Chapitre 37

Déterminant

L'objectif de ce chapitre est d'introduire un outil appelé déterminant qui est utile dans de nombreuses branches des mathématiques : en algèbre (résolution de systèmes d'équations, critères d'inversibilité de matrices, obtention de polynômes annulateurs), en géométrique (généralisation des notions d'aires et de volumes) et en analyse (étude d'équations différentielles du second ordre, formule de changement de variable dans une intégrale multiple).

On a déjà évoqué cette notion pour une matrice de taille 2×2 dans le chapitre 23.

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier supérieur ou égal à 2. Comme d'habitude, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ conformément au programme.

Mais la plupart des résultats sont encore vrais dans un corps quelconque.

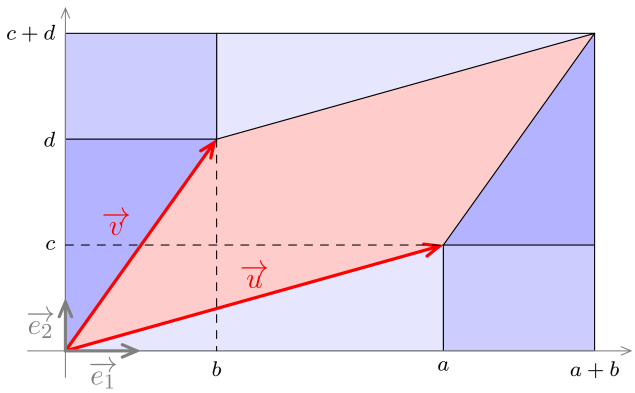
I Introduction

Si l'intérêt de ce chapitre ne sera plus à prouver quand on l'aura terminé et mis en application, il n'en demeure pas moins qu'il pourra sembler très abstrait au premier abord. Commençons donc par une petite motivation géométrique de la notion de déterminant.

Examinons d'abord le cas de la dimension 2. Plus précisément, supposons que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. Qu'est ce que l'aire d'un parallélogramme ?

On a déjà vu dans le chapitre 24, comment calculer l'aire d'une partie de $\mathbb{R}^2$ délimitée par la courbe d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ avec $a < b$... mais cela utilise des arguments d'analyse.

On munit le plan du repère orthonormé direct $(0, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ où $(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$ (le terme *orthonormé* sera expliqué dans le chapitre 38 et le terme *direct* sera expliqué plus bas). Remarquons qu'un parallélogramme $ABCD$ est entièrement déterminé par la donnée du point A et des vecteurs $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AD}$. En ce qui concerne son aire, il suffit de connaître $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$. Un dessin vaut mieux qu'un long discours :



En notant $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ les coordonnées respectives des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, on trouve que l'aire géométrique du parallélogramme est

$$(a+b)(c+d) - \left(bc + \frac{bd}{2} + \frac{ac}{2} + bc + \frac{bd}{2} + \frac{ac}{2} \right) = ad - bc.$$

On retranche à l'aire du grand rectangle (de longueur $a+b$ et de largeur $c+d$) la somme des aires des deux petits rectangles et des quatre triangles.

On retrouve le déterminant d'une matrice 2×2 vu dans le chapitre 23.

Toutefois, remarquons que cette quantité a été obtenue dans une configuration géométrique particulière : le parallélogramme était placé dans le quadrant haut droit et l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ était positif. On peut montrer que, en général, l'aire géométrique du parallélogramme est $|ad - bc|$. Pourtant, nous allons plutôt conserver la formule $ad - bc$ que l'on peut interpréter comme l'aire « signée » du parallélogramme que l'on note $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ et que l'on appelle déterminant de $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ dans la base $\mathscr{B}$. Regardons-ça de plus près.

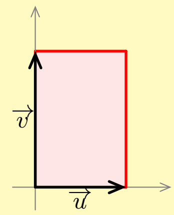
Supposons que $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas colinéaires et notons θ la mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ qui appartient à $]-\pi\,;\pi[\setminus\{0\}$. En notant $z = a + \mathrm{i}c$ et $z' = b + \mathrm{i}d$, on a $\dfrac{z'}{z} = \dfrac{|z'|}{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ donc

$$z'\overline{z} = z\overline{z}\frac{|z'|}{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = |z| \times |z'|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}.$$

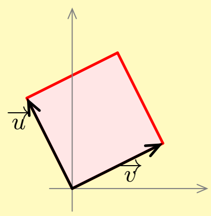
Remarquons que $\mathrm{Im}(z'\overline{z}) = ad - bc$. On en déduit que $ad - bc = |z| \times |z'| \times \sin(\theta)$. Par conséquent le déterminant $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est positif lorsque $\theta \in]0\,;\pi[$ et négatif lorsque $\theta \in]-\pi\,;0[$.

Toutefois, cette convention est arbitraire, on a décidé au départ que la base $\mathscr{B}$ était « directe », parcourue dans le sens trigonométrique. Mais on aurait pu choisir le contraire, ce qui a pour effet de changer le signe de tous les déterminants dans la base $\mathscr{B}$.

Ci-dessous, une aire positive :

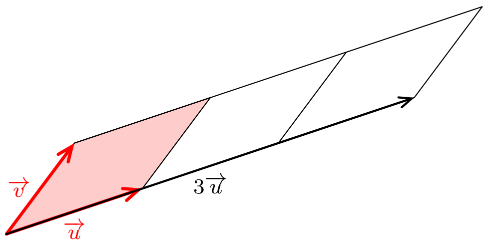


Et, ci-dessous, une aire négative :



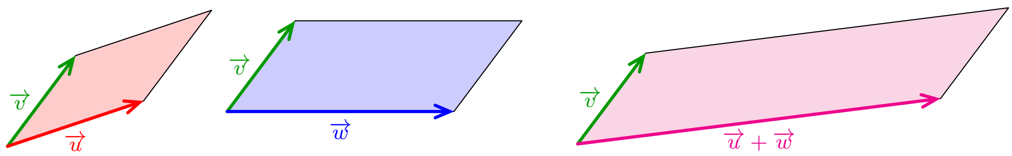
Intéressons-nous maintenant aux premières propriétés du déterminant qui découlent de considérations géométriques :

- Le déterminant $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est nul si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires (puisque c'est un parallélogramme « plat »). Il est nul en particulier si l'un des vecteurs est nul ou si deux vecteurs sont égaux.
- Il est intuitif que multiplier l'un des vecteurs par un scalaire λ non nul multiplie l'aire du parallélogramme.

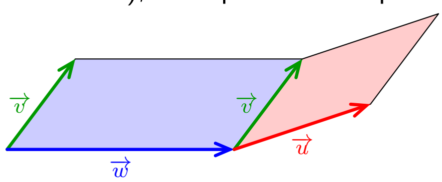


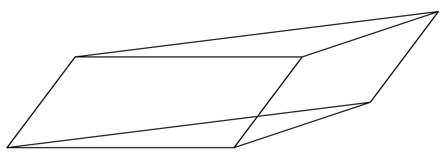
Plus généralement le déterminant est linéaire en chacun de ses vecteurs : si $\overrightarrow{w}$ est un vecteur de $\mathbb{R}^2$:

$\star$ $\det_{\mathscr{B}}(\lambda\overrightarrow{u} + \overrightarrow{w}, \overrightarrow{v}) = \lambda\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{v})$
$\star$ $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}, \lambda\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}) = \lambda\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) + \det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$



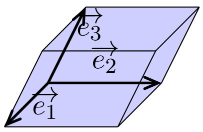
Cela ne saute pas au yeux que l'aire du parallélogramme de droite est la somme des aires des deux parallélogrammes de gauche. Mais si on déplace le parallélogramme rouge pour le coller à la droite du bleu et que l'on superpose le parallélogramme violet (formé par la somme), c'est plus convainquant (surtout si on enlève les couleurs) :



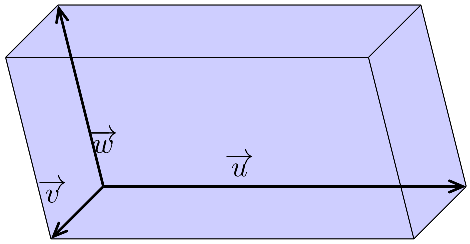


Dernière chose : on aurait aussi pu choisir une autre base pour faire des calculs. En effet il est arbitraire de décider que la base de référence est la base $\mathscr{B}$. On aurait pu prendre une autre base $\mathscr{B}'$ de $\mathbb{R}^2$ et décréter que le parallélogramme qu'elle forme est d'aire 1 : on modifie ainsi l'unité d'aire.

