Chapitre 27

# Séries numériques

Les séries numériques sont des cas particuliers des suites réelles. Elles possèdent de nombreuses propriétés particulières que nous allons étudier dans ce chapitre.

On se donne $n_0 \in \mathbb{N}$. Dans tout ce chapitre $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ désignent des suites de nombres complexes (sauf mention du contraire).

On parle ici de séries numériques par opposition aux séries de fonctions, qui sont au programme de seconde année.

## I Généralités sur les séries numériques

### 1) Notion de série

**Définition.** *On appelle série (numérique) de terme général $u_n$, et on note $\sum u_n$, la suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ définie par :*

$$\forall N \in \mathbb{N}, \qquad S_N = \sum_{n=n_0}^{N} u_n.$$

- *Si $n \in \mathbb{N}, u_n$ est appelé terme d'ordre (ou d'indice, ou de rang) $n$ de la série.*
- *Si $N \in \mathbb{N}$, $S_N$ est appelée somme partielle d'ordre (ou d'indice, ou de rang) $N$ de la série.*

L'indice est muet : on parlera aussi de la série $\sum u_k$, de la série $\sum u_p$ etc. ainsi que de la suite $(S_n)_{n\geqslant n_0}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

**Remarque :** Sauf si l'énoncé le dit explicitement, on prend par défaut pour $n_0$ le premier rang à partir duquel tous les termes de la suite sont définis.

**Remarque :** On a $u_0 = S_0$ et

Pour lever toute ambiguïté, on trouve dans certains sujets la notation $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$, mais cette notation est dangereuse car il y a confusion avec la somme de la série (voir ci-dessous).

***Exemples :***

- *Si $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum z^n$ est appelé série géométrique de raison $z$ (cf. paragraphe I.6). C'est la suite de terme général $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} z^n$ ou encore la série de terme général $z^n$ et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N$ est sa somme partielle d'ordre $N$.*
- *Si $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^n}{n!}$ est appelé série exponentielle. C'est la suite de terme général $S_N = \sum\limits_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!}$ ou encore la série de terme général $z^n$ et, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $S_N$ est sa somme partielle d'ordre $N$ (cf. paragraphe I.6).*
- *La série $\sum \frac{1}{n}$ est appelée série harmonique.*

La série harmonique est un exemple de suite définie à partir du rang $1$.

Dans tout ce chapitre, les séries sont à termes complexes sauf mention du contraire.

### 2) Séries convergentes et divergentes

**Définition (nature d'une série).**

- *On dit que la série $\sum u_n$ converge si la suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ des sommes partielles converge, c'est-à-dire s'il existe $S \in \mathbb{R}$ tel que $S_N = \sum\limits_{n=n_0}^{N} u_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} S$.*

  *La limite $S$ est appelée la somme de la série, et on la note $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$.*

- *Si la suite $(S_N)_{N\geqslant n_0}$ diverge (c'est-à-dire si elle tend vers $\pm\infty$ ou si elle n'admet pas*

La somme est parfois notée $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$

de limite), on dit que la série $\sum u_n$ diverge.*

- *Étudier la nature d'une série consiste à déterminer si elle converge ou diverge. Deux séries numériques sont dites de même nature si elles convergent toutes les deux ou si elles divergent toutes les deux.*

Ne pas confondre la notation $\sum u_n$ qui désigne une série (il s'agit d'une suite), la notation $\sum_{n=n_0}^{N} u_n$ qui désigne la somme partielle d'ordre $N \in \mathbb{N}$ de la série (il s'agit d'un nombre) et la notation $\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ qui désigne la somme de la série dans le cas où elle converge. On n'utilisera la dernière notation que lorsque l'on aura montré au préalable que la série converge (de la même manière que l'on ne parle de limite d'une suite que lorsque l'on a montré que celle-ci existe).

**Remarque :**

- En d'autres termes, une série converge si la suite de ses sommes partielles converge, et la somme de la série est (quand elle existe) la limite des sommes partielles.
- Est-il vraiment nécessaire de faire un chapitre à part dans la mesure où une série est une suite et qu'on a déjà étudié la convergence des suites au premier semestre ? Et bien oui car les résultats vus jusqu'à présent sont incomplets pour répondre à ce problème. En effet, dans la pratique, le calcul exact des sommes partielles est rarement possible. Même déterminer un encadrement de la suite des sommes partielles n'est pas chose aisée. Nous allons étudier des critères de convergence spécifiques aux séries qui sont des critères sur la **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ permettant d'affirmer que la **série** $\sum u_n$ converge ou diverge.

***Exemples :***

- *La série $\sum \frac{1}{n^2}$*

- *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La série $\sum \lambda$*

- *La série harmonique $\sum \frac{1}{n}$*

- *La série $\sum (-1)^n$*

Une série peut diverger sans que les sommes partielles tendent vers $\pm\infty$ ! Elles peuvent aussi ne pas avoir de limite !

- *La série $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$*

Nous donnerons les exemples des séries géométriques et exponentielles dans le paragraphe I.6 mais, d'abord, explorons quelques propriétés des séries.

## 3) Première propriétés

Les propriétés suivantes sont héritées de celles des suites et des sommes :

**Proposition.** *Soit $n_1$ un entier naturel tels que $n_1 > n_0$. Les suites $\sum_{n \geqslant n_0} u_n$ et $\sum_{n \geqslant n_1} u_n$ ont la même nature.*

La convergence éventuelle d'une série ne dépend pas des premiers termes de la suite : seul compte ce qui se passe « au voisinage de $+\infty$ ».

Démonstration.

□

**Proposition (relation de Chasles pour les séries).** *Si la série $\sum u_n$ **converge**, alors, pour tout $p \geqslant n_0$,*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{p} u_n + \sum_{n=p+1}^{+\infty} u_n.$$

Si on veut montrer un résultat concernant une somme infinie, on le montre pour une somme finie et (si c'est possible) on passe à la limite.

Démonstration.

□

On en déduit le résultat suivant :

**Définition (reste d'une série convergente).** *Supposons que la série $\sum u_n$ **converge**. Notons $S$ sa somme. Soit $N \in \mathbb{N}$. On appelle reste d'ordre $N$, noté $R_N$, la quantité*

$$R_N = S - S_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty} u_n.$$

Le reste n'existe que lorsque la série converge.

La somme définissant le reste d'ordre $N$ commence en $N+1$.

**Remarque :** En d'autres termes, le reste d'ordre $N$ est la différence entre la somme et la somme partielle d'ordre $N$. On a également $S = S_N + R_N$ c'est-à-dire que la somme est égale à la somme partielle plus le reste à tout indice. Comme $S_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} S$, on obtient :

**Proposition.** *Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors $R_N \xrightarrow[N \to +\infty]{} 0$. En d'autres termes, le reste d'une série convergente tend vers $0$.*

**Proposition (changement d'indice $n = k - p$ dans une série).** *Pour tout $p \in \mathbb{N}$, $\sum u_n$ et $\sum u_{n-p}$ ont même nature. En cas de convergence, on a*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{k=n_0+p}^{+\infty} u_{k-p}.$$

Bien sûr cette formule est à lire dans les deux sens : dans l'autre sens, on fait le changement d'indice $k = n + p$.

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

**Exemples :**

- $\sum \frac{1}{n+1}$ *diverge car* $\sum \frac{1}{n}$ *diverge.*
- $\sum \frac{1}{(n+1)^2}$ *converge et* $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

⚠ En toute généralité, un changement d'indice quelconque (du type $n = \sigma(k)$ avec $\sigma$ une bijection) peut modifier la nature d'une série et, en cas de convergence, peut même modifier sa somme. Cela peut sembler contra-intuitif (tellement nous sommes habitués aux sommes finies et à leurs propriétés) mais l'ordre dans lequel on somme les termes a son importance quand il y en a une infinité. Nous en reparlerons dans le paragraphe III.5.c et dans le chapitre 39.

