Chapitre 9

Décomposition en éléments simples

Tous les résultats de ce chapitre seront admis. Nous en montrerons certains dans les chapitres 18 et 19. D'autres resteront admis conformément au programme.

L'objectif de ce chapitre est de présenter la technique de décomposition en éléments simples de fonctions rationnelles dans le but principal est de calculer certaines intégrales dans le prochain chapitre.

Dans ce chapitre $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un élément de $\mathbb{K}$ est appelé scalaire.

I Rappels et compléments sur les fonctions polynomiales et rationnelles

Dans la partie C du chapitre 4, puis dans le chapitre 6, nous avons défini les fonctions polynomiales. Dans ce paragraphe, nous étendons ces notions mais tous les résultats seront admis.

1) Degré d'une fonction polynomiale

On ne dit pas dans cette définition que $a_n \neq 0$ ni même que les scalaires $a_0, a_1, \dots, a_p$ ne sont pas tous nuls.

Définition. *Une fonction $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite polynomiale sur $\mathbb{K}$ si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et des scalaires $a_0, a_1, \dots, a_p$ tels*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n.$$

L'unicité du degré et des coefficients d'une fonction polynomiale non nulle signifie que, si P s'écrit

$x \mapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p$

et

$x \mapsto b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$

avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ et $a_0, \dots, a_p, b_0, \dots, b_q$ des scalaires tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$, alors $p = q$ et

$$\forall i \in [\![0\,;p]\!],\ a_i = b_i.$$

Théorème. *Si P est une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}$, alors :*

- *ou bien P est la fonction nulle,*
- *ou bien il existe un unique $p \in \mathbb{N}$ (appelé degré de P) et des uniques réels $a_0, a_1, \dots, a_p$ (appelés coefficients de P) tels que $a_p \neq 0$ et :*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_p x^p.$$

Le coefficient a_p est appelé coefficient dominant de P et a_0 le coefficient constant. Le degré p du polynôme P est noté $\deg(P)$.

Exemple : *La fonction $x \longmapsto \mathrm{i}x^5 - (2+\mathrm{i})x^3 + 8x^2 - 7$ est polynomiale de degré 5, de coefficient constant -7 et de coefficient dominant i.*

Remarques :

- Le terme « identifier » est interdit pour dire que les coefficients de deux fonctions polynomiales égales sont les mêmes deux à deux : on parle d'unicité des coefficients d'une fonction polynomiale.
- Le coefficient dominant d'une fonction polynomiale non nulle est, par définition, non nul.
- Par convention, on dit que la fonction (polynomiale) nulle est de degré $-\infty$.

Autrement dit, le degré du produit de fonctions polynomiales non nulles est la somme des degrés.

Proposition. *Soient P_1 et P_2 deux fonctions polynomiales non nulles sur $\mathbb{K}$. Alors :*

- $\deg(P_1 P_2) = \deg(P_1) + \deg(P_2)$,
- *pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\deg(P^n) = n \deg(P)$.*

Exemple : *Si $P_1 : x \longmapsto \mathrm{i}x^2 - 2x + 7$ et $P_2 : x \longmapsto x^3 - \mathrm{i}$, alors $\deg(P_1) = 2$, $\deg(P_2) = 3$, $\deg(P_1 P_2) = 3 + 2 = 5$ et $\deg(P_1^3) = 3 \times \deg(P_1) = 6$.*

2) Division euclidienne de fonctions polynomiales

Théorème. *Soient A et B deux fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}$ telles que B n'est pas nulle. Alors il existe un unique couple (Q,R) de fonctions polynomiales sur $\mathbb{K}$ tel que $A = BQ+R$ et $\deg(R) < \deg(B)$. La fonction Q est appélée le quotient et la fonction R le reste de la division euclidienne de A par B.*

La fonction polynomiale R peut être nulle avec la convention que $\deg(0) = -\infty$.

Méthode.