Lorsque $E=\mathbb{R}^3$, on procède de même : on choisit une base $\mathscr{B}=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ dont les trois vecteurs forment un volume de référence, une unité de volume. On définit ensuite le déterminant $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ de toute famille de trois vecteurs $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ dans cette base.

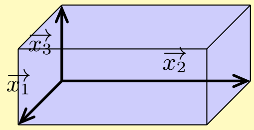


Volume de référence
$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})=1$

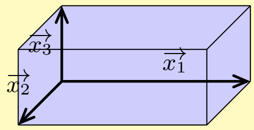


$\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$

Ci-dessous, un volume positif :



Et, ci-dessous, un volume négatif :



Le déterminant est le volume signé (positif si orienté dans le sens direct et négatif sinon) du parallélépipède formé par les vecteurs de la famille en question par rapport à la base de référence. Ce déterminant a encore les mêmes propriétés intuitives : il est nul lorsque l'un des vecteurs et engendré par les autres (c'est alors un parallélépipède plat donc de volume nul) et linéaire par rapport à ses trois coordonnées.

II Formes n-linéaires alternées

Dans ce paragraphe, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque (par forcément de dimension finie).

Nous allons nous intéresser aux applications définies sur E^n et qui vérifient les mêmes propriétés attendues de l'aire et le volume (mais en dimension supérieure) recensées dans le paragraphe introductif.

1) Applications multilinéaires

Soient $E_1,\dots,E_n$ et F des espaces vectoriels.

Définition. *On dit qu'une application $f : E_1\times\cdots\times E_n \longrightarrow F$ est multilinéaire sur $E_1\times\cdots\times E_n$ si, pour tout $i\in[\![1\,;n]\!]$ et pour tout $(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)$ dans $E_1\times\cdots\times E_{i-1}\times E_{i+1}\times\cdots\times E_n$ fixé, l'application*

$$f_i : \left\{\begin{array}{ccc} E_i & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x_1,\dots,x_{i-1},x,x_{i+1},\dots x_n)\end{array}\right.$$

est linéaire sur E_i.

- *Si $n=2$, on dit que f est une application bilinéaire. Si $n=3$, on dit que f est une application trilinéaire.*
- *Si $F=\mathbb{K}$, on dit que f est une forme multilinéaire.*
- *Si $E_1=\cdots=E_n=E$, on dit que f est n-linéaire sur E.*

Autrement dit, elle est multilinéaire si est linéaire par rapport à chacune de ses variables, les autres étant fixées quelconques.

En général, une application multilinéaire n'est pas linéaire. On verra plus bas que, pour tous $\lambda\in\mathbb{K}$ et $x\in E_1\times\cdots\times E_n$,

$$f(\lambda x)=\lambda^n f(x)$$

et non pas $\lambda f(x)$.

Remarque : L'application $f : E_1\times E_2 \longrightarrow F$ est bilinéaire si :

- Pour tout $x_2\in E_2$, $x\longmapsto f(x,x_2)$ est linéaire sur E_1, c'est-à-dire

$$\forall (x,y,\lambda)\in E_1^2\times\mathbb{K},\qquad f(\lambda x+y,x_2)=\lambda f(x,x_2)+f(y,x_2).$$

- Pour tout $x_1\in E_1$, $x\longmapsto f(x_1,x)$ est linéaire sur E_2, c'est-à-dire

$$\forall (x,y,\lambda)\in E_2^2\times\mathbb{K},\qquad f(x_1,\lambda x+y)=\lambda f(x_1,x)+f(x_1,y).$$

On reparlera plus précisément des applications bilinéaires dans le chapitre 38.

Exemples :

- *L'application* $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \longmapsto \displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k$ *est une forme* n*-linéaire sur* $\mathbb{K}$.
- *L'application* $(f_1, \dots, f_n) \longmapsto \displaystyle\int_0^1 f_1(t) \times \cdots \times f_n(t)\,\mathrm{d}t$ *est une forme* n*-linéaire sur* $\mathscr{C}([0\,;1]\,,\mathbb{R})$.
- *Pour tout* $(p, q) \in \mathbb{N}^*$, *l'application* $(A, B) \longmapsto AB$ *est une application bilinéaire sur* $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ *dans* $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$.
- *Pour tous espaces vectoriels* F *et* G, *l'application* $(f, g) \longmapsto f \circ g$ *est une application bilinéaire sur* $\mathscr{L}(F, G) \times \mathscr{L}(E, F)$ *dans* $\mathscr{L}(E, G)$.

Proposition. *Soit* f *une application multilinéaire sur* $E_1 \times \cdots \times E_n$. *Soit* $(x_1, \dots, x_n)$ *dans* $E_1 \times \cdots \times E_n$. *Si il existe* $i \in [\![1\,;n]\!]$ *tel que* $x_i = 0$, *alors* $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Démonstration. Découle du fait qu'une application linéaire est nulle en 0 et qu'une application multilinéaire est linéaire en chacune de ses variables. □

Proposition. *Soit* $p \in \mathbb{N}^*$. *Soit* f *une application multilinéaire sur* $E_1 \times \cdots \times E_n$. *Pour tout* $i \in [\![1\,;n]\!]$, *considérons une famille* $(\lambda_{1,i}, \dots, \lambda_{p,i})$ *de scalaires et une famille* $(x_{1,i}, \dots, x_{p,i})$ *de vecteurs de* E_i. *Alors*

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,1} x_{1,j}, \sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,2} x_{i,2}, \dots, \sum_{i=1}^{p} \lambda_{i,n} x_{i,n}\right) = \sum_{i_1=1}^{p} \sum_{i_2=1}^{p} \cdots \sum_{i_n=1}^{p} \lambda_{i_1,1}\lambda_{i_2,2}\dots\lambda_{i_n,n} f(x_{i_1,1}, x_{i_2,2}, \dots, x_{i_n,n}).$$

Attention, cela fait plusieurs sommes ! Ne pas oublier de changer les indices, même si les indices sont les mêmes dans les sommes originelles. De plus, les sommes ne sont pas obligées d'avoir chacune le même nombre de termes, mais nous n'appliquerons ce résultat qu'à des sommes de ce type dans ce chapitre.

Démonstration. La première somme « sort » par linéarité, ainsi que les scalaires. Puis la deuxième somme « sort » par linéarité ainsi que les scalaires, etc. □

Remarque : Si f est bilinéaire sur $E_1 \times E_2$ alors, pour tous $(x_1, \dots, x_p) \in E_1^p$, $(y_1, \dots, y_p) \in E_2^p$ et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p, \mu_1, \dots, \mu_p) \in \mathbb{K}^{2p}$,

$$f\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k, \sum_{k=1}^{p} \mu_k y_k\right) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k f\left(x_k, \sum_{j=1}^{p} \mu_j y_j\right) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{p} \lambda_k \mu_j f(x_k, y_j),$$

où on a d'abord utilisé la linéarité par rapport à la première variable puis la linéarité par rapport à la deuxième.

⚠ Il fallait bien changer d'indice pour l'une des deux sommes. En effet, si on écrit :

$$\sum_{k=1}^{p} \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \mu_k f\,(x_k, y_k)$$

alors il y a confusion sur les indices et cela laisse croire qu'on ne trouve que les termes $\lambda_1\mu_1, \dots, \lambda_n\mu_n$ alors qu'en fait on trouve tous les $\lambda_i\mu_j$! Cela ne posait pas de problème au début car les deux sommes étaient disjointes, mais si on a une somme double, il faut impérativement deux indices différents.