Mais nous verrons (entre autres) que tout changement d'indice est licite lorsque la série est à termes positifs.

**Proposition.** *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, les séries $\sum u_n$ et $\sum \lambda u_n$ ont la même nature.*

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

**Théorème (linéarité).** *Supposons que les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$. Alors $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge et*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

On dira dans le chapitre 28 que les séries convergentes forment un sous-espace vectoriel de l'ensemble $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ des suites réelles, et donc un espace vectoriel.

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=n_0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{N} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{N} v_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$$

car les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent. Par conséquent,

$$\sum_{n=n_0}^{N} (\lambda u_n + \mu v_n) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=0}^{+\infty} v_n.$$

Ici, comme plus haut, $n_0$ désigne un rang à partir duquel les termes des séries sont tous bien définis.

En d'autres termes, $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ converge (car la suite des sommes partielles converge) et

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n + \mu \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n.$$

□

**Remarques :**

- En particulier la somme de deux séries convergentes est convergente. En revanche, si $\sum u_n$ converge et $\sum v_n$ diverge, alors $\sum(u_n + v_n)$ diverge (sinon $\sum(u_n + v_n - u_n)$ convergerait).
- ⚠ On ne peut rien dire de la somme (ou plus généralement d'une combinaison linéaire) de séries divergentes .

  *Par exemple* $\sum \frac{1}{n}$ *et* $\sum \frac{-1}{n}$ *divergent mais leur somme* $\sum 0$ *converge.*
- ⚠ Il faut impérativement s'assurer que les deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent **avant** de casser la somme.

  *Par exemple* $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ *converge car*

**Proposition.** *La série* $\sum u_n$ *converge si et seulement si les deux séries réelles* $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ *et* $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ *convergent. Dans ce cas,*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Re}(u_n) + \mathrm{i} \sum_{n=n_0}^{+\infty} \mathrm{Im}(u_n).$$

Démonstration. Découle du fait qu'une suite converge si et seulement si la suite de ses parties réelles et la suite de ses parties imaginaires convergent (cf. chapitre 14). Dès lors, la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$ converge si et seulement si les suites des sommes partielles des séries $\sum \mathrm{Re}(u_n)$ et $\sum \mathrm{Im}(u_n)$ convergent, ce qui permet de conclure. L'égalité des sommes s'obtient par linéarité. □

**Proposition.** *Supposons que* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ *et* $(v_n)_{n\geqslant n_0}$ *soient à termes* ***réels*** *et que, pour tout* $n \geqslant n_0$, $u_n \leqslant v_n$. *Si* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *convergent, alors* $\displaystyle\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} v_n$. *De plus, il y a égalité si et seulement si* $u_n = v_n$ *pour tout* $n \geqslant n_0$.

En particulier, la somme d'une série positive convergente est positive (prendre $u_n = 0 \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant n_0$). Elle est strictement positive dès que l'un des termes est strictement positifs (et les autres positifs).

$\rightsquigarrow$ Démonstration laissée en exercice.

**Remarques :**

- Par contraposée, il y donc égalité stricte si et seulement si il existe $n_1 \geqslant n_0$ tel que $u_{n_1} < v_{n_1}$ (toujours sous l'hypothèse que les séries convergent et que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant n_0$).
- ⚠ Si, on ne sait pas que $u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \geqslant n_0$ mais que les sommes sont égales, on ne peut en aucun cas conclure que leurs termes généraux sont égaux termes à termes !

  *Par exemple* $\displaystyle\sum \frac{1}{2^n}$ *et* $\displaystyle\sum \frac{(\ln(2))^n}{n!}$ *convergent et ont une somme qui vaut* $2$.

Ce résultat est l'analogue discret de la propriété de croissance des intégrales.

Cf. paragraphe I.6 pour le calcul de ces sommes.

**Remarque :** A part les changement d'indices quelconques, toutes les propriétés vraies pour les sommes finies sont donc encore valables pour les sommes infinies, **à condition que** toutes les sommes infinies existent bien, c'est-à-dire que toutes les séries convergent (il faut donc montrer leur convergence **avant** d'appliquer ces résultats). Toutes ? Non il y a encore deux exceptions :

- ⚠ Une somme infinie de fonctions continues n'est pas forcément continue ! En particulier, on ne peut pas passer à la limite dans une somme infinie, par exemple on ne peut pas affirmer directement que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n \xrightarrow[q\to 0]{} \sum_{n=0}^{+\infty} 0^n = 1$$

  (on rappelle que $0^0 = 1$). De même pour dérivable etc.
- On ne peut pas intervertir une intégrale et une somme infinie, ni deux sommes infinies, c'est-à-dire qu'en général,

$$\int_a^b \sum_{n=0}^{+\infty} \neq \sum_{n=0}^{+\infty} \int_a^b \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty} \neq \sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}.$$

Pour montrer qu'une somme infinie de fonctions continues est continue, il faut le montrer à la main, mais il y a toujours des questions intermédiaires, voir ci-dessous la fonction exponentielle.

Des théorèmes de seconde année et du chapitre 39 permettrons de répondre en partie à ces questions.

## 4) Divergence grossière

**Théorème.** *Si la série* $\sum u_n$ *converge, alors* $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

En d'autres termes, le terme général d'une série convergente tend vers $0$.

DÉMONSTRATION.

$\square$

⚠ **LA RÉCIPROQUE EST FAUSSE ! ! ! ! ! !**

***Exemple :*** $\dfrac{1}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ *mais* $\sum \dfrac{1}{n}$ *diverge.*

En d'autres termes, une série diverge grossièrement (et en particulier elle diverge) quand son terme général ne tend pas vers $0$.

**Proposition/Définition.** *Si* $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ *ne tend pas vers* $0$*, alors la série* $\sum u_n$ *diverge : on dit qu'elle diverge grossièrement (DVG).*

DÉMONSTRATION. C'est la contraposée du théorème précédent. $\square$

***Exemples :***

## 5) Lien suite-série

**Proposition.** *La* ***suite*** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge si et seulement si la* ***série*** $\sum(u_{n+1}-u_n)$ *converge.*

*En cas de convergence, en notant* $\ell$ *la limite de la* ***suite*** $(u_n)_{n\geqslant n_0}$*, on a*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \ell - u_{n_0}.$$

La série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ est aussi appelée série télescopique associée à la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a évidemment des résultats analogues pour les séries $\sum(u_n-u_{n+1})$ et $\sum(u_n-u_{n-1})$, qui sont parfois plus simples à étudier.

**Remarque :** Avoir $u_{n+1}-u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ ne suffit pas pour que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Par exemple, $\sqrt{n+1}-\sqrt{n} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ mais la suite $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

DÉMONSTRATION.

$\square$

***Exemple :*** *La série* $\sum \dfrac{n}{(n+1)!}$

Nous verrons d'autres exemples dans le paragraphe III.4.

**Remarque :** La simplification télescopique est l'analogue discret du théorème fondamental de l'analyse. En effet, La suite $(u_{n+1}-u_n)_n$ est en quelque sorte la « dérivée » de la suite $(u_n)_n$ (c'est un taux d'accroissement), tout comme la dérivée $f'$ définie par la limite du taux d'accroissement est la dérivée de la fonction $f$. De plus, la somme est l'équivalent discret de l'intégrale (le symbole $\int$ n'est d'ailleurs qu'un S stylisé) : il y a donc un lien étroit entre les formules

$$\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t = f(b)-f(a) \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=n_0}^{N}(u_{n+1}-u_n) = u_{N+1}-u_{n_0}.$$

Nous reparlerons un peu de cette idée dans le paragraphe III.5.b, consacré à la transformation d'Abel.