- Si $\deg(A) < \deg(B)$, alors $A = 0 \times B + A$: $Q = 0$ et $R = A$.
- Supposons que $\deg(A) \geqslant \deg(B)$. Notons $p = \deg(A)$, $q = \deg(B)$ et

$$A : x \longmapsto a_0 + a_1 x + \cdots + a_p x^p \qquad \text{et} \qquad B : x \longmapsto b_0 + b_1 x + \cdots + b_q x^q$$

avec $a_0, \ldots, a_p, b_0, \ldots, b_q$ des scalaires tels que $a_p \neq 0$ et $b_q \neq 0$. On se donne $x \in \mathbb{K}$ puis on procède ainsi :

Cette méthode est à rapprocher de la division euclidienne sur $\mathbb{Z}$ pratiquée à l'école primaire (et que l'on reverra dans le chapitre 12).

  - ⋆ On multiplie $B(x)$ par $\dfrac{a_p}{b_q}x^{p-q}$ et on retranche le résultat à $A(x)$. Par construction, on obtient $A_1(x)$ avec A_1 une fonction polynomiale de degré inférieur strictement à p.
  - ⋆ Si $\deg(A_1) \geqslant q$, on détermine $c_1 \in \mathbb{K}$ et $r_1 \in \mathbb{N}$ tels que retrancher $c_1 x^{r_1} B(x)$ à $A_1(x)$ donne $A_2(x)$ avec A_2 une fonction polynomiale de degré inférieur strictement à $\deg(A_1)$.
  - ⋆ Et ainsi de suite en abaissant à chaque fois le degré de la fonction polynomiale obtenue jusqu'à obtenir une fonction polynomiale de degré inférieur strictement à q. Celle-ci sera alors le reste recherché. Le quotient sera, quant à lui, $x \longmapsto \dfrac{a_p}{b_q}x^{p-q} + c_1 x^{r_1} + \ldots$.

Autrement dit on multiplie $B(x)$ par les termes nécessaire pour que les termes dominants soient les mêmes et s'annulent en faisant la soustraction.

Exemples :

- *Faisons la division euclidienne de $A : x \longmapsto 3x^3 - x^2 - 8x + 9$ par $B : x \longmapsto x + 2$.*

On multiplie d'abord $B(x)$ par $3x^2$, car $3x^2 \times x = 3x^3$, qui est le terme dominant de $A(x)$. Ensuite, on multiplie $B(x)$ par $-7x$ car $2x^2 \times x = -7x^3$, ce qui est le terme dominant de la fonction polynomiale obtenue après différence, et ainsi de suite. On s'arrête quand on obtient une fonction polynomiale de degré inférieur strictement à $1 = \deg(B)$.

- *Faisons la division euclidienne de $A : x \longmapsto x^4 - 2x^3 + 16x^2 - x - 1$ par $B : x \longmapsto 2x^2 + 3$.*

On multiplie d'abord $B(x)$ par $\frac{5x^2}{2}$, car $2x^2 \times \frac{5x^2}{2} = 5x^4$, qui est le terme dominant de $A(x)$. Ensuite, on multiplie $B(x)$ par $-x$ car $2x^2 \times (-x) = -2x^3$, ce qui est le terme dominant de la fonction polynomiale obtenue après différence, et ainsi de suite....

... On s'arrête quand on obtient une fonction polynomiale de degré inférieur strictement à $2 = \deg(B)$.

3) Racines et factorisation

Définition. *Soit P une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}$. Soit $a \in \mathbb{K}$. On dit que a est une racine de P (dans $\mathbb{K}$) si $P(a) = 0$.*

⚠ Le fait qu'une fonction polynomiale admette des racines ou non dépend de $\mathbb{K}$.
Si $P : x \longmapsto x^2 + 1$, alors P admet des racines sur $\mathbb{C}$ (il s'agit de i et de $-\mathrm{i}$) mais pas sur $\mathbb{R}$.

La fonction polynomiale nulle admet une infinité de racines (tous les réels) et c'est donc la seule.