Corollaire. *Soit* f *une application multilinéaire sur* $E_1 \times \cdots \times E_n$. *Soient* $(x_1, \dots, x_n)$ *dans* $E_1 \times \cdots \times E_n$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$. *Alors :*

$$f(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^n f(x_1, \dots, x_n)$$

Attention, f n'est pas linéaire, donc ce n'est pas λ qui sort mais λ^n, un λ par coordonnée !

Démonstration. Découle de la linéarité par rapport à chaque variable. □

2) Formes n-linéaires alternées

Définition. *Soit f une forme n-linéaire sur E. On dit que f est une forme alternée si, pour tout $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$, $f(x_1,\dots,x_n)=0$ dès qu'il existe $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i\neq j$ et $x_i=x_j$. En d'autres termes, une forme n-linéaire est alternée si elle est nulle en tout n-uplet contenant deux éléments égaux.*

On ne parle de forme alternée que pour une forme qui est déjà n-linéaire.

Exemple : *L'aire (respectivement le volume) d'un parallélogramme (respectivement d'un pavé) formé par deux (respectivement trois) vecteurs est une forme bilinéaire (respectivement trilinéaire) alternée car vaut 0 si deux vecteurs sont égaux (cf. paragraphe I).*

Proposition. *Soit f une forme n-linéaire alternée sur E. Soit $(x_1,\dots,x_n)\in E^n$.*

- *Soit $(i,j)\in[\![1\,;n]\!]^2$ tel que $i<j$. Alors :*

$$f(x_1,\dots,\underbrace{x_j}_{i},\dots,\underbrace{x_i}_{j},\dots,x_n)=-f(x_1,\dots,x_n)$$

  En d'autres termes, quand on échange deux vecteurs, on multiplie par -1. On dit que f est antisymétrique.

- *Plus généralement, pour tout $\sigma\in S_n$,*

$$f(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(n)})=\varepsilon(\sigma)f(x_1,\dots,x_n)$$

  En d'autres termes, quand on permute les vecteurs, on multiplie par la signature de la permutation correspondante.

Le premier point s'obtient à partir du second en prenant σ la transposition $(i\quad j)$.

Démonstration.

□

Remarque : La réciproque est vraie : si f est antisymétrique (ou plus généralement vérifie la deuxième propriété de la proposition ci-dessus), alors f est alternée.

Exemple : *Soit f une forme 4-linéaire alternée sur E. Soit $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in E^4$. A-t-on $f(x_2, x_4, x_1, x_3) = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ou l'opposé ?*

- ***Méthode 1.***

- ***Méthode 2.***

Proposition. *Soit f une forme n-linéaire alternée sur E.*

- *Soient $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, $i \in [\![1\,;n]\!]$ et $(\lambda_j)_{j\in[\![1\,;n]\!]\setminus\{i\}} \in \mathbb{K}^{n-1}$. Alors :*

$$f\left(x_1, \dots, x_i + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n \\ j\neq i}} \lambda_j x_j, \dots, x_n\right) = f(x_1, \dots, x_n)$$

  En d'autres termes, on ne change pas la valeur d'une forme linéaire alternée en ajoutant à un terme une combinaison linéaire des autres termes.
- *Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une famille liée. Alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.*

Démonstration.

□

Il reste une question cruciale : existe-t-il forcément des formes n-linéaires alternées non nulles (il est immédiat que la fonction nulle de E^n dans $\mathbb{K}$ est une forme n-linéaire alternée) ? On a évoqué que l'aire d'un parallélogramme formé par deux vecteurs est une forme bilinéaire alternée et que le volume d'un pavé formé par trois vecteurs est une forme trilinéaire alternée. Mais déjà qu'est ce que l'aire et le volume rigoureusement ? Que dire en dimension supérieure ou égale à 3 ?

III Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base

Dans tout le reste du chapitre E désigne un espace vectoriel de dimension finie égale à n avec $n \geqslant 2$.

1) Déterminant dans une base

Définition. *Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$, si $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i \leqslant n}$ désigne la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$, on appelle déterminant de $(x_1, \dots, x_n)$ dans la base $\mathscr{B}$ le scalaire*

$$\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \dots a_{\sigma(n),n} = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{\sigma(i),i}.$$

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Cela signifie que, pour tout $j \in [\![1 \,;n]\!]$, $a_{1,j}, \dots, a_{n,j}$ sont les coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathscr{B}$, c'est-à-dire

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} a_{i,j} e_i.$$

Remarques :

- Quand E est de dimension n, on ne définit le déterminant que d'une famille à n vecteurs (le même nombre de vecteurs que la dimension). Si on est en dimension 2, on ne peut calculer que le déterminant de deux vecteurs, si on est en dimension 3, on ne peut calculer que le déterminant de trois vecteurs, etc.
- En changeant la base, les coordonnées des vecteurs de la famille changent aussi et donc le déterminant aussi a priori. On parlera donc toujours du déterminant d'une famille **dans une base**.

Théorème. *L'application $\det_{\mathscr{B}}$, ainsi définie sur E^n, est une forme n-linéaire alternée sur E vérifiant $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.*

DÉMONSTRATION.

□

Exemples :

Remarque : On voit bien qu'il n'est pas raisonnable d'utiliser cette définition pour un déterminant de 4 vecteurs puisqu'elle ferait intervenir 24 termes, puis 120 s'il y a 5 vecteurs, etc. Dans le paragraphe VI, on verra comment calculer des déterminants sans avoir recours à cette formule. Mais avant ça, poursuivons l'étude théorique des déterminants.

Théorème. *L'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1. En d'autres termes, pour toute base $\mathscr{B}$ de E, $(\det_{\mathscr{B}})$ est une base de $\Lambda_n(E)$, c'est-à-dire que, pour toute forme n-linéaire alternée f sur E, il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \times \det_{\mathscr{B}}$.*

On a $\lambda = f(\mathscr{B})$.

Démonstration.

$\square$

Corollaire. $\det_{\mathscr{B}}$ *est l'unique forme* n*-linéaire alternée qui vaut* 1 *en* $\mathscr{B}$.

DÉMONSTRATION. On sait déjà que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$. Si f est n-linéaire alternée et vaut 1 en $\mathscr{B}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f = \lambda \det_{\mathscr{B}}$ donc $1 = \lambda \times 1$ (en évaluant en $\mathscr{B}$) donc $\lambda = 1$ et donc $f = \det_{\mathscr{B}}$. $\square$

2) Propriétés des déterminants

L'expression de $\det_{\mathscr{B}}$ dépend de la base $\mathscr{B}$ puisqu'elle fait fait intervenir les coordonnées des vecteurs dans cette base. Si $\mathscr{B}'$ est une autre base, quel lien y a-t-il entre $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{B}'}$? Et que peut-on affirmer à propos de $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}')$?

Corollaire. *Soient* $\mathscr{B}$ *et* $\mathscr{B}'$ *deux bases de* E*. Alors :*

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad \det_{\mathscr{B}'}(x_1, \dots, x_n) = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

Cette formule est à rapprocher de la formule de changement de base

$$X_{\mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}',\mathscr{B}} X_{\mathscr{B}}$$

vue dans le chapitre 32.

DÉMONSTRATION.

$\square$

Proposition. *Soit* $\mathscr{B}$ *une base de* E*. Une famille* $\mathscr{B}' = (x_1, \dots, x_n)$ *de vecteurs de* E *est une base de* E *si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$*. Dans ce cas,*

$$\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \frac{1}{\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})}.$$

En d'autres termes, une famille à n éléments est une base si et seulement si son déterminant (dans n'importe quelle base) est non nul. Une fois que l'on aura vu comment calculer « facilement » des déterminants, cela deviendra une nouvelle façon de montrer qu'une famille est une base.

DÉMONSTRATION.