## 6) Exemples des séries géométriques et exponentielles

Étudions dans ce paragraphe deux exemples importants de famille de séries dont on connaît la nature et la somme en cas de convergence.

Savoir calculer la somme d'une série est en fait assez rare...

**Théorème (Série géométrique).** *Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum z^n$ converge si et seulement si $|z|<1$. Dans ce cas, pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$,*

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} z^n = \frac{z^{n_0}}{1-z}.$$

Démonstration.

□

**Théorème (Série exponentielle).** *Soit $z \in \mathbb{C}$. La série $\sum \frac{z^n}{n!}$ converge et*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} = \mathrm{e}^z.$$

Démonstration.

Déjà montré dans le chapitre 25 dans le cas réel.

$\square$

***Exemples :***

***Exemple :*** *Montrer que la série* $\sum \dfrac{3n^2+n+5}{n!} \times 7^n$ *converge et calculer sa somme.*

Il faut penser à la série exponentielle car il y a de la factorielle au dénominateur. L'idée est de procéder à des simplifications successives à l'aide des égalités suivantes :

$$\forall n \geqslant 1,\ \frac{n}{n!} = \frac{1}{(n-1)!}$$

et, pour tout $n \geqslant 2$,

$$\frac{n(n-1)}{n!} = \frac{1}{(n-2)!}$$

Pour faire apparaître celle-ci, on écrit

$$n^2 = n(n-1) + n.$$

Ces égalités n'étant valables que pour $n \geqslant 2$, on doit isoler les termes $n = 0$ et $n = 1$ dans le calcul de la somme.

**Remarque :** Soit $x \in \mathbb{R}$. En prenant $z = \mathrm{i}x$ :

On a obtenu ces sommes (mais alors exprimées en terme de limites) dans le chapitre 25.

# II Séries à termes positifs

## 1) Majoration des sommes partielles

**Théorème.** *Une série $\sum u_n$ à termes* ***positifs*** *converge si et seulement si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles est majorée et, si ce n'est pas le cas, $S_N \xrightarrow[N\to+\infty]{} +\infty$.*

DÉMONSTRATION.

□

**Remarques :**

- On a déjà vu avec $\sum(-1)^n$ que c'est faux si la série n'est pas à termes positifs.
- Si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, alors on peut toujours donner un sens à sa somme (dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$). Si elle diverge, cela signifie que $(S_N)_{N\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ et donc on pourrait (et on le fera dans le chapitre 39) poser $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = +\infty$. En attendant, on évitera d'écrire cela.

On a un résultat analogue pour les séries à termes négatifs (mais elles sont plus rares) : une série à termes négatifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est minorée, et si ce n'est pas le cas, alors la suite de ses sommes partielles tend vers $-\infty$.

## 2) Théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs

**Théorème.** *Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes* ***positifs****. Supposons que $u_n \leqslant v_n$ à partir d'un certain rang.*

*1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.*

*2. Si $\sum u_n$ converge, alors $\sum v_n$ diverge.*

DÉMONSTRATION.

□

**Remarques :**

- ⚠ Si $\sum u_n$ converge ou si $\sum v_n$ diverge, on ne peut pas conclure.
- C'est faux si les séries ne sont pas à termes positifs. Par exemple, pour tout $n \geqslant 1$, $-\frac{1}{n} \leqslant 0$ mais $\sum -\frac{1}{n}$ diverge et $\sum 0$ converge.

***Exemples :***

- *La série $\sum \frac{1}{n^3}$*

- *La série* $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$

**Corollaire.** *Soient* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *deux séries à termes* ***positifs****.*

- *Si* $u_n \sim v_n$ *alors* $\sum u_n$ *et* $\sum v_n$ *sont de même nature.*
- *Si* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ *et si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*
- *Si* $u_n = \mathrm{o}(v_n)$ *et si* $\sum v_n$ *converge alors* $\sum u_n$ *converge.*

Là encore, il faut avoir la contraposée en tête pour ces deux cas : si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Rappelons que si $\lambda$ est un réel non nul, alors $\sum \lambda v_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

DÉMONSTRATION.

***Exemples :***

- *Nature de* $\sum \frac{n+1}{n^2}$ *?*

Le mot **positif** est attendu absolument !

- *Nature de* $\sum \sqrt{n}\left(1-\cos\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)\right)$ *?*

- *Nature de* $\sum \frac{n}{2^n}$ *?*

**Remarque :** Si la série $\sum u_n$ est à termes négatifs à partir d'un certain rang, on applique ces résultats à la série $\sum -u_n$ qui est à termes positifs et qui a la même nature. On sait donc traiter les séries à termes constants à partir d'un certain rang.

⚠ Ces théorèmes de comparaison sont faux en général si les séries changent de signe.

*Par exemple, on a vu dans le paragraphe I.3 que la série* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *converge et on verra dans le paragraphe II.4 que la série* $\sum \frac{1}{n\ln(n)}$ *diverge. Il s'ensuit que la série* $\sum \left(\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)}\right)$ *diverge. Pourtant* $\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n\ln(n)} \sim \frac{(-1)^n}{n}$ *et* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *converge.*

La somme d'une série convergente et d'une série divergente diverge. Toujours penser en termes de limites.

On verra dans le paragraphe III comment traiter des séries à termes complexes (non forcément de signe constant donc).

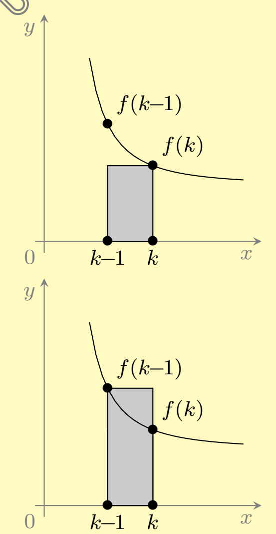
## 3) Comparaison série/intégrale

### a) Méthode de comparaison

Dans le chapitre 24, nous avons vu une méthode de comparaison de sommes à l'aide d'intégrales de fonctions monotones. Rappelons la démarche : on se donne $n_0 \in \mathbb{N}$ et $f$ une fonction continue et décroissante sur $[n_0\,;+\infty[$. Pour tout $n \geqslant n_0$, notons

$$S_n = \sum_{k=n_0}^{n} f(k).$$

On pourrait supposer $f$ croissante mais, ici, on va s'intéresser à la série $\sum f(n)$ qui doit être à termes positifs pour que l'on puisse utiliser les théorèmes de comparaison et ne pas diverger grossièrement donc $f$ ne peut pas être croissante (à moins qu'elle ne soit nulle mais l'intérêt est limité).




**Théorème (Comparaison série/intégrale).** *Soit* $n_0 \in \mathbb{N}$. *Soit* $f$ *une fonction continue, décroissante sur* $[n_0\,;+\infty[$ *et à valeurs positives. La série* $\sum f(n)$ *converge si et seulement si la suite* $\left(\int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t\right)_{n\geqslant n_0}$ *converge.*

Démonstration.

$\square$

Nous verrons des exemples pas plus tard que dans le prochain paragraphe et aussi dans le paragraphe II.4.

### b) Séries de Riemann

**Définition.** *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que la série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ est une série de Riemann. Lorsque $n = 1$, on l'appelle la série harmonique.*

**Théorème.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.*

Démonstration.