Théorème. *Si P est une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}$ de degré $p \in \mathbb{N}$, alors P admet au plus p racines.*

Théorème (racine et factorisation). *Soit P une fonction polynomiale sur $\mathbb{K}$ de degré $p \in \mathbb{N}^*$. Si P admet une racine a, alors il existe une unique fonction polynomiale Q sur $\mathbb{K}$ de degré $p-1$ telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad P(x) = (x-a) \times Q(x).$$

Autrement dit le reste de la division euclidienne de P par $x \longmapsto x - a$ est nul et Q est le quotient.

Ce théorème a déjà été montré dans les chapitres 3 et 6 dans le cas où $p = 2$. Nous le montrerons dans le cas général dans le chapitre 18 mais une preuve calculatoire a déjà été proposée dans l'exercice 19 du TD n° 7.

On cherche d'abord les racines parmi $\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0$ ou encore $\pm 3\mathrm{i}, \pm 2\mathrm{i}, \pm \mathrm{i}$, sachant qu'une racine nulle saute au yeux : c'est le cas si et seulement si le coefficient constant est nul. On voit aussi facilement quand 1 est racine : c'est le cas lorsque la somme des coefficients est nulle.

On a vu une méthode dans les chapitres 4 et 6 pour trouver Q en l'écrivant de façon générique comme une combinaison linéaire de fonctions puissances entières naturelles, en développant $(x-a)Q(x)$ et en « identifiant » les coefficients un à un pour trouver Q. Mais désormais, il est bien plus efficace d'utiliser l'algorithme de division euclidienne vu dans le paragraphe précédent.

Exemple : *Considérons la fonction polynomiale $P : x \longmapsto 6x^3 + 5x^2 - 3x - 2$.*

C'est le même exemple que dans le chapitre 4.

Comment savoir quand s'arrêter dans la factorisation ? Sur $\mathbb{C}$, c'est très simple :

Lorsque P est écrit ainsi, on dit qu'il est scindé sur $\mathbb{C}$.

Théorème (factorisation des fonctions polynomiales sur $\mathbb{C}$). *Soit P une fonction polynomiale non constante sur $\mathbb{C}$. Alors P peut s'écrire comme un produit de fonctions polynomiales de degré 1.*

Sur $\mathbb{R}$, il faut ajouter les fonction polynomiales de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

« peut s'écrire » dit juste que c'est possible mais, dans la pratique, il peut être impossible de trouver explicitement la factorisation. Nous verrons certaines méthodes pour écrire une fonction polynomiale (complexe ou réelle) sous forme factorisée dans le chapitre 18.

Théorème (factorisation des fonctions polynomiales sur $\mathbb{R}$). *Soit P une fonction polynomiale non constante sur $\mathbb{R}$. Alors P peut s'écrire comme un produit de fonctions polynomiales de degré 1 et de degré 2 à discriminant strictement négatif.*

Exemple : *Notons $P : x \longmapsto (x+1)(x^2+1)$.*

Remarque : Si P est polynomiale sur $\mathbb{R}$, on peut la voir comme polynomiale sur $\mathbb{C}$. Si on dispose d'une factorisation de P sur $\mathbb{R}$, on peut alors obtenir sa factorisation sur $\mathbb{C}$ en factorisant chaque terme de la factorisation qui est une fonction polynomiale de degré 2 à discriminant strictement négatif (en utilisant la méthode vue dans le chapitre 6).

4) Fonctions rationnelles sur $\mathbb{K}$

Le domaine de définition de F est $\mathbb{K}$ privé de l'ensemble des pôles. Et comme on l'a vu plus haut, l'ensemble des racines de B (et donc des pôles de F) est fini.