... Et c'est tout pour le moment pour les propriétés. Mais on en sait déjà beaucoup puisque $\det_{\mathscr{B}}$ est une forme n-linéaire alternée sur E^n donc, pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$:

- Pour sortir une constante λ de $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$, il suffit qu'elle soit en facteur **d'un** des vecteurs de la famille coordonnée. Si elle est en facteur de plusieurs coordonnées, on peut la sortir plusieurs fois. En particulier,

$$\det_{\mathscr{B}}(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

- On peut de la même façon sortir les sommes pour chaque coordonnée.
- Quand on échange deux vecteurs, on multiplie par -1. Plus généralement, quand on permute les n vecteurs, on multiplie par la signature de la permutation correspondante.
- On peut rajouter une combinaison des autres vecteurs à l'un des vecteurs sans changer la valeur de $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$.

Si on sort plusieurs sommes, attention à prendre des indices distincts !

Remarque : Revenons brièvement sur ce qu'on appelé l'orientation d'une base dans le paragraphe introductif. On peut définir sur l'ensemble des bases de E une relation $\sim$ par : pour toutes bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E, $\mathscr{B} \sim \mathscr{B}'$ si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') > 0$. Nous montrerons en exercices qu'il s'agit d'une relation d'équivalence qui possède deux classes d'équivalences. On choisit alors arbitrairement l'une de ces deux classes et on dit que toutes les bases de cette classe sont directes et toutes le autres sont indirectes. En particulier, puisque le déterminant est alterné, lorsqu'on permute des éléments d'une base, elle garde la même orientation lorsque la permutation associé est de signature 1 et elle change d'orientation lorsque sa signature est -1 (en particulier, échanger deux vecteurs, change l'orientation de la base).

IV Déterminant d'un endomorphisme

On note toujours $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des forme n-linéaires alternées sur E.

1) Définition

Lemme. *Soit f une forme n-linéaire alternée sur E. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. L'application*

$$f_u : \begin{cases} E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & f(u(x_1), \dots, u(x_n)) \end{cases}$$

est une forme n-linéaire alternée sur E.

Démonstration. L'application f_u est bien sûr à valeurs dans $\mathbb{K}$. Elle est n-linéaire car f l'est et u est linéaire. Enfin, comme f est alternée, f_u aussi. □

Proposition/Définition. *Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Il existe un unique scalaire $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que*

$$\forall f \in \Lambda_n(E), \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in E^n, \quad f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \alpha \times f(x_1, \dots, x_n).$$

Ce scalaire est appelé déterminant de l'endomorphisme u et noté $\det(u)$.

En d'autres termes, $\det(u)$ est la « constante de proportionnalité » qu'on applique à $f(x_1, \dots, x_n)$ lorsqu'on applique f à $u(x_1), \dots, u(x_n)$. Notons que la définition de $\det(u)$ ne dépend pas de la base choisie, contrairement au déterminant d'une famille de vecteurs.

Démonstration.

$\square$

Corollaire. *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Alors :*

$$\det_{\mathscr{B}}(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n).$$

En particulier :

$$\det(u) = \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)).$$

En d'autres termes, le déterminant d'un endomorphisme u est le déterminant de l'image d'une base par u dans la base en question.

En particulier, la quantité $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$ est indépendante de la base choisie : on aurait pu définir le déterminant de u de cette manière (et c'est d'ailleurs comme ça qu'on le définit dans certains ouvrages).

Démonstration. La première égalité vient de la proposition précédente avec $f = \det_{\mathscr{B}}$ qui est bien une forme n-linéaire alternée, et la deuxième vient du fait que $\det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$. $\square$

Exemple : *Soit $u : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + 3y, y - x)$. Alors $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$. Si (e_1, e_2) désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a :*

Cf. paragraphe III.1 pour cette formule.

2) Propriétés

Proposition. *Soient $u \in \mathscr{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.*

Démonstration. Soit $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. D'après la proposition précédente,

$$\det(\lambda u) = \det_{\mathscr{B}}(\lambda u(e_1), \dots, \lambda u(e_n))$$

Par n-linéarité de $\det_{\mathscr{B}}$, on obtient

$$\det(\lambda u) = \lambda^n \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \lambda^n \det(u). \qquad \square$$

Remarques :

- ⚠ Le déterminant d'un endomorphisme n'est pas linéaire : on n'a pas $\det(\lambda u) = \lambda \det(u)$!
- Pour autant, il est impropre de dire que le déterminant d'un endomorphisme est n-linéaire puisque le déterminant d'un endomorphisme n'est pas défini sur un n-uplet. Néanmoins, on peut garder à l'esprit qu'il vérifie les mêmes conditions qu'une application n-linéaire.

Le déterminant d'une famille de vecteurs (et, dans le paragraphe suivant, d'une matrice) est n-linéaire, mais c'est un (léger) abus de langage de dire que le déterminant d'un endomorphisme est n-linéaire.

Proposition (déterminant de l'identité). *On a $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.*

Démonstration. Si $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de E, alors

$$\det(\mathrm{Id}_E) = \det_{\mathscr{B}}(\mathrm{Id}_E(e_1), \dots, \mathrm{Id}_E(e_n)) = \det_{\mathscr{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1. \qquad \square$$

Proposition (déterminant d'une composée). *Soit $(u, v) \in \mathscr{L}(E)^2$. Alors :*

$$\det(u \circ v) = \det(u) \times \det(v).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\det(u^n) = \det(u)^n$.

En d'autres termes, le déterminant d'une composée est le produit des déterminants.

DÉMONSTRATION.

□

Proposition (caractérisation des automorphismes). *Un endomorphisme u de E est bijectif si et seulement si $\det(u) \neq 0$. Dans ce cas, on a*

$$\det\left(u^{-1}\right) = \frac{1}{\det(u)}.$$

DÉMONSTRATION.

□

Corollaire. *Le déterminant induit un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathbb{K}^*$, c'est-à-dire que la restriction de $\det$ à $\mathrm{GL}(E)$ est un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathbb{K}^*$.*

DÉMONSTRATION. Le fait que le déterminant aille de $\mathrm{GL}(E)$ dans $\mathbb{K}^*$ découle de la proposition ci-dessus et le fait que ce soit un morphisme découle de la proposition qui la précède. □

Ce morphisme de groupe est surjectif et non injectif. Nous en reparlerons dans le paragraphe IV.2.

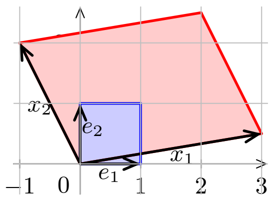
3) Interprétation géométrique

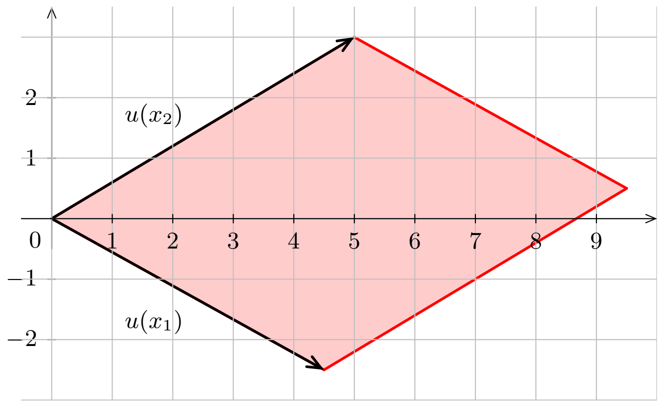
Soient $\mathscr{B}$ une base et $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. On a vu que $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$ s'interprète comme le volume du pavé formé par $x_1, \dots, x_n$. Ainsi, lorsque $u \in \mathscr{L}(E)$, la formule

$$\det_{\mathscr{B}}(u(x_1), u(x_2), \dots, u(x_n)) = \det(u) \times \det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n)$$

signifie que le volume du pavé formé par $u(x_1), \dots, u(x_n)$ est égal au volume du pavé formé par $x_1, \dots, x_n$, multiplié par $\det(u)$. En d'autres termes, quand on applique un endomorphisme u, on multiplie les volumes par $\det(u)$.