$\square$

***Exemples :***

## 4) Méthode du $n^\gamma u_n$ et séries de Bertrand

Lorsqu'on dispose d'une série $\sum u_n$ à termes **positifs**, et qu'elle ne diverge pas grossièrement, la priorité est de lui trouver un équivalent, le plus simple possible.

- Si il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $C > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{C}{n^\alpha}$, alors $\sum u_n$ et $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ ont la même nature (par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs et par linéarité) et on conclut avec le résultat du paragraphe précédent : la série converge si et seulement si $\alpha > 1$.

  *Par exemple, quelle est la nature de* $\sum \ln\left(1 + \dfrac{1}{n^\alpha}\right)$ *lorsque* $\alpha \in \mathbb{R}$ *?*

- Si l'équivalent est plus compliqué, alors on peut essayer de le majorer/minorer ou de montrer qu'il est un o ou un O du terme général d'une série convergente, ou le contraire. Une technique qui fonctionne bien et de déterminer un réel $\gamma$ et d'étudier la limite de $n^\gamma u_n$ quand $n$ tend vers $+\infty$.

  ⋆ Si $n^\gamma u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\gamma > 1$, alors $u_n = \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$ et $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ converge donc $\sum u_n$ aussi par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

  Souvent, $\gamma = 2$ convient (mais il faut parfois être plus rusé, cf. séries de Bertrand ci-dessous).

  *Par exemple, quelle est la nature de* $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$

  Plus généralement, si on montre que la suite $(n^\gamma u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $u_n = \mathrm{O}\left(\dfrac{1}{n^\gamma}\right)$ et on conclut de même.

  ⋆ Si $n^\gamma u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\gamma \leqslant 1$, alors $\dfrac{1}{n^\gamma} = \mathrm{o}\left(u_n\right)$ (on peut aussi dire que $u_n \geqslant \dfrac{1}{n^\gamma}$ à partir d'un certain rang) et $\sum \dfrac{1}{n^\gamma}$ diverge donc $\sum u_n$ aussi par théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

  Souvent, $\gamma = 1$ convient (mais il faut parfois être plus rusé, cf. séries de Bertrand ci-dessous).

Une grande famille de séries pour lesquelles cette technique est particulièrement efficace est celle des séries du type

$$\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}, \qquad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

Aucun résultat sur ces séries n'est au programme mais elles surgissent naturellement dans de nombreux exemples et il est important de savoir comment déterminer leur nature.

On les appelle les séries de Bertrand. On ne peut pas trouver un équivalent plus simple donc on se tourne naturellement vers la « règle du $n^\gamma u_n$ ». Problème : quelle valeur prendre pour $\gamma$ ?

On se donne $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Pour tout $n \geqslant 2$, posons $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$.

- Le cas où $\alpha > 1$. Il est raisonnable de penser que la série va se comporter comme s'il n'y avait pas le terme $(\ln(n))^\beta$ (et donc qu'elle va converger) puisqu'il est dominé par $n^\alpha$ (par croissances comparées lorsque $\beta > 0$). Lorsque $\alpha > 2$, on a $n^2 u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc on conclut facilement. Mais, si $\alpha \leqslant 2$, cette convergence n'a plus lieu donc il faut être plus subtile : on cherche $\gamma > 1$ tel que $n^\gamma u_n = \dfrac{1}{n^{\alpha-\gamma}(\ln(n))^\beta} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ donc il suffit de prendre $\gamma$ dans $]\alpha\,; 1[$. Choisissons le milieu de cet intervalle : $\gamma = \dfrac{\alpha + 1}{2}$. Dès lors :

A retenir : dès que l'on croise une série de Bertrand avec $\alpha > 1$, on la multiplie par

$$n^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

on montre qu'il y a convergence vers $0$ et on conclut avec le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

- Le cas où $\alpha < 1$. La même technique fonctionne mais le résultat est contraire :

À retenir : dès que l'on croise une série de Bertrand avec $\alpha < 1$, on la multiplie par

$$n^{\frac{1+\alpha}{2}},$$

on montre qu'il y a convergence vers $+\infty$ et on conclut avec le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs.

- Le cas où $\alpha = 1$.
  - ⋆ Supposons que $\beta \leqslant 0$.
  - ⋆ Supposons que $\beta > 0$. Cette fois les techniques ci-dessus ne fonctionnent plus.

Résumons :

**Théorème (séries de Bertrand – HP).** *Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la série $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln(n))^\beta}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ ou ($\alpha = 1$ et $\beta > 1$).*

# III Séries absolument convergentes

## 1) Une série absolument convergence converge

Dans le paragraphe précédent, nous nous sommes intéressés aux séries à termes positifs. On peut se dire que cela restreint énormément la classe des séries que l'on peut étudier avec les critères de comparaisons que l'on a vu. Pas tout à fait puisque nous allons voir dans ce paragraphe que l'on peut facilement se ramener à des séries à termes positifs.

Si la série $\sum u_n$ est à termes négatifs, on applique les résultats du paragraphe précédent à la série $\sum -u_n$ qui a la même nature. Si elle est à signe constant seulement à partir d'un certain rang, alors c'est bon puisque la nature d'une série ne dépend pas des premiers termes.

**Définition.** *On dit que la série numérique $\sum u_n$ converge absolument (CVA) si la série $\sum |u_n|$ converge.*

**Théorème (La convergence absolue entraîne la convergence).** *Soit $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite à termes complexes. Si $\sum u_n$ converge absolument, alors $\sum u_n$ converge et*

$$\left|\sum_{n=n_0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=n_0}^{+\infty} |u_n| \qquad \text{(inégalité triangulaire).}$$

Pour une série à termes positifs, la convergence absolue est équivalente à la convergence. Cette notion n'est intéressante que pour les séries dont les termes changent de signe.

Démonstration.

□

Par conséquent, dès qu'on a une suite qui n'est pas à termes positifs (ou du moins de signe constant à partir d'un certains rang), on étudie sa convergence absolue. En cas de convergence absolue, il y a convergence.

⚠ Trop beau pour être vrai ? Hélas la réciproque est fausse ! Une série peut tout à fait ne pas converger absolument et converger tout court.

*Par exemple* $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ *converge (et sa somme est* $\ln(2)$*). Pourtant* $\sum \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|$ *diverge puisque c'est la série* $\sum |u_n|$.

De telles séries sont dites semi-convergentes. Nous en dirons quelques mots dans le paragraphe III.5.

## 2) Théorèmes de comparaison pour les séries absolument convergentes

**Proposition.** *Soient* $\sum u_n$ *une série à termes complexes et* $\sum v_n$ *une série à termes* ***positifs****. On suppose que* $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ *et que* $\sum v_n$ *converge. Alors* $\sum u_n$ *converge absolument et donc converge.*

Démonstration. Puisque $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, on a $|u_n| = \mathrm{O}(v_n)$ Comme $\sum |u_n|$ et $\sum v_n$ sont à termes positifs et que $\sum v_n$ converge, le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs assure que $\sum |u_n|$ converge. Autrement dit $\sum u_n$ converge absolument et donc converge. $\square$

Rappelons que $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ si et seulement s'il existe $M$ tel que $|u_n| \leqslant M|v_n|$ à partir d'un certain rang. En particulier, si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ alors $|u_n| = \mathrm{O}(v_n)$ et $u_n = \mathrm{O}(|v_n|)$.