Définition. *Une fonction F est dite rationnelle sur $\mathbb{K}$ si il existe deux fonctions polynomiales A et B sur $\mathbb{K}$ telles que B est non identiquement nulle et $F = \dfrac{A}{B}$. Les racines de B, s'il y en a, sont appelées les pôles de F.*

Exemple : *Notons $F : x \longmapsto \dfrac{7x^5 - 6x + 4}{x^2 + x + 1}$.*

II Théorème de décomposition en éléments simples

Rappelons que, si $\deg(A) < \deg(B)$, alors $Q = 0$. Sinon Q est de degré $\deg(B) - \deg(A)$.

Dans cette partie, on se donne deux fonctions polynomiales A et B sur $\mathbb{K}$, avec B non constante. On suppose que A et B n'ont aucune racine complexe commune et on note Q le quotient de la division euclidienne de A par B.

1) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$

Les entiers $m_1, \dots, m_r$ sont appelées les ordres de multiplicités de $z_1, \dots, z_r$ respectivement. Notons que

$$\deg(B) = \sum_{k=1}^{r} m_k.$$

Si $m_1 = m_2 = \dots = m_k = 1$, on dit que B est à racines simples et que $\dfrac{A}{B}$ est à pôles simples.

On suppose dans ce paragraphe que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ (donc que A et B sont à coefficients complexes et définis sur $\mathbb{C}$). Écrivons B sous forme factorisée :

$$B : z \longmapsto \lambda \prod_{k=1}^{r} (z - z_k)^{m_k},$$

où $r \in \mathbb{N}^*$, $\lambda \in \mathbb{C}$ (c'est le coefficient dominant de B), $z_1, \dots, z_q$ sont des complexes **distincts** (ce sont les racines de B) et $m_1, \dots, m_q$ sont des entiers naturels non nuls.

Théorème. *Il existe des complexes $a_{1,1},\dots,a_{1,m_1},\dots,a_{r,1},\dots,a_{r,m_r}$ uniques tels que, pour tout $z\in\mathbb{C}\backslash\{z_1;\dots;z_r\}$:*

$$\begin{aligned}\frac{A(z)}{B(z)} = Q(z) &+ \frac{a_{1,1}}{z-z_1} + \frac{a_{1,2}}{(z-z_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_1}}{(z-z_1)^{m_1}}\\ &+ \frac{a_{2,1}}{z-z_2} + \frac{a_{2,2}}{(z-z_2)^2} + \cdots + \frac{a_{2,m_2}}{(z-z_2)^{m_2}}\\ &+ \cdots\\ &+ \frac{a_{r,1}}{z-z_r} + \frac{a_{r,2}}{(z-z_r)^2} + \cdots + \frac{a_{r,m_r}}{(z-z_r)^{m_r}}.\end{aligned}$$

Ce théorème dit que les $a_{1,1},\dots$ existent et le but de la partie III va être de donner des méthodes pour les trouver.

Exemples : *Notons $f : z\longmapsto \dfrac{1}{(z-i)^4(z+i)^5}$.*

2) Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{R}$

On suppose dans ce paragraphe que $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ (donc que A et B sont à coefficients réels et sont définies sur $\mathbb{R}$. Notons B sous forme factorisée :

$$B : x\longmapsto \lambda\left(\prod_{k=1}^{r}(x-x_k)^{m_k}\right)\left(\prod_{\ell=1}^{s}P_\ell^{n_\ell}\right)$$

où $q\in\mathbb{N}$, $r\in\mathbb{N}$ (de sorte que $q+r>0$), $\lambda\in\mathbb{R}$ (c'est le coefficient dominant de B), $x_1,\dots,x_r$ sont des réels **distincts** (ce sont les racines de B), $P_1,\dots,P_s$ sont des fonctions polynomiales **distinctes** de degré 2 à discriminant strictement négatif, et $m_1,\dots,m_r,n_1,\dots,n_s$ sont des entiers naturels non nuls.

Mais, comme dit plus haut, on pourra parfois considérer que A et B sont à coefficients complexes et définies sur $\mathbb{C}$: on appliquera alors le paragraphe précédent.