Exemple : *On a calculé dans le paragraphe IV.1 que $u : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + 3y, y - x)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ de déterminant 4. Dès lors, pour toute famille (x_1, x_2) de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, l'aire du parallélogramme formé par $u(x_1)$ et $u(x_2)$ vaut quatre fois celui formé par les vecteurs x_1 et x_2. Ci-dessous une illustration avec $x_1 = \left(3, \frac{1}{2}\right)$ et $x_2 = (-1, 2)$:*





V Déterminant d'une matrice carrée

1) Définitions

Définition. *Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle déterminant de A et on note $\det(A)$ le scalaire :*

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} a_{\sigma(2),2} \cdots a_{\sigma(n),n}$$

On le note

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n]} \quad \text{ou} \quad \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

si aucune ambiguïté sur la taille de la matrice n'est possible.

Cela n'a aucun sens de parler de déterminant pour une matrice qui n'est pas carrée.

Cette formule a un sens lorsque $n = 1$: le déterminant d'une matrice 1×1 est juste égal à l'unique coefficient de la matrice. C'est peu intéressant mais cela peut être utile dans des relations de récurrence (cf. paragraphe IV.4.c).

Remarque : Nous verrons au paragraphe VI des moyens pratiques pour calculer le déterminant d'une matrice sans passer par le groupe symétrique. Cependant, cette définition doit être connue sur le bout des doigts car elle permet de montrer certains résultats plus abstraits.

Proposition (définitions équivalentes). *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Le déterminant de A est aussi :*

- *le déterminant de ses vecteurs colonnes (dans la base canonique).*
- *le déterminant de tout endomorphisme représenté par A.*

Ces trois définitions sont équivalentes : on aurait pu définir le déterminant avec n'importe laquelle d'entre elles ! Dans certains ouvrages, on trouve d'ailleurs l'une des deux autres définitions.

Démonstration.

- Par définition, $\det(A)$ est le déterminant des vecteurs dont les coordonnées dans la base canonique sont les $a_{i,j}$. En d'autres termes, $\det(A) = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \dots, C_n)$ où $C_1, \dots, C_n$ sont les vecteurs colonnes de A et $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- Soit u un endomorphisme représenté par A dans une base $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$. Les vecteurs colonnes de A sont les coordonnées dans la base $\mathscr{B}$ de $u(e_1), \dots, u(e_n)$. Dès lors :
$$\det(A) = \det_{\mathscr{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(u). \qquad \square$$

Remarques :

- La définition de $\det(A)$ est une combinaison linéaire à coefficients dans $\{-1; 1\}$ de produits des coefficients de A. Par conséquent :

⋆ Le déterminant d'une matrice à coefficients entiers est un entier.

⋆ Le déterminant d'une matrice est polynomial en ses coefficients.

⋆ Si $(\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{n,n})$ sont n^2 fonctions continues sur $\mathbb{R}$, alors la fonction

$$x \mapsto \begin{vmatrix} \varphi_{1,1}(x) & \varphi_{1,2}(x) & \dots & \varphi_{1,n}(x) \\ \varphi_{2,1}(x) & \varphi_{2,2}(x) & \dots & \varphi_{2,n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_{n,1}(x) & \varphi_{n,2}(x) & \dots & \varphi_{n,n}(x) \end{vmatrix}$$

est une fonction continue (car somme, produit et différence de fonctions continues).

- Les opérations intervenant dans le calcul du déterminant sont uniquement la somme, le produit et la soustraction. Ces opérations peuvent se réaliser dans n'importe quel anneau. Ainsi, même si nous nous sommes placés dans un corps $\mathbb{K}$ dans ce chapitre, on peut sans problème généraliser la définition du déterminant d'une matrice à une matrice à coefficients dans un anneau A commutatif. Le déterminant reste n-linéaire et alterné et affecte la valeur 1 à $\det(\mathrm{I}_n)$. On pourra aussi faire des développement par rapport à une ligne ou à une colonne (cf. paragraphe IV.4) et le déterminant reste multiplicatif si A est intègre (mais la preuve est plus difficile). En revanche, on perd toute notion d'endomorphisme, la méthode du pivot de Gauss n'est plus valable (puisqu'on ne peut pas diviser dans un anneau) et une matrice de déterminant non nul n'est pas forcément inversible.

  Par exemple $2\mathrm{I}_n$ est de déterminant $4 \neq 0$ mais n'est pas inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

  Un exemple important consiste à considérer des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}[X]$. Nous le ferrons dans le paragraphe VI.4.c avec le déterminant de Vandermonde et l'an prochain avec les polynômes caractéristique.

Il sera montré l'an prochain que le polynôme $\det(X\mathrm{I}_n - A)$ est un polynôme annulateur de A (c'est le théorème de Caylay-Hamilton).

2) Propriétés

a) Propriétés héritées de celles du déterminant d'un endomorphisme

Le fait que le déterminant d'une matrice soit le déterminant de tout endomorphisme représenté par cette matrice donne de façon immédiate les résultats suivants, à l'aide du paragraphe IV.2 :

Proposition. *Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.*

Proposition. *On a $\det(I_n) = 1$.*

Proposition (déterminant d'un produit). *Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$. Alors :*

$$\det(A \times B) = \det(A) \times \det(B).$$

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\det(A^n) = \det(A)^n$.

Proposition (Caractérisation des matrices inversibles). *Une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$, et alors :*

$$\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}.$$

On peut alors ajouter $\det(A) \neq 0$ et $\det(u) \neq 0$ à la longue liste des critères d'inversibilité d'une matrice, vue dans le chapitre 32.

Corollaire. *Le déterminant induit un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$, c'est-à-dire que la restriction de $\det$ à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est un morphisme de groupes de $\mathrm{GL}(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}^*$.*

Là aussi, le déterminant est alors surjectif et non injectif : cf. VI.2.

On en déduit le résultat suivant :

Corollaire (invariance du déterminant par similitude). *Deux matrices semblables ont même déterminant.*

Démonstration.

□

Remarques :

- ⚠ La réciproque est fausse !

  Par exemple, toute matrice non inversible a un déterminant nul, alors que la matrice nulle n'est semblable qu'à elle-même (donc une matrice non inversible non nulle et la matrice nulle ont même déterminant mais ne sont pas semblables).

  Ce résultat est surtout utile par contraposée : si deux matrices n'ont pas le même déterminant, on peut affirmer directement qu'elles ne sont pas semblables.

- ⚠ Deux matrices carrées équivalentes n'ont pas forcément le même déterminant !

  Par exemple I_n et $2I_n$ sont équivalentes (car elles ont le même rang) mais $\det(I_n) = 1$ et $\det(2I_n) = 2^n \neq 1$.

- On peut donc ajouter ces informations à la longue liste du chapitre 32 :

Encore une fois : il'y a pas de caractérisation simple de la similitude !

b) Déterminant d'une transposée

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A^\top) = \det(A)$.*

Démonstration.

□

c) Propriétés héritées du caractère n-linéaire alterné du déterminant

Proposition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $\det(A)$ est :*

- *une forme n-linéaire alternée par rapport aux colonnes de A.*
- *une forme n-linéaire alternée par rapport aux lignes de A.*

Démonstration. Le premier point découle du fait que $\det(A)$ est le déterminant des vecteurs colonnes de A. Le second du fait que $\det(A) = \det\left(A^\top\right)$ et que les lignes de A sont les colonnes de $A^\top$. □

On en déduit le résultat suivant (cf. paragraphe III.2) :

Corollaire (règles de calcul du déterminant). *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Notons $C_1, \dots, C_n$ ses colonnes et notons $L_1, \dots, L_n$ ses lignes.*

- *Pour sortir une constante de $\det(A)$, il suffit qu'elle soit en facteur **d'une** ligne ou **d'une** colonne de A. Si elle est en facteur de plusieurs lignes ou de plusieurs colonnes de A, on la sort plusieurs fois.*

  En particulier : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.
- *Échanger deux lignes ou deux colonnes multiplie le déterminant par -1.*
- *Multiplier une ligne ou une colonne par un scalaire λ multiplie le déterminant par ce scalaire.*
- *Effectuer une opération du type $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ (avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$) ne modifie pas le déterminant.*

  Plus généralement, ajouter à une ligne une combinaison linéaire des autres lignes, ou ajouter à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes, ne change pas la valeur du déterminant.
- *Si les vecteurs colonnes ou les vecteurs lignes forment une famille liée, alors le déterminant est nul.*

Plus généralement (mais cela arrive rarement en pratique) permuter des lignes ou des colonnes multiplie le déterminant par la signature de la permutation correspondante.