**Remarques :**

- Si $u_n = \mathrm{o}(v_n)$, alors $u_n = \mathrm{O}(v_n)$. Ce résultat est donc encore valable avec un o à la place d'un O.
- Ce qui importe au fond est que la série qui sert de comparaison soit à termes positifs... ou du moins qu'elle converge absolument. En effet, si $u_n = \mathrm{O}(v_n)$ et que $\sum v_n$ converge absolument, alors $u_n = \mathrm{O}(|v_n|)$ (cf. remarque dans la marge) et on conclut avec le théorème précédent.
- ⚠ Redisons-le une bonne fois pour toutes : si la série $\sum v_n$ converge mais ne converge pas absolument, ces théorèmes de comparaison sont faux, cf. contre-exemples du paragraphe précédent.

***Exemple :*** *Nature de* $\sum \frac{\sin(n!)\ln(n)}{n^2}$ *?*

## 3) La règle de D'Alembert (HP)

Le théorème suivant est hors-programme de premier année, mais au programme de seconde année.

⚠ Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure en tout généralité. Par exemple $\sum \frac{1}{n}$ diverge et $\sum \frac{1}{n^2}$ converge, alors que $\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$ et $\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

**Théorème (règle de d'Alembert).** *Soit* $\sum u_n$ *une série à termes complexes tous non nuls. On suppose que* $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. *Si* $\ell < 1$, *alors* $\sum u_n$ *converge absolument.*
2. *Si* $\ell > 1$, *alors* $\sum u_n$ *diverge (grossièrement).*

Démonstration.

1. Supposons que $\ell < 1$.

Immense classique : on prend $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ dans la définition quantifiée de $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

2. Supposons que $\ell > 1$. Puisque $a = \frac{\ell+1}{2} > \ell$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant a$. Par télescopage, on obtient $|u_n| \geqslant |u_{n_0}|a^{n-n_0}$. Comme $a > 1$, on a $a^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ donc $|u_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ par théorème de minoration (car $u_{n_0} \neq 0$). Ainsi $\sum u_n$ diverge grossièrement. $\square$

***Exemple :*** *Soit $z \in \mathbb{C}$. la série exponentielle $\sum \frac{z^n}{n!}$*

## 4) Utilisation du lien suite/série

### a) Principe général

On a vu que dans le paragraphe I.5 que, si $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de complexes, alors la **suite** $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la **série** $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge. Ce résultat est très simple et immédiat à montrer par télescopage. Il n'en est pas moins fondamental :

- Si on reconnaît que le terme général d'une série s'écrit sous la forme $u_{n+1} - u_n$, alors on peut l'utiliser et conclure immédiatement.
- Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ converge (ou diverge respectivement), on peut montrer que la série $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge (ou diverge respectivement). Cela peut sembler être une complexification du problème puisqu'on passe de la théorie des suites à la théorie des séries mais il se trouve que cette technique permet de traiter de nombreux cas de figure.

Quand la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie à l'aide de multiplications et divisions (plutôt que de sommes) et à termes strictement positifs, il est souvent plus simple d'étudier la suite $(\ln(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ à travers la série $\sum(\ln(u_{n+1}) - \ln(u_n))$ et donc la série $\sum \ln\left(\frac{u_{n+1}}{u_n}\right)$.

Voyons deux exemples dans le reste de ce paragraphe.

### b) Exemple : la constante d'Euler

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $u_n = H_n - \ln(n)$.

On a déjà montré ce résultat dans le chapitre 24 avec des arguments de comparaison à une intégrale.

### c) Exemple : la formule de Stirling

Il reste encore à trouver la constante $K$. Pour cela piochons dans des suites faisant intervenir les factorielles : les suites $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des intégrales de Wallis. On a montré dans le chapitre 10 que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad W_{2n} = \frac{\pi(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{n}W_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

**Théorème (formule de Stirling).** $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

## 5) Séries semi-convergentes

On dit qu'une série $\sum u_n$ est semi-convergente lorsqu'elle converge mais ne converge pas absolument. Ces séries sont plus difficiles à étudier en général car elles échappent aux théorèmes de comparaison que nous avons vu précédemment. Il faut les étudier au cas par cas mais il y a tout de même quelques méthodes efficaces que nous allons voir ici.

On a vu, dans le paragraphe I.2 que la série $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}$ est semi-convergente.

### a) Séries alternées

**Définition.** *Lorsque $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite de réels de signes constants, on dit que la série $\sum(-1)^n u_n$ est alternée.*

Les séries alternées sont donc des séries à termes **réels** dont le signe alterne : les termes de rang pair sont tous de même signe et les termes de rang impair sont tous de même signe opposé à celui des termes de rang pair.

**Théorème (critère spécial des séries alternées).** *Supposons que $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ est une suite à termes **positifs** qui décroît vers $0$ (c'est-à-dire qui est décroissante et tend vers $0$). Alors $\sum(-1)^n u_n$ converge.*

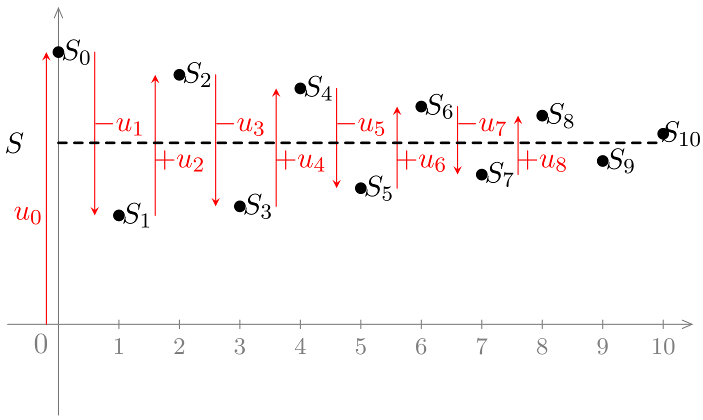
*De plus, si $(R_N)_{N\geqslant n_0}$ désigne la suite des restes de la série $\sum(-1)^n u_n$, alors*

- *pour tout $N \geqslant n_0$, $R_N$ est du signe de $(-1)^{N+1}$.*
- *pour tout $N \geqslant n_0$, $|R_N| \leqslant u_{N+1}$.*

*Enfin, la somme $S$ de la série est aussi du signe de $(-1)^{n_0}$ et $|S| \leqslant u_{n_0}$.*

Rappelons que, pour tout $N \geqslant n_0$,

$$R_N = \sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^n u_n.$$




Sur le dessin ci-contre, $n_0 = 0$.

Démonstration.

Si on est face à une série alternée dont la suite des valeurs absolues ne décroît qu'à partir d'un certain rang, il faut couper la somme infinie pour la faire commencer au moment où la suite décroît.

□

***Exemples :***

- *Les séries* $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln(n)}$, $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ *et* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n)}$ *convergent (alors qu'aucune ne converge absolument, cf. paragraphes II.3 et II.4).*
- *Montrons que la série* $\sum \dfrac{(-1)^n}{n\ln(n-1)}$ *converge, donnons le signe de sa somme et majorons-la en valeur absolue.*

Cette série n'est définie qu'à partir du rang $3$.

**Remarque :** Que faire lorsque la décroissance en valeur absolue est difficile à prouver ou n'est pas vérifiée ? On pourrait tenter un équivalent mais cela ne permettra pas de conclure puisque le théorème de comparaison avec des équivalents n'est valable que pour des séries à termes positif (cf. contre exemple dans le paragraphe II.2). Pour pallier ce problème, on essaie en général d'obtenir un développement asymptotique plus de la forme suivante :

$$(-1)^n u_n = (-1)^n a_n + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right),$$

avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs et qui décroit vers $0$ et avec $\alpha > 1$. D'un côté le critère spécial des séries alternées assure que $\sum (-1)^n a_n$ converge et que $\sum \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ aussi par théorème de comparaison. On conclut par linéarité.