Théorème. *Il existe des réels $a_{1,1},\dots,a_{r,m_r},b_{1,1},c_{1,1},\dots,b_{s,n_s},c_{s,n_s}$ uniques tels que, pour tout $x\in\mathbb{R}\backslash\{x_1;\dots;x_r\}$,*

$$\begin{aligned}\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) &+ \frac{a_{1,1}}{x-x_1} + \frac{a_{1,2}}{(x-x_1)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_1}}{(x-x_1)^{m_1}}\\ &+ \cdots\\ &+ \frac{a_{r,1}}{x-x_r} + \frac{a_{r,2}}{(x-x_r)^2} + \cdots + \frac{a_{1,m_r}}{(x-x_r)^{m_r}}\\ &+ \frac{b_{1,1}x+c_{1,1}}{P_1(x)} + \frac{b_{1,2}x+c_{1,2}}{P_1(x)^2} + \cdots + \frac{b_{1,n_1}x+c_{1,n_1}}{P_1(x)^{n_1}}\\ &+ \cdots\\ &+ \frac{b_{s,1}x+c_{s,1}}{P_s(x)} + \frac{b_{s,2}x+c_{s,2}}{P_s(x)^2} + \cdots + \frac{b_{s,n_s}x+c_{s,n_s}}{P_s(x)^{n_s}}.\end{aligned}$$

... avec la convention que, si $r=0$ ou $q=0$, les termes correspondants n'apparaissent ni dans la factorisation de B, ni dans la décomposition du théorème.

Bon d'accord, cet énoncé est particulièrement compliqué au premier abord... Inutile de le retenir dans cette généralité. Il faut surtout comprendre le principe (surtout que, dans la pratique, on ne rencontre presque jamais des exemples où la puissance des fonctions polynomiales de degré 2 est supérieure ou égale à 2).

Exemples :

- *Notons* $f : x \longmapsto \dfrac{7x^9+3x^2-8}{(x-6)^4(2x^2+5)^3}$.

- *Notons* $g : x \longmapsto \dfrac{x^{20}}{(x-1)(x+2)^2x^3(3x^2+x+1)^3(x^2+1)^4}$.

Mais à quoi peut donc servir une décomposition en éléments simples ? Et bien principalement à déterminer des primitives de fonctions rationnelles (cf. chapitre 10) mais aussi à dériver successivement des fonctions rationnelles. En effet, si $r \in \mathbb{C}$ et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x-r}$, alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}\backslash\{r\}$ et, pour tous $x \in \mathbb{R}\backslash\{r\}$ et $k \in \mathbb{N}$,

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^k k!}{(x-r)^{k+1}}.$$

III Méthodes pratiques de décomposition en éléments simples

Dans cette partie, nous étudions différentes méthodes pour trouver les coefficients intervenant dans une décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle $F = \dfrac{A}{B}$ (avec B non constant et de sorte que A et B n'ont pas de racines complexes communes). On commence toujours par :

- déterminer le quotient Q de la division euclidienne de A par B.
- énoncer le théorème de décomposition en éléments simples (en disant qu'il existe des scalaires, en choisissant des lettres pour les désigner et en écrivant la décomposition).

Que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, on remarque que le nombre de coefficients à trouver est exactement égal à $n = \deg(B)$.

1) En résolvant un système linéaire

a) Par unicité des coefficients d'une fonction polynomiale

C'est un résultat mathématique profond que nous montrerons dans le chapitre 18.

Commençons par un résultat théorique :

Proposition. *Si deux applications polynomiales sur $\mathbb{K}$ coïncident sur un sous ensemble infini de $\mathbb{K}$, alors elles ont les mêmes coefficients.*

La méthode la plus intuitive et qui fonctionne à tous les coups (mais qui n'est pas du tout la plus simple) pour trouver les coefficients de la décomposition en éléments simples consiste à mettre au même dénominateur et à « identifier » les coefficients des numérateurs. Cela fournit un système linéaire à n équations et n inconnues qu'il suffit de résoudre (avec la méthode du pivot de Gauss de préférence).