La réciproque est vraie, cf. paragraphe V.2.a.

Le déterminant n'est pas linéaire ! Non seulement, on a déjà vu que, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ (et non pas λA) mais, si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, **ON NE PEUT RIEN AFFIRMER** à propos de $\det(A+B)$: déterminant et somme font très mauvais ménage !

On montrera même en exercice que, si une matrice A vérifie,pour tout $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$,

$$\det(A+B) = \det(A) + \det(B)$$

alors A est la matrice nulle !

VI Calculs de déterminants

Si on veut calculer le déterminant d'une famille de n vecteurs d'un espace de dimension n dans une base donnée, on écrit la matrice de cette famille dans la base en question (en effet, le déterminant d'une matrice est égal au déterminant de ses vecteurs colonnes). Si on veut calculer le déterminant d'un endomorphisme en dimension finie, on calcule le déterminant d'une matrice qui le représente dans une base au choix, si possible bien choisie pour que la matrice soit la plus simple possible (typiquement triangulaire ou avec beaucoup de 0). Intéressons-nous donc à des méthodes pour calculer le déterminant d'une matrice.

1) Matrices carrées d'ordre 2 ou 3

Dans le paragraphe III.1, nous avons vu les exemples des déterminants d'une famille de deux vecteurs de $\mathbb{K}^2$ et d'une famille de trois vecteurs de $\mathbb{K}^3$. Avec l'écriture matricielle, on obtient :

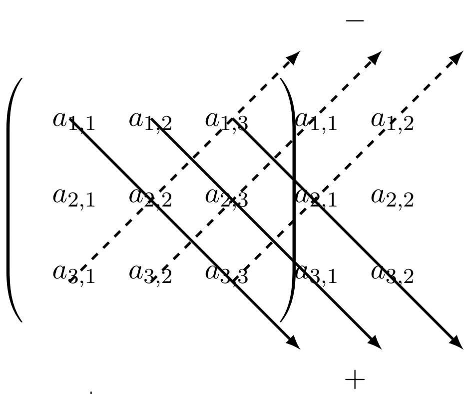
Proposition. *Soit* $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. *Alors*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2} - a_{2,1}a_{1,2}.$$

Proposition (règle de Sarrus). *Soit* $(a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{K})$. *Alors*

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3} + a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1} + a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} - a_{3,1}a_{2,2}a_{1,3} - a_{3,2}a_{2,3}a_{1,1} - a_{3,3}a_{2,1}a_{1,2}.$$

Remarque : Il existe un moyen simple de visualiser la règle de Sarrus :



Exemple : *Calculons* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

En particulier, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible, ses vecteurs colonnes sont libres, ils forment une base de* $\mathbb{K}^3$*, idem pour les vecteurs lignes, etc.*

Cf. toutes les équivalences du chapitre 32.

Remarque : Il ne faut pas forcément foncer tête baissée dans les calculs et appliquer la règle de Sarrus dès qu'on a un déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3. Parfois, on peut simplifier la situation avec des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes avant de l'appliquer (ou de le calculer directement).

Exemple : *Pour quelle valeur de* x *la matrice*

$$A(x) = \begin{pmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x+1 & x+2 & x+3 \\ x+2 & x+3 & x+4 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible ?

Essayez d'appliquer la règle de Sarrus directement... vous vous retrouverez avec une somme de six termes polynomiaux qu'il faudra développer avant de factoriser pour déterminer les racines.

Hélas (comme on l'a déjà dit) à partir d'une matrice d'ordre 4, il n'y a plus de formule simple pour calculer directement le déterminant. Il nous faut développer d'autres techniques.

2) Matrices triangulaires et diagonales

Proposition. *Le déterminant d'une matrice triangulaire est égal au produit de ses coefficients diagonaux.*

On retrouve le fait qu'une matrice triangulaire ou diagonale est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont tous non nuls.

DÉMONSTRATION.

Évidemment, ce résultat est faux pour une matrice quelconque (ni triangulaire, ni diagonale).

□

Exemples :

- *Si* $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\det(\lambda I_n) = \begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \lambda & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^n.$$

même si on le savait déjà puisque $\det(I_n) = 1$ *et puisque le déterminant est* n*-linéaire en les colonnes de la matrice donc* $\det(\lambda I_n) = \lambda^n \det(I_n) = \lambda^n$.

- *Calculons le déterminant de l'endomorphisme* $u : P \longmapsto P - P'$ *de* $\mathbb{K}_n[X]$*. Sa matrice canoniquement associée est*

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(1) & u(X) & u(X^2) & \cdots & \cdots & u(X^n) \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -2 & & & 0 \\ \vdots & \vdots & 1 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & -n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ X \\ X^2 \\ \vdots \\ X^{n-1} \\ X^n \end{array}.$$

On en donc $\det(u) = \det(A) = 1$.

Remarques :

- En particulier, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$,

$$\begin{vmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \lambda$$

ce qui prouve que l'application $\det : \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}^*$ est un morphisme de groupes surjectif. En prenant un endomorphisme représenté par cette matrice, il en découle que le morphisme $\det : \mathrm{GL}(E) \longrightarrow \mathbb{K}^*$ est aussi surjectif.

- Ce morphisme n'est pas injectif (lorsque $n \geqslant 2$, hypothèse dans tout ce chapitre) puisqu'alors

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

donc $\mathrm{Ker}(\det) \neq \{I_n\}$. De même, $\det : \mathrm{GL}(E) \longrightarrow \mathbb{K}^*$ n'est pas injectif.

- Le noyau du déterminant (restreint à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$) est noté $\mathrm{SL}_n(\mathbb{K})$ et est appelé groupe spécial linéaire d'ordre n. C'est l'ensemble des matrices ayant un déterminant égal à 1 (et c'est donc un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$). Par analogie, on note $\mathrm{SL}(E)$ le noyau de la restriction du déterminant à $\mathrm{GL}(E)$: c'est l'ensemble des endomorphismes ayant un déterminant égal à 1. C'est toujours un sous-groupe de $\mathrm{GL}(E)$. Plus précisément, en revenant aux aires, volumes etc. du paragraphe IV.3, $\mathrm{SL}(E)$ est l'ensemble des endomorphismes qui laissent le volume invariant.

3) Utilisation de la méthode du pivot de Gauss

Rappelons que :

- échanger deux lignes ou deux colonnes, multiplie le déterminant par -1.
- Multiplier une ligne ou une colonne par un scalaire λ multiplie le déterminant par ce scalaire.
- Effectuer une opération du type $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ (avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$) ne modifie pas le déterminant.

Ainsi, un moyen simple de calculer le déterminant d'une matrice A et de « mettre » A sous forme triangulaire supérieure à l'aide de l'algorithme du pivot de Gauss. Toutefois, lorsque l'on effectue une opération du $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ (avec $\lambda \neq 0$), le déterminant est alors multiplié par λ, c'est-à-dire que si on part de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et si on note $\tilde{A}$ la matrice obtenue en effectuant l'une de ces deux opérations élémentaires, alors $\det(\tilde{A}) = \lambda \det(A)$, c'est-à-dire que le déterminant de la nouvelle matrice est égal au déterminant de l'ancienne multiplié par λ. Mais, comme c'est $\det(A)$ qui nous intéresse : on a alors $\det(A) = \dfrac{1}{\lambda}\det(\tilde{A})$, c'est-à-dire que le déterminant de la matrice originelle est le déterminant de la matrice après modification, **divisé** par λ. Ainsi, on réalise l'algorithme du pivot de Gauss (sur les lignes ou les colonnes ou les deux) avec les précautions suivantes :

- Quand on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1.
- Quand on multiplie une ligne ou une colonne par un scalaire λ, on **divise** le nouveau déterminant par λ..
- Effectuer une opération du type $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ (avec $i \neq j$ et $\alpha \in \mathbb{K}$) ne modifie pas le déterminant.
- Quand on effectue une opération du type $L_i \leftarrow \lambda L_i + \alpha L_j$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i + \alpha C_j$ (avec $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$ et $\alpha \in \mathbb{K}$), on **divise** le nouveau déterminant par ce scalaire.

