

# Sous-espaces affines

Dans de nombreux chapitres cette année, nous avons travaillé dans des espaces vectoriels et nous nous sommes intéressés à leurs parties qui sont encore des espaces vectoriels. Elles ont notamment pour particularité de contenir  $0$ . Mais que dire des droites (du plan ou de l'espace) ou des plans (de l'espace) qui ne passent pas par  $0$ ? Peut-on généraliser ces notions à des espaces vectoriels plus généraux? C'est l'objectif de ce chapitre.

Dans ce chapitre  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

Mais  $\mathbb{K}$  pourrait être un corps quelconque.

## I Introduction

### 1) Translations dans un espace vectoriel

**Définition (translation).** Soit  $a \in E$ . La fonction

$$\tau_a : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ x & \longmapsto & x + a \end{cases}$$

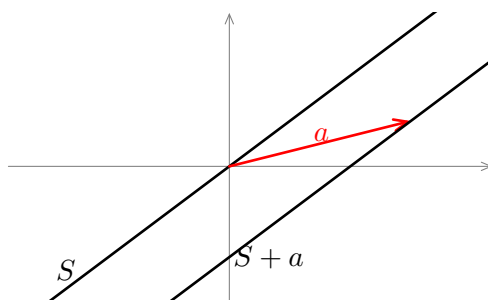
est appelée translation de vecteur  $a$ .

**!** Lorsque  $a \neq 0$ , la translation de vecteur  $a$  n'est pas une application linéaire (car elle n'envoie pas  $0_E$  sur lui même).

On dit qu'une translation est une application affine mais cette notion n'est pas au programme.

**Définition (partie translatée).** Soit  $S$  une partie de  $E$  et soit  $a \in E$ . On note  $S + a$  l'image de  $S$  par la translation de vecteur  $a$ . Autrement dit  $S + a = \{x + a \mid x \in S\}$ . On l'appelle le translaté de  $S$  de vecteur  $a$ .

On note aussi  
 $a + S = \{a + x \mid x \in S\}$   
 et, par commutativité de l'addition, on a bien sûr  
 $S + a = a + S$ .



#### Remarques :

- Avec des quantificateurs : si  $x \in E$ , alors

$$x \in S + a \iff x - a \in S \iff \exists s \in S, x = s + a.$$

- $S + a$  est l'image de  $S$  par la translation de vecteur  $a$ .
- L'ensemble  $S + a$  est bien sûr une partie de  $E$ .
- Soit  $T$  est une partie de  $E$ . On a :  $T = S + a$  si et seulement si  $S = T - a$ .  
 $\rightsquigarrow$  DÉMONSTRATION LAISSÉE EN EXERCICE.
- Si  $a = 0_E$ , alors il est immédiat que  $a + S = S$ . La réciproque est fautive : si  $a + S = S$ , on n'a pas forcément  $a = 0_E$  (cf. proposition ci-dessous).
- Si  $0_E \in S$  (ce qui est le cas si  $S$  est un sous-espace vectoriel), alors  $a \in a + S$ .

Résultat intuitif : si on obtient  $T$  en translatant  $S$  d'un vecteur  $a$ , on obtient  $S$  à partir de  $T$  en le translatant du vecteur  $-a$ .

**Proposition.** Soient  $a \in E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Alors  $a + F = F$  si et seulement si  $a \in F$ .

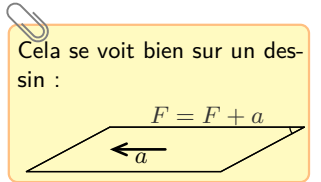
DÉMONSTRATION.

- Supposons que  $a \in F$ . Soit  $x \in F$ . Puisque  $F$  est un sous-espace vectoriel, on a alors,  $x - a \in F$  donc

$$x = a + \underbrace{x - a}_{\in F} \in a + F$$

Ainsi  $F \subset a + F$ . Réciproquement, soit  $x \in a + F$  : il existe  $y \in F$  tel que  $x = a + y$ . Mais, comme  $a$  et  $y$  appartiennent à  $F$  et que  $F$  est un sous-espace vectoriel, il vient que  $x \in F$ . D'où  $a + F \subset F$ .

- Réciproquement, supposons que  $a + F = F$ . Comme  $0_E \in F$  et  $a = a + 0_E$ , il vient que  $a \in a + F$  donc  $a \in F$ .  $\square$



En particulier, pour tout  $a \in E$ ,  $a + E = E$ .


