1} \times \cdots \times M_N^{-1} \times B$, qui est inversible car produit de matrices inversibles.
- On peut montrer (voir dans la marge pour une démonstration heuristique mais tout de même assez rigoureuse et convaincante) que si A est inversible, alors l'algorithme du pivot de Gauss termine, c'est-à-dire qu'on peut passer de A à I_n par une succession d'opérations élémentaires sur les lignes. Matriciellement, cela se traduit par une égalité du type $M_N \times \cdots \times M_1 \times A = \mathrm{I}_n$ où les M_k sont les matrices (inversibles) associées aux opérations successives effectuées sur les lignes de A. La matrice A est donc inversible, et $A^{-1} = M_N \times \cdots \times M_1$ (rappelons que si on a une égalité du type $A \times M = \mathrm{I}_n$, alors A est inversible et $M = A^{-1}$) c'est-à-dire que $A^{-1} = M_N \times \cdots \times M_1 \times \mathrm{I}_n$. En conclusion :

On change l'ordre quand on inverse un produit ! On peut aussi dire qu'on multiplie successivement à gauche par $M_N^{-1}, \dots, M_1^{-1}$.

Si la matrice est inversible, alors, en appliquant le pivot de Gauss au système linéaire associé, on arrive à un système triangulaire avec coefficients diagonaux non nuls. En effet, on arrive sinon à un système avec une ligne nulle (voir le cas général dans le chapitre 8), donc à une matrice non inversible, ce qui est absurde. Ensuite, des opérations élémentaires sur les lignes permettent de « nettoyer » les lignes supérieures et on aboutit finalement à l'identité en divisant à la fin par les coefficients diagonaux restant (les seuls non nuls).

Théorème. *Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On peut « transformer » A en I_n à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, et on obtient A^{-1} en effectuant sur I_n les mêmes opérations élémentaires que sur A.*

En pratique, on écrit A et I_n côte à côte (séparées par une barre verticale, mais ce n'est pas obligatoire, chacun a sa rédaction propre), on transforme A en I_n à l'aide d'opérations sur les lignes, on fait les mêmes opérations sur I_n. Quand on aura transformé A en I_n, la matrice à laquelle on sera arrivé en partant de I_n sera A^{-1} (si A est inversible).

Exemples :

- *Reprenons l'exemple ci-dessus de la matrice* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Si vous ne pouvez pas vous empêcher d'écrire des symboles entres ces étapes, écrivez des $\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence « s'obtient en faisant des opérations élémentaires sur ». Aligner les étapes suffit pour la rédaction. En tout cas n'écrivez pas de $\Longleftrightarrow$.

- *Considérons* $M = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. *Est-elle inversible ? Si oui, calculons son inverse.*

En fait il est conseillé de commencer par mettre A seule sous forme triangulaire pour s'assurer qu'elle est inversible avant de commencer à faire les mêmes opérations sur I_3... sinon c'est une perte de temps.

Dans le chapitre 34, on pourra mélanger les deux pour le calcul du rang d'une matrice (notion que l'on verra à ce moment là) mais seulement dans ce cas là.

Remarque : On aurait en fait aussi pu travailler avec des opérations élémentaire sur les colonnes. Si on transforme A en I_n par une succession d'opérations élémentaires sur les colonnes, on obtient à la place une égalité du type $A \times P_1 \times \cdots \times P_q = \mathrm{I}_n$ où les P_k sont les matrices inversibles correspondant aux opérations élémentaires sur les colonnes effectuées sur A et, de même, il vient $A^{-1} = \mathrm{I}_n \times P_1 \times \cdots \times P_q$.

⚠ Cependant, il faut faire un choix dès le départ et s'y tenir jusqu'au bout : soit on fait des opérations sur les lignes exclusivement, ou bien sur les colonnes exclusivement. Mélanger les deux est interdit. Voyons pourquoi : si on mélange les deux, on obtient une égalité du type

$$M_1 \times \cdots \times M_N \times A \times P_1 \times \cdots \times P_q = \mathrm{I}_n$$

Notons $B = M_1 \times \cdots \times M_N$ et $C = P_1 \times \cdots \times P_q$. Alors B et C sont inversibles car produits de matrices inversibles. Si on multiplie à gauche par B^{-1} et à droite par C^{-1}, il vient $A = B^{-1}C^{-1}$ donc $A^{-1} = P_1 \times \cdots \times P_q \times M_1 \times \cdots \times M_N$. Les opérations sur les colonnes sont à gauche et celles sur les lignes sont à droite : on n'obtient pas A^{-1} en effectuant sur I_n les mêmes opérations que sur A !