Le terme « identification » est cependant interdit (cela ne veut rien dire). On parle plutôt d'unicité des coefficients d'une fonction polynomiale.

Exemple : *Décomposons en éléments simples la fonction rationnelle*

$$F : x \longmapsto \frac{x}{(x+1)(x+2)}.$$

Puisqu'est en présence de fonctions polynomiales égales sur le sous ensemble infini $\mathbb{R}\backslash\{-1;-2\}$.

b) En évaluant en des valeurs particulières

Dans la pratique, on n'utilise pas les méthodes du paragraphe III.1 au delà de 3 coefficients car cela devient vite assez fastidieux et on dispose de moyens plus efficaces (cf. paragraphe III.2). On réservera cette méthode aux cas où il y a des pôles multiples ou des fonctions polynomiales de degré 2 et qu'on aura épuisé les méthodes ci-dessous.

Une autre méthode consiste à évaluer F et sa décomposition en éléments simples en n valeurs distinctes bien choisies (n'étant pas des pôles bien sûr) de sorte d'obtenir un système linéaire de n équations à n inconnues.

Exemple : *Reprenons l'exemple du paragraphe précédent à partir de la décomposition :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1;-2\}, \qquad \frac{x}{(x+1)(x+2)} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}.$$

2) La technique de base : multiplication puis limite en un pôle

Soit $r \in \mathbb{K}$ un pôle de F (c'est-à-dire une racine du dénominateur B, toujours avec l'hypothèse que A et B n'ont pas de racines complexes communes). On appelle ordre de a la puissance de $x \longmapsto x - r$ dans la factorisation de B sur $\mathbb{K}$. Autrement dit r est d'ordre $m \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si il existe une fonction polynomiale P sur $\mathbb{K}$ telle que a n'est pas racine de P et

$$\forall x \in \mathbb{K}, \qquad B(x) = (x-r)^m P(x).$$

On dit que r est un pôle simple si son ordre est 1. On dit qu'il est multiple sinon.

a) Principe de la méthode

Pour chaque pôle r de F, si m désigne l'ordre de r, la décomposition en éléments simples de F s'écrit sous la forme

$$F : x \longmapsto \sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{(x-r)^k} + G(x),$$

avec $a_1, \dots, a_m$ des scalaires (à déterminer) et G une fonction rationnelle (qui est la somme des termes de la décomposition ne faisant pas apparaître le pôle r) dont r n'est pas un pôle.

Dans le chapitre 19, nous définirons proprement la notion de fraction rationnelle. Nous ferons alors cela encore différemment (et plus rigoureusement pour le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) : après avoir multiplié par $(x-r)^m$, nous dirons que cela définit (plus ou moins) une fraction rationnelle dont r n'est plus un pôle et nous évaluerons simplement en r.

On se donne alors $x \in \mathbb{K}$ n'étant pas un pôle de F et on multiplie par $(x-r)^m$:

$$(x-r)^m F(x) = a_m + \sum_{k=1}^{m-1} a_k (x-r)^{m-k} + (x-r)^m G(x).$$

On fait alors tendre x vers r et on obtient :

$$a_m = \lim_{x \to r} (x-r)^m F(x).$$

⚠ Lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$, cela n'est pas très rigoureux puisque l'on n'a pas défini la notion de limite d'une fonction de la variable complexe en un complexe (c'est même hors programme). Dans la pratique nous le ferons quand même mais, si on tient à plus de rigueur, il suffit d'évaluer en $x = r + \varepsilon$ (avec ε réel) et on a alors :

$$a_m = \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^m F(r+\varepsilon).$$

b) Le cas où tous les pôles sont simples

Cette méthode est très efficace lorsque tous les pôles sont simples puisqu'alors la décomposition en éléments simples $F = \dfrac{A}{B}$ s'écrit sous la forme

$$F : x \longmapsto \frac{a_1}{x-x_1} + \dots + \frac{a_n}{x-x_n},$$

avec $x_1, \dots, x_n$ les racines de B dans $\mathbb{K}$ (supposées distinctes) et $a_1, \dots, a_n$ les coefficients à déterminer. Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, on a donc

$$a_k = \lim_{x \to x_k} (x-x_k) \times F(x).$$

On multiplie les deux expressions de $F(x)$ par $x - x_k$ pour obtenir

$$(x-x_k)F(x) = a_k + (x-x_k) \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq k}} \frac{a_i}{x-x_i}.$$

Le terme de droite tend bien vers $a_k + 0$ lorsque x tend vers x_k puisque les racines sont distinctes.