***Exemple :*** *Nature de la série* $\sum \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)$ *?*

La série est alternée puisque le terme général est du signe de $(-1)^n$. On a envie d'appliquer le CSA, mais la décroissance du terme général en valeur absolue ne semble pas simple à donner. Il est plus simple d'appliquer la méthode évoquée ci-dessus.

### b) Transformation d'Abel (HP)

On se donne $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ et $(b_n)_{n\geqslant n_0}$ deux suites à termes complexes.

**Remarque :** Avant d'aller plus loin, reprenons l'analogie somme/intégrale évoquée dans le paragraphe I.5. Cette formule est l'analogue discret de la formule d'intégration par parties :

$$\int_a^b f(t)g(t) = [f(t)G(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)G(t)\,\mathrm{d}t,$$

avec $G$ une primitive de $g$.

On parle aussi de formule de sommation par parties pour cette raison.

Reprenons la formule de transformation d'Abel en ajoutant les hypothèses que $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ est décroissante vers $0$ (donc est à valeurs positives) et que la suite $(B_n)_{n\geqslant n_0}$ est bornée.

***Exemple :*** *Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. Nature de la série $\sum \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{n^\alpha}$ ?*

### c) Pathologie des séries semi-convergentes

Cela peut sembler contre-intuitif mais, même si une série converge, si on change l'ordre des termes dans la somme d'une série convergente, on peut changer la somme elle-même. L'infini nous réserve décidément bien des surprises.

Voyons un exemple qui illustre ce fait : on a vu plus haut que $\sum \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ converge et que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2)$. Permutons à présent les termes de la somme.

On peut même montrer un résultat plus fort :

**Théorème (de réarrangement de Riemann – HP).** *Soit* $\sum u_n$ *une série semi-convergente. Soit* $\lambda \in \overline{\mathbb{R}}$*. Alors il existe une bijection* $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ *telle que*

$$\sum_{n=0}^{N} a_{\sigma(n)} \xrightarrow[N \to +\infty]{} \lambda.$$

Ce résultat est totalement hors programme et n'est donné qu'à titre culturel.

En d'autres termes, quand on a une série qui converge mais ne converge pas absolument, en réarrangeant les termes, on peut faire tendre ses sommes partielles vers absolument tout et n'importe quoi, y compris $+\infty$ et $-\infty$ !

Il est donc nécessaire de se donner une définition plus générale de somme que l'on pourra utiliser pour sommer des familles plus générales que des familles finies ou des suites, et où la notion d'ordre n'aura aucune importance. Nous en reparlerons dans le chapitre 39. Nous y verrons notamment que, pour une série absolument convergente, l'ordre des termes n'a pas d'importance pour la somme.

# IV Compléments (HP)

## 1) Existence de la fonction exponentielle

Jusqu'à présent, on a admis l'existence d'une fonction $f$ (que l'on appelée exponentielle et notée $\exp$) dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant les conditions $f(0) = 1$ et $f' = f$. On en a déduit des propriétés de $f$ (stricte positivité, stricte croissance, etc.) pour finalement arriver à une somme de série

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$

On peut voir ceci comme la (longue) étape d'analyse d'un raisonnement par analyse-synthèse : si une telle fonction existe, c'est la fonction $f : x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$. Faisons à présent la synthèse : montrons que la fonction ci-dessus est bien définie, dérivable et vérifie $f(0) = 1$ et $f' = f$.

## 2) Existence des fonctions cosinus et sinus

Dans le chapitre 5, on a aussi admis l'existence des fonctions $\cos$ et $\sin$ sur $\mathbb{R}$. Nous avons fini par montrer dans la paragraphe I.5 que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Comme dans le paragraphe précédent, on peut voir cela comme la (longue) étape d'analyse d'un raisonnement par analyse synthèse : si $\cos$ et $\sin$ existent, alors ce sont les fonctions définies par ces deux sommes de séries. Faisons à présent l'étape de synthèse. Posons :

$$c : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{et} \quad s : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Comme dans le paragraphe précédent, on montre que :

- ces deux fonctions sont bien définies puisque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $c(x)$ et $s(x)$ sont les sommes de séries absolument convergentes.
- $c(0) = 1$, $s(0) = 0$,

- $c$ et $s$ sont dérivables, $c' = -s$ et $s' = c$. On en déduit que $c$ et $s$ de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et on a $c'' = -c$ et $s'' = -s$.

Il nous faut encore redémontrer toutes les formules de trigonométrie pour conclure que ces fonctions ont bien toutes les propriétés voulues de $\cos$ et $\sin$.

- $c$ est paire et $s$ est impair (c'est immédiat avec la définition).
- Posons $\varphi : x \longmapsto c^2(x) + s^2(x)$. Il s'agit d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = 2c'(x)c(x) + 2s'(x)s(x) = -2s(x)c(x) + 2c(x)s(x) = 0.$$

Ainsi $\varphi$ est constante sur $\mathbb{R}$ et, comme $\varphi(0) = 1^2 + 0^2 = 1$, on en déduit l'identité fondamentale : $c^2 + s^2 = 1$.

- En particulier, $|c| \leqslant \sqrt{c^2 + s^2} = 1$ et, de même, $|s| \leqslant 1$.
- Fixons $y \in \mathbb{R}$. Posons $\psi_y : x \longmapsto c(x+y) - c(x)c(y) + s(x)s(y)$. Il s'agit d'une fonction deux dérivable sur $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\psi_y''(x) = c''(x+y) - c''(x)c(y) + s''(x)s(y) = -c(x+y) + c(x)c(y) - s(x)s(y) = -\psi_y(x).$$

Dès lors, en multipliant par $2\psi_y'(x)$ :

$$2\psi_y''(x)\psi_y'(x) = -2\psi_y'(x)\psi_y(x)$$

c'est-à-dire

$$((\psi_y')^2)'(x) = -(\psi_y^2)'(x).$$

Ainsi il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad (\psi_y')^2(x) = -(\psi_y)^2(x) + C.$$

On a $\psi_y(0) = c(y) - c(0)c(y) + s(0)s(y) = 0$ et

$$\psi_y'(0) = -s(y) + s(0)s(y) + c(0)s(y) = 0.$$

On en déduit que $(\psi_y')^2 = -(\psi_y)^2$ mais donc $(\psi_y')^2 = (\psi_y)^2 = 0$. Ainsi $\psi_y$ et $\psi_y'$ sont la fonction nulle et donc, on retrouve les formules d'addition du cosinus et du sinus :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad c(x+y) = c(x)c(y) - s(x)s(y).$$

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad s(x+y) = s(x)c(y) + c(x)s(y).$$

Les formules de soustraction s'obtiennent en utilisant la parité de $c$ et l'imparité de $s$.

- Montrons que $c$ s'annule sur $\mathbb{R}_+$. Pour cela, raisonnons par l'absurde en supposant qu'elle ne s'annule pas. Puisque $c(0) = 1$, et que $c$ est continue, elle garde un signe constant positif sur $\mathbb{R}_+$. Comme $s' = c$, $s$ est donc strictement croissance sur $\mathbb{R}_+$. Comme $s(0) = 0$, on a alors $s(1) > 0$. Introduisons alors la fonction $\varphi : x \longmapsto c(x) + xs(1)$ sur $]1\,;+\infty[$. Elle est dérivable sur $]1\,;+\infty[$ et sa dérivée $x \longmapsto s(1) - s(x)$ y est négative strictement (car $s$ est strictement croissante). Mais, comme $s(1) > 0$ et $c$ est bornée, $\varphi(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$ par théorème d'encadrement. Cela est en contradiction avec la décroissance de $\varphi$.