C'est un mix des deux dernières opérations, on effectue d'abord l'opération $L_i \leftarrow L_i + \frac{\alpha}{\lambda} L_j$ ou $C_i \leftarrow C_i + \frac{\alpha}{\lambda} C_j$ (ce qui n'a aucun effet) puis $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_i \leftarrow \lambda C_i$ respectivement.

Exemples :

- *Calculons le déterminant de* $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & -1 \\ 4 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 9 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.*

- *Notons* $A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -4 & -5 & -3 \\ 4 & 6 & 4 \end{pmatrix}$. *Soit* $x \in \mathbb{C}$. *Posons* $P(x) = \det(x\mathrm{I}_n - A)$. *On a :*

On peut vérifier que

$$(A - \mathrm{I}_3)^2(A - 2\mathrm{I}_3) = 0_3.$$

Ceci sera montré plus généralement l'an prochain : c'est le théorème de Caylay-Hamilton.

4) Développement par rapport à une ligne ou une colonne

a) Résultat théorique

Lemme. *Soit* $n \geqslant 3$. *Soit* $B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ *et soit :*

$$A = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & * & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right)$$

Alors $\det(A) = \det(B)$.

En d'autres termes, A est une matrice carrée de taille n avec un 1 en haut à gauche, le reste de la première colonne étant nul, la matrice extraite de taille $n-1$ en bas à droite étant égale à B, et les étoiles représentant des coefficients quelconques, nuls ou non.

Démonstration. En appliquant la méthode du pivot de Gauss du paragraphe précédent en partant de B, on arrive à une matrice triangulaire supérieure à l'aide d'une succession d'opérations élémentaires sur les lignes (par exemple), c'est-à-dire qu'il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \in \mathbb{K}^{n-1}$ et $\alpha \in \mathbb{K}$ tels que :

$$\det(B) = \alpha \times \begin{vmatrix} \lambda_1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & \lambda_2 & \dots & \bullet \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix}$$

Les points représentent des coefficients quelconques (nuls ou non) et le scalaire α vient des opérations faites sur les déterminants (voir paragraphe ci-dessus). En particulier, $\det(B) = \alpha \times \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_{n-1}$. Si on applique les mêmes opérations sur A sans toucher à la première ligne ni à la première colonne, on transforme B en la matrice triangulaire ci-dessus, et les constantes « qui sortent de la matrice à chaque opération élémentaire » sont les mêmes, si bien qu'on arrive à l'égalité suivante :

> Quand on parle des mêmes opérations, il est sous-entendu qu'il y a un décalage : si la première opération sur B consiste à faire $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, on commencera, sur A, par effectuer l'opération $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$. On ne s'intéresse qu'à B, on ne touche pas à la première ligne ni la première colonne.

$$\det(A) = \alpha \times \begin{vmatrix} 1 & * & * & \dots & * \\ 0 & \lambda_1 & \bullet & \dots & \bullet \\ 0 & 0 & \lambda_2 & \dots & \bullet \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_{n-1} \end{vmatrix} = \alpha \times \lambda_1 \times \cdots \times \lambda_{n-1} = \det(B).$$

□

Définition. *Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

- *Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. On appelle mineur de position (i,j) et on note $\Delta_{i,j}(A)$ le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la colonne j.*
- *Soit $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$. On appelle cofacteur de position (i,j) le scalaire $(-1)^{i+j} \times \Delta_{i,j}(A)$.*

Remarque : $\Delta_{i,j}(A)$ est donc le déterminant ci-dessous :

> En particulier, un mineur d'une matrice de taille n est un déterminant de taille $n-1$.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i,1} & \dots & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

et donc il s'agit de

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ & \vdots & & \vdots & & \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}_{[n-1]}$$

Proposition (développement par rapport à une colonne). *Soit $n \geqslant 3$. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$:*

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

On dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la $j^{\text{ième}}$ colonne.

Démonstration. Sot $j \in [\![1\,;n]\!]$. Puisque

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ a_{i,j} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ \\ \end{matrix},$$

par linéarité du déterminant par rapport à la $j^{\text{ième}}$ colonne,

$$\det(A)=\sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & 0 & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^n a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \dots & 0 & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i,1} & \dots & 1 & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On veut amener ce 1 en haut à gauche : on effectue les $i-1$ échanges $L_i \leftrightarrow L_{i-1}$ puis $L_{i-1} \leftrightarrow L_{i-2}$ jusqu'à $L_1 \leftrightarrow L_2$, ce qui multiplie à chaque fois le déterminant par -1, ce qui donne :

$$\det(A)=\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} a_{i,j} \begin{vmatrix} a_{i,1} & \dots & 1 & \dots & a_{i,n} \\ a_{1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & 0 & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & 0 & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

On peut aussi appliquer directement le i-cycle $(1 \quad 2 \quad \cdots i)$ aux lignes donc on multiplie le déterminant par $(-1)^{i-1}$, la signature de ce cycle. Idem ensuite pour les colonnes, on peut aussi appliquer directement le j-cycle $(1 \quad 2 \quad \cdots j)$ aux colonnes donc on multiplie le déterminant par $(-1)^{j-1}$.

On effectue ensuite les $j-1$ échanges de colonnes $C_j \leftrightarrow C_{j-1}$ puis $C_{j-1} \leftrightarrow C_{j-2}$ et ainsi de suite jusqu'à $C_1 \leftrightarrow C_2$, ce qui multiplie cette fois le déterminant par $(-1)^{j-1}$, d'où :

$$\det(A)=\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}(-1)^{j-1} a_{i,j} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \begin{vmatrix} 1 & a_{i,1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ 0 & a_{1,1} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1,n} \\ & \vdots & & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\ 0 & a_{n,1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

Pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$, pour la $i^{\text{ème}}$ terme de la somme, on se trouve dans la situation du lemme précédent, avec, à la place de B, la matrice extraite de A en supprimant la ligne i et la ligne j (dont le on déterminant est $\Delta_{i,j}(A)$ par définition). D'après le lemme précédent, le déterminant ci-dessus est égal au résultat voulu. $\square$

Corollaire (développement par rapport à une ligne). *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors, pour tout $i \in [\![1\,;n]\!]$:*

$$\det(A)=\sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{i,j} \Delta_{i,j}(A).$$

On dit qu'on a développé le déterminant par rapport à la $i^{\text{ème}}$ ligne.

Démonstration. Soit $i \in [\![1\,;n]\!]$. En appliquant le résultat précédent à $A^\top$:

$$\det\left(A^\top\right) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\left(A^\top\right)_{j,i}\Delta_{j,i}\left(A^\top\right) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}(A)_{i,j}\,\Delta_{i,j}(A)$$

ce qui permet de conclure puisque A et $A^\top$ ont même déterminant. $\square$

b) En pratique

Ces deux formules peuvent paraître obscures au premier abord. Expliquons un peu ce que veut dire la première :

> Pourtant, nous allons nous en servir constamment, et elles nous permettront de calculer plutôt efficacement la plupart des déterminants.

$$\forall j \in [\![1\,;n]\!], \qquad \det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{i,j}\Delta_{i,j}(A),$$

où, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, $\Delta_{i,j}(A)$ est le déterminant de la matrice extraite de A en barrant la ligne i et la colonne j. Par conséquent, si $j \in [\![1\,;n]\!]$, ce qu'on appelle développer par rapport à la $j^{\text{ième}}$ colonne consiste à faire les opérations suivantes :

- On prend le premier terme de la colonne, $a_{1,j}$, on le multiplie par le déterminant obtenu en barrant la ligne 1 et la colonne j, c'est-à-dire la ligne et la colonne du terme en question :

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}$$

  et enfin on le multiplie par $(-1)^{j+1}$.