Exemples :

- *Décomposons en éléments simples la fonction rationnelle $F : x \longmapsto \dfrac{x}{(x+1)(x+2)}$ avec cette nouvelle méthode.*

- *Décomposons en éléments simples la fonction rationnelle*

$$F : x \longmapsto \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)(x-3)}.$$

c) Le cas des pôles multiples

Si la fraction rationnelle présente des pôles multiples, alors la méthode ci-dessus permet uniquement de donner le coefficient de la plus grande puissance.

Exemple : *Donner la décomposition en éléments simples de* $F : x \longmapsto \frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)}$.

Cette méthode ne marche pas pour trouver a ou b. Par exemple, si on multiplie par $x-1$ et que l'on fait tendre x vers 1, on obtient que le terme de gauche tend vers ∞ et non vers a !

Pour les autres coefficients associé à un pôle multiple, on utilise souvent d'autres méthodes (comme celles du paragraphe III.1). Mais on peut continuer d'appliquer la méthode de ce paragraphe (mais c'est un peu fastidieux) en passant le terme à la plus grande puissance (celui dont on vient de déterminer le coefficient) de l'autre côté, en mettant au même dénominateur et en recommençant avec la deuxième puissance la plus grande. Et ainsi de suite.

C'est tout de même assez fastidieux et pas forcément plus simple que de résoudre un système ou d'utiliser d'autres arguments comme des arguments de limites (cf. paragraphe III.3.c)

Exemple : *Poursuivons l'exemple ci-dessus. On en était à :*

$$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\}, \qquad \frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{3}{x-2}$$

et on doit encore trouver a et b.

3) Autres méthodes

a) Utilisation des limites en $\pm\infty$

Bien sûr, il faut faire tendre x **réel** vers $\pm\infty$ (même si on travaille avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

Supposons que $Q = 0$ (sinon la limite serait infinie). Si on fait tendre x vers $\pm\infty$, on obtient alors $0 = 0$... ce n'est pas très intéressant. Mais si on multiplie par x (ou par une autre puissance de x si on obtient encore $0 = 0$) et que l'on fait tendre x vers $\pm\infty$, alors cela fournit une équation sur les coefficients.

Exemple : *Reprenons l'exemple du paragraphe précédent après avoir trouvé les coefficients des termes de plus grande puissance : pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1;2\}$,*

$$F(x) = \frac{x+1}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} - \frac{2}{(x-1)^3} + \frac{3}{x-2}.$$

On retrouve bien le même résultat que dans le paragraphe précédent. Normal : il y a unicité des coefficients dans la décomposition en éléments simples.

b) Utilisation de la parité

Lorsque F est paire ou impaire, il suffit d'écrire ce que cela signifie et d'utiliser l'unicité de la décomposition.

Exemple : *Déterminons la décomposition en éléments simples de*

$$F : x \longmapsto \frac{2x^2+3}{(x^2-1)^2(x^2+1)} = \frac{2x^2+3}{(x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)}.$$

Multiplier par x et faire tendre x vers $\pm\infty$ donne $0 = a - a$: ce n'est pas intéressant.

c) Faire un détour par les complexes

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on peut faire la décomposition sur $\mathbb{C}$ en utilisant la méthode du paragraphe III.2. puis regrouper les termes conjugués pour se ramener à la décomposition sur $\mathbb{R}$ mais cette méthode est très technique donc fortement déconseillée.