Ainsi $c$ s'annule sur $\mathbb{R}_+$. Notons $A = \{x \in \mathbb{R}_+ \,|\, c(x) = 0\}$ et $\alpha = \inf(A)$. Il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $A$ qui converge vers $\alpha$. Par continuité de $c$ en $\alpha$, on obtient $0 = c(x_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} c(\alpha)$ donc $c(\alpha) = 0$ : $\alpha$ est le plus petit réel positif en lequel $c$ est nul. Dès lors $c$ est positive strictement sur $[0\,;\alpha[$ donc $s$ est strictement croissante sur $[0\,;\alpha]$. Comme $s$ est nulle en $0$, on a $s(\alpha) > 0$. L'identité fondamentale entraîne que $s(\alpha) = \sqrt{1 - c^2(\alpha)} = 1$.

On ne peut pas dire que $c$ et $s$ sont solution de l'EDL $y'' + y = 0$ et la résoudre comme dans le chapitre 11 puisque la résolution que nous avons vue utilise $\cos$ et $\sin$.

Cet $\inf$ existe d'après le théorème de la borne inférieure car $A$ est un ensemble non vide (on vient de le montrer) et minoré (par $0$).

- Pour tout $x \in [0\,;\alpha]$, $s(x+\alpha) = s(x)c(\alpha) + c(x)s(\alpha) = c(x) \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $x = \alpha$. Cela montre que $2\alpha$ est le premier réel positif en lequel s'annule la fonction $s$.
- Enfin $c(4\alpha) = 1 - 2c^2(2\alpha) = 1$ et $s(4\alpha) = 2s(2\alpha)c(2\alpha) = 0$. Dès lors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$c(x+4\alpha) = c(x)c(4\alpha) - c(x)c(4\alpha) = c(x)$$

$$s(x+4\alpha) = s(x)c(4\alpha) + c(x)s(4\alpha) = s(x).$$

  Ces fonctions sont donc $4\alpha$ périodique.

En notant $\pi = 2\alpha$, on retrouve que $c$ et $s$ sont $2\pi$-périodique, que $\dfrac{\pi}{2}$ est la plus petite valeur d'annulation strictement positive de $c$ et que $\pi$ est la plus petite valeur d'annulation strictement positive de $s$. Tous ces points, nous ont permis de tout démontrer dans le chapitre 5.

En particulier, l'exponentielle complexe que nous avions construite à partir de $\cos$ et $\sin$ est désormais parfaitement construite elle aussi. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)) = \mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(x+\mathrm{i}y)^n}{n!}.$$

## 3) Développement décimal d'un réel

Depuis l'école primaire, vous avez l'habitude d'écrire les réels positifs sous forme d'un développement décimal, c'est-à-dire sous la forme d'un entier suivi d'une virgule et de chiffres après la virgule.

*Par exemple,* $\frac{2}{5} = 0,4 \quad \frac{1}{3} = 0,33333\ldots \quad \pi = 3,14159\ldots \quad \sqrt{2} = 1,41421\cdots$

Cette partie a pour but de définir rigoureusement cette notion.

... en plus de vous donner des méthodes qui reviennent souvent

Quand on écrit, par exemple $\pi = 3,14159\cdots$, il s'agit de

$$\pi = 3 + \frac{1}{10} + \frac{4}{10^2} + \frac{1}{10^3} + \frac{5}{10^4} + \frac{9}{10^5} + \cdots = 3 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n},$$

où $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est donc la suite des chiffres après la virgule.

**Lemme.** *Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers appartenant à $[\![0\,;9]\!]$. Alors $\sum \dfrac{x_n}{10^n}$ converge.*

Ce lemme garantit donc que tout développement décimal a un sens (c'est un réel). Mais il ne dit pas encore que tout réel a un développement décimal.

Démonstration. On a $\dfrac{x_n}{10^n} = \mathrm{O}\left(\left(\dfrac{1}{10}\right)^n\right)$ et la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1}{10}\right)^n$ est à termes positifs et convergente donc le théorème de comparaison pour les séries à termes positifs permet de conclure. $\square$

**Lemme.** *Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{1}{10^N}$.*

Démonstration. Soit $N \in \mathbb{N}$. On a

$$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = 9\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{10^n} - \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{10^n}\right) = 9\left(\frac{1}{1-\frac{1}{10}} - \frac{1-(\frac{1}{10})^{N+1}}{1-\frac{1}{10}}\right) = 9 \times \frac{(\frac{1}{10})^{N+1}}{1-\frac{1}{10}},$$

ce qui fait bien $\dfrac{1}{10^N}$. $\square$

**Théorème.** *Soit $x \in [0\,;1[$. Il existe une suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers appartenant à $[\![0\,;9]\!]$ telle que*

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{10^n}.$$

- *Si $x \notin \mathbb{D}$, une telle suite est unique.*
- *Si $x \in \mathbb{D}^*$, il existe deux telles suites : une stationnaire à $0$ et une stationnaire à $9$.*

*Dans les deux cas, il existe une unique suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers appartenant à $[\![0\,;9]\!]$, non stationnaire à $9$. On dit que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{10^n}$ est le développement décimal propre de $x$.*

Si $x \in \mathbb{R}_+$, $x-\lfloor x\rfloor \in ]0\,;1[$. En posant $x_0=\lfloor x\rfloor$, il existe bien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tel que

$$x=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x_n}{10^n}.$$

Si $x\in\mathbb{R}_-^*$, on ajoute le symbole $-$ devant.

Dans le cas où $x\in\mathbb{D}$, le développement avec une suite stationnaire à $9$ est appelé développement impropre.

Démonstration. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, notons $r_n=\dfrac{\lfloor 10^n x\rfloor}{10^n}$ l'approximation décimal par défaut de $x$ à $10^{-n}$ près (cf. chapitre 14). On a vu que $r_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.

- Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, posons $x_n=10^n(r_n-r_{n-1})=\lfloor 10^n x\rfloor-10\left\lfloor 10^{n-1}x\right\rfloor$. Il s'agit d'un entier (par somme et produit d'entiers). De plus

$$10^n x-1<\lfloor 10^n x\rfloor\leqslant 10^n x \qquad \text{et} \qquad -10^{n-1}x\leqslant-\left\lfloor 10^{n-1}x\right\rfloor<-10^{n-1}x+1$$

  donc

$$10^n x-1+10(-10^{n-1}x)<x_n<10^n x+10(-10^{n-1}x+1)$$

  et donc $-1<x_n<10$. Par conséquent $x_n\in[\![0\,;9]\!]$. De plus

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{x_n}{10^n}=\sum_{n=1}^{N}(r_n-r_{n-1})=r_{n+1}-r_0=r_{N+1}\xrightarrow[N\to+\infty]{}x.$$

  Cela prouve l'existence du développement décimal de $x$.

- Prouvons l'unicité du développement propre (et l'existence du développement impropre dans le cas décimal). Supposons qu'il existe $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites distinctes d'éléments de $[\![0\,;9]\!]$ telles que

$$x=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x_n}{10^n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{y_n}{10^n}.$$

  Comme ces suites sont distinctes, la partie $\{k\in\mathbb{N}^*\,|\,x_k\neq y_k\}$ de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément $n_0$. Cela signifie que, $x_{n_0}\neq y_{n_0}$ et que $x_k=y_k$ pour tout $k\in[\![1\,;n_0-1]\!]$ (si $n_0>1$). Quitte à échanger les deux suites, supposons que $x_{n_0}<y_{n_0}$. Par hypothèse, les deux développement sont propres donc les suites ne sont pas stationnaires à $9$ : la partie $\{k\geqslant n_0+1\,|\,x_k\neq 9\}$ de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément $n_1$. On a alors :

$$\begin{aligned} x&=\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{x_n}{10^n}+\frac{x_{n_0}}{10^{n_0}}+\sum_{n=n_0+1}^{n_1-1}\frac{x_n}{10^n}+\frac{x_{n_1}}{10^{n_1}}+\sum_{n=n_1}^{+\infty}\frac{x_n}{10^n}\\ &<\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{x_n}{10^n}+\frac{x_{n_0}}{10^{n_0}}+\sum_{n=n_0+1}^{n_1-1}\frac{x_n}{10^n}+\frac{x_{n_1}+1}{10^{n_1}}+\sum_{n=n_1}^{+\infty}\frac{x_n}{10^n}\end{aligned}$$

  La deuxième somme étant potentiellement vide (donc nulle le cas échéant).