- On prend le deuxième terme de la colonne, $a_{2,j}$, on le multiplie par le déterminant obtenu en barrant la ligne 2 et la colonne j, c'est-à-dire la ligne et la colonne du terme en question :

$$\begin{vmatrix}
a_{1,1} & \cdots & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1,n} \\
a_{2,1} & \cdots & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2,n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{i-1,1} & \cdots & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\
a_{i,1} & \cdots & \cdots & a_{i,j-1} & a_{i,j} & a_{i,j+1} & \cdots & a_{i,n} \\
a_{i+1,1} & \cdots & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
a_{n,1} & \cdots & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{n,n}
\end{vmatrix}$$

et enfin on le multiplie par $(-1)^{j+2}$.

- Et ainsi de suite : on parcourt la colonne de haut en bas, on multiplie chaque terme de la colonne par $(-1)^{i+j}$ c'est-à-dire $(-1)^{\text{l'indice de la ligne + l'indice de la colonne}}$, et on multiplie encore par le déterminant obtenu en barrant la ligne et la colonne du terme en question.
- Et on somme les n termes obtenus.

Remarques :

- On peut faire la même chose sur une ligne : on parcourt la ligne de gauche à droite, on multiplie chaque terme de la ligne par $(-1)^{i+j}$ c'est-à-dire :
$$(-1)^{\text{l'indice de la ligne + l'indice de la colonne}}$$
et on multiplie encore par le déterminant obtenu en barrant la ligne et la colonne du terme en question.
- Ce résultat est valable pour n'importe quelle colonne et n'importe quelle ligne. Dans la pratique, on essaye de choisir la colonne ou la ligne qui va minimiser les calculs.
- Calculer un déterminant de taille n se fait donc en calculant $n-1$ déterminants de taille $n-1$, et un déterminant de taille $n-1$ se calcule à son tour en calculant $n-1$ déterminants de taille $n-2$ etc. c'est-à-dire qu'on a une complexité en $n!$, ce qui est énorme ! On s'en tire en fait en développant par rapport à une ligne qui a beaucoup de 0, et c'est comme ça qu'on applique cette méthode en pratique : on choisit la ligne ayant le moins de termes non nuls (un, deux, trois grand maximum). Si aucune ligne n'a beaucoup de zéros, on commence par en créer à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes, c'est-à-dire qu'on applique la méthode du pivot de Gauss jusqu'à pouvoir développer efficacement : cf. exemples des paragraphes suivants.
- ⚠ Ne pas oublier les $(-1)^{i+j}$! À chaque terme est associé une puissance de -1, plus précisément $(-1)^{\text{l'indice de la ligne + l'indice de la colonne}}$. Voici une matrice permettant de mieux visualiser la situation : en haut à gauche, il y a un $+$, et quand on se déplace verticalement ou horizontalement (pas en diagonale !), le signe change. En particulier, tous les coefficients diagonaux seront affectés du signe $+$.
$$\begin{pmatrix} + & - & + & \dots & (-1)^{n+1} \\ - & + & - & \dots & \vdots \\ + & - & + & \dots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n+1} & \dots & \dots & \dots & + \end{pmatrix}$$

c) Exemples

Exemple : *Calculons*
$$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 8 & 2 \\ 5 & -7 & 9 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

Exemple : *Calculons*

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exemple : *Supposons $n \geqslant 3$. Calculons le déterminant de taille n suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

En particulier, les vecteurs colonnes de la matrice dont on calcule le déterminant forment une base de $\mathbb{K}^n$ si et seulement si n est impair.

Exemple : *Soit $n \geqslant 2$. Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n$. Calculer le déterminant (de taille $n+1$) suivant :*

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & 0 & a_2 & \dots & a_n \\ a_1 & a_2 & 0 & \dots & a_n \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & 0 \end{vmatrix}_{[n+1]}$$

Méthode à retenir : toutes opérations élémentaires permettant de créer des lignes (respectivement colonnes) constante sont les bienvenues. En effet, en factorisant par la constante, on peut ensuite soustraite la première colonne (respectivement ligne) à toutes les autres pour obtenir plein de 0.

Remarque : Quand on développe par rapport à une ligne ou une colonne, on réduit de 1 la taille de la matrice. Cela peut parfois être utile pour obtenir une relation de récurrence entre déterminants. Il suffit ensuite de calculer le déterminant lorsque la matrice est de taille 2 ou 3 (voire 1), ce qui ne présente aucune difficulté.

Exemple : *Pour tout $n \geqslant 1$, calculer le déterminant suivant :*

$$D_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & & & & \\ 2 & 3 & 1 & & (0) & \\ & 2 & 3 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & (0) & & 2 & 3 & 1 \\ & & & & 2 & 3 \end{vmatrix}_{[n]}.$$

Remarque : On peut enfin mélanger la méthode du pivot de Gauss et la méthode qui consiste à développer par rapport à une ligne ou une colonne : on essaye de rendre la matrice triangulaire, mais pour avoir des quantités plus simples à manipuler, dès qu'on isole un terme en haut à gauche, on développe par rapport à la première colonne, ce qui donne des déterminants de plus en plus petits et donc de plus en plus simples.

Exemple : *Soit* $(a,b,c,d) \in \mathbb{K}^4$. *Calculer*

$$D = \begin{vmatrix} a & b & c & d \\ a & a & b & c \\ a & a & a & b \\ a & a & a & a \end{vmatrix}$$

Terminons par un exemple officiellement au programme et qui illustre une méthode intéressante : ajouter ou modifier une ligne ou une colonne pour « transformer un déterminant en polynôme », polynôme qu'on cherche ensuite à factoriser.

Voir aussi la remarque du paragraphe VI.3 sur le caractère polynomial en ses coefficients d'un déterminant.

Proposition (déterminant de Vandermonde). *Soit $n \geqslant 2$. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Posons :*

$$V(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est appelé déterminant de Vandermonde et on a :

$$V(x_1, \dots, x_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i).$$

C'est le déterminant de la matrice de l'application linéaire

$$P \mapsto (P(x_1), \dots, P(x_n))$$

On a vu dans les chapitres 31 (et 32) que, si $x_1, \dots, x_n$ sont distincts, alors φ est un isomorphisme (cohérent avec la non nullité du déterminant dans ce cas) de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$ dans $\mathbb{K}^n$ et que, pour tout $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{K}^n$, l'unique antécédent de b par cette isomorphisme est le polynôme interpolateur de Lagrange qui passe par $b_1, \dots, b_n$ en $x_1, \dots, x_n$.

Démonstration.

$\square$

Exemples :

- *On a* $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{vmatrix} = \boxed{}$.
- *Soit* $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$. *On a*

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 1 & b & b^2 & b^3 \\ 1 & c & c^2 & c^3 \\ 1 & d & d^2 & d^3 \end{vmatrix} = \boxed{}$$

On aurait pu évidemment utiliser la règle de Sarrus, mais les calculs auraient été plus compliqués.

Remarques : Le déterminant d'une matrice étant égal à sa transposée, on a également le résultat suivant :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_j - x_i)$$

Ce dernier déterminant est aussi appelé déterminant de Vandermonde et est noté aussi $V(x_1, \ldots, x_n)$ bien sûr.

5) Comatrice et expression de l'inverse

Définition. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle comatrice de A la matrice notée $\text{com}(A)$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indice (i,j) est $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$ pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$.*

Rappelons que les $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}(A)$ sont appelés les cofacteurs.

Exemple : *Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, alors $\text{com}(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$.*

Cette expression de A^{-1} a surtout une importance théorique.

Théorème. *Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors $A \times \text{com}(A)^\top = \text{com}(A)^\top \times A = \det(A)I_n$.*

Démonstration.

□

Corollaire. *Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Alors :*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \text{com}(A)^\top.$$

Exemple : *Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible, alors on retrouve la formule vue dans le chapitre 23 :*

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$