  Comme $x_{n_1}\neq 9$, on a $x_{n_1}+1\leqslant 9$ donc

$$\begin{aligned} x&<\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{x_n}{10^n}+\frac{x_{n_0}}{10^{n_0}}+\sum_{n=n_0+1}^{n_1-1}\frac{9}{10^n}+\frac{9}{10^{n_1}}+\sum_{n=n_1}^{+\infty}\frac{9}{10^n}\\ &=\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{x_n}{10^n}+\frac{x_{n_0}}{10^{n_0}}+\sum_{n=n_0}^{+\infty}\frac{9}{10^n}\\ &=\sum_{n=1}^{n_0-1}\frac{x_n}{10^n}+\frac{x_{n_0}}{10^{n_0}}+\frac{1}{10^{n_0}}.\end{aligned}$$

  D'après le lemme ci-dessus

Mais $x_{n_0} < y_{n_0}$ donc $x_{n_0} + 1 \leqslant y_{n_0}$ si bien que

$$x < \sum_{n=1}^{n_0-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{y_{n_0}}{10^{n_0}} = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{y_n}{10^n} \leqslant \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{y_n}{10^n},$$

puisqu'il s'agit d'une somme de termes positifs. On obtient donc $x < x$, ce qui est absurde. D'où l'unicité.

- Supposons que $x$ admette un développement décimal impropre : il existe $(x_n)_{n\geqslant 1} \in [\![0\,;9]\!]^n$ stationnaire à $9$ tel que $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$.

On notera au passage que $1$ s'écrit

$$0,999999\cdots$$

  - ⋆ Si $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est constante égale à $9$, alors $x = 1$ d'après le lemme ci-dessus, ce qui est exclu.
  - ⋆ Sinon, la partie $\{k \geqslant 1 \,|\, x_k \neq 9\}$ de $\mathbb{N}$ est non vide majorée donc $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément $n_2$. On a alors :

$$x = \sum_{n=1}^{n_2} \frac{x_n}{10^n} + \sum_{n=n_2+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n} = \sum_{n=1}^{n_2} \frac{x_n}{10^n} + \frac{1}{10^{n_2}} = \sum_{n=1}^{n_2-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{x_{n_2}+1}{10^{n_2}}.$$

  On a $x_{n_2} < 9$ donc $x_{n_2} + 1 \leqslant 9$. Il s'ensuit que :

  — $10^{n_2}x \in \mathbb{Z}$ donc $x \in \mathbb{D}$. Par contraposée, si $x \notin \mathbb{D}$, alors $x$ n'admet pas de développement impropre.

  — $x$ admet un développement décimal propre (et donc c'est le seul développement décimal propre).

  — $x$ ne peut pas admettre un autre développement décimal impropre. En effet, si c'était le cas, ils conduiraient à un autre développement décimal propre (via le calcul ci-dessus) et cela n'est pas possible par unicité du développement propre.

- Réciproquement, supposons que $x \in \mathbb{D}$. Il existe alors $d \in \mathbb{N}^*$ tel $10^d x \in \mathbb{N}^*$. Prenons le plus petit $d$ possible (de sorte que $10^{d-1}x \notin \mathbb{N}$). En écrivant $x$ sous la forme $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$, on a donc

$$10^d \left( x - \sum_{n=1}^{d} \frac{x_n}{10^n} \right) = 10^d \sum_{n=d+1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^n}$$

donc

$$10^d x - \sum_{n=1}^{d} x_n 10^{d-n} = \sum_{n=d+1}^{+\infty} \frac{x_n}{10^{n-d}} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_{k+d}}{10^k}.$$

  - ⋆ ou bien $x_k = 9$ pour tout $k \geqslant d+1$, auquel cas cette somme vaut $1$ d'après le lemme. Il s'ensuit que

$$10^d x = 1 + \sum_{n=1}^{d} x_n 10^{d-n}$$

  donc

$$x = \sum_{n=1}^{d-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{x_d + 1}{10^d}.$$

  On a forcément $x_d \neq 9$ sinon $x_d + 1 = 10$ et on aurait $10^{d-1}x \in \mathbb{N}$, ce qui est exclu. Ainsi :

$$x = \sum_{n=1}^{d} \frac{x_n}{10^n} + \sum_{n=d+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}$$

  est un développement décimal impropre de $x$ (et c'est le seul conformément au point précédent).

* ⋆ ou bien, il existe $k \geqslant d+1$ tel que $x_k < 9$ et alors

$$0 \leqslant 10^d x - \sum_{n=1}^{d} x_n 10^{d-n} < \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{9}{10^k} = 1.$$

Le seul entier de $[0\,;1[$ étant $0$, on en déduit que

$$10^d x - \sum_{n=1}^{d} x_n 10^{d-n} = 0$$

et donc $x = \displaystyle\sum_{n=1}^{d} \frac{x_n}{10^n}$, ce qui est un développement propre de $x$ (et il est unique, comme on l'a vu). □

Au passage, en notant $x'_d = x_d + 1$ et $x'_k = x_k$ pour tout $k \in [\![1\,;d-1]\!]$, on obtient que

$$x = \sum_{n=1}^{d} \frac{x'_n}{10^n}$$

est le développement propre de $x$.

Ainsi, lorsque $x \in \mathbb{D}$, $x$ admet bien un unique développement propre et un unique développement impropre.

**Remarques :**

- On écrit symboliquement

$$x = 0, x_1 x_2 \dots x_n \dots$$

et on dit que le second membre est un développement décimal de $x$.

- Dans le cas où $x \in \mathbb{D} \cap ]0\,;1[$, le développement propre de $x$ est une somme finie :

$$x = \sum_{k=1}^{d} \frac{x_n}{10^n},$$

avec $x_d \neq 0$. On obtient donc son développement impropre en procédant ainsi :

$$\begin{aligned} x &= \sum_{k=1}^{d-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{x_d - 1}{10^d} + \frac{1}{10^d} \\ &= \sum_{k=1}^{d-1} \frac{x_n}{10^n} + \frac{x_d - 1}{10^d} + \sum_{k=d+1}^{+\infty} \frac{9}{10^n}. \end{aligned}$$

Avec l'écriture avec des chiffres après la virgule, cela consiste à ajouter une infinité de $9$ au développement décimal propre.

*Par exemple, on a*

$$\frac{1}{2} = \frac{5}{10} = 0,50000\cdots = 0,4999999\dots$$

*cette égalité n'étant rien d'autre que l'égalité :*

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{10} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{9}{10^n}.$$

- À part $0$, les entiers naturels ont aussi deux écriture décimales : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $n-1$ suivi d'une infinité de $9$ après la virgule est égale à $n$.
- On peut généraliser à n'importe quel entier $b \geqslant 2$ : tout réel $x \in ]0\,;1[$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{b^n}$$

avec $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers de $[\![0\,;b-1]\!]$ non stationnaire à $b-1$. Si $b=2$, on parle de développement dyadique et si $b=3$, de développement triadique.