Il est donc faux de dire que  $a + F = F$  si et seulement si  $a = 0_E$ . Prudence avec cette notation !

## 2) Structure affine d'un espace vectoriel

Dans toutes nos représentations géométriques (dans le plan ou dans l'espace) des chapitres d'algèbre linéaire, nous avons systématiquement identifiés les points et les vecteurs. Plus précisément, nous avons identifié tout point  $M$  du plan ou de l'espace avec le vecteur  $\overrightarrow{OM}$  où  $O$  est l'origine (qui représente le vecteur nul).

Pourtant, au lycée, il y avait une distinction entre les points et les vecteurs. La raison est que le point de vue adopté était celui de la géométrie affine où certains objets sont appelés points et d'autres vecteurs (alors que ce sont tous des éléments de  $E$ ) selon les résultats que l'on veut visualiser.

Conformément au programme, nous n'allons pas définir proprement l'espace affine associé à un espace vectoriel et nous contenter d'une présentation informelle :

- Les éléments de  $E$  sont appelés points et notés avec des lettres majuscules.
- Pour tout couple de points  $A$  et  $B$ , on note  $\overrightarrow{AB} = B - A$ .  
 Pourtant  $A$ ,  $B$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont tous les trois des éléments de  $E$  mais les deux premiers sont appelés points et le dernier vecteur.
- Le neutre de  $E$  est appelée parfois vecteur nul (et noté alors  $\vec{0}$ ), parfois origine du vecteur (et noté  $O$ ).
- La relation de Chasles du lycée est valide : si  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont trois points

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = B - A + C - B = C - A = \overrightarrow{AC}.$$

- Pour des points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ ,
  - ★ Pour tout point  $A$  et vecteur  $\vec{u}$ , il existe un unique point  $B$  tel que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ . On note  $B = A + \vec{u}$ .
  - ★  $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$  si et seulement si  $A = B$ .
  - ★  $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$ .
  - ★  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  si et seulement si  $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ .

Mais encore une fois : une fois que l'on s'est fixé une origine qui représente le vecteur nul, tout point  $M$  est totalement identifié au vecteur  $\overrightarrow{OM}$ .

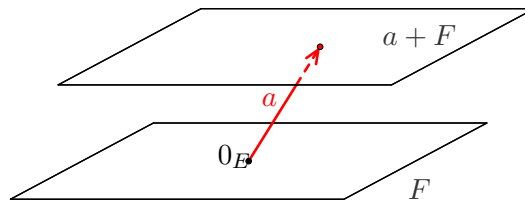
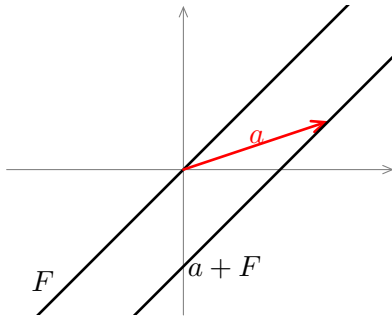
## II Sous-espaces affines

### 1) Définition

**Définition.** Soit  $A$  une partie de  $E$ . On dit que  $A$  est un sous-espace affine de  $E$  s'il existe  $a \in E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  tel que  $A = a + F$ .

### Remarques :

- Si  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $0_E \in F$  et donc  $F = 0_E + F$ . Ainsi  $F$  est un sous-espace affine de  $E$ .
- En d'autres termes, un espace affine est un espace vectoriel translaté :



La réciproque est fautive : un sous-espace affine n'est pas un sous-espace vectoriel car ne contient pas  $0_E$  en général (voir des contre-exemples plus loin).

- Un espace affine n'est jamais vide. En effet, avec les notations ci-dessus, on a  $0_E \in F$  car  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  si bien que  $a = a + 0_E \in a + F$ .
- Lorsqu'on écrira « Soit  $a + F$  un sous-espace affine de  $E$  », il sera sous-entendu dans la suite que  $a \in E$  et que  $F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

## 2) Direction d'un sous-espace affine

Lorsque  $A$  est un sous-espace affine, il existe  $a \in E$  et  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$  tels que  $A = a + F$ . Mais  $a$  et  $F$  sont-ils uniques ?

**Proposition/Définition.** Avec les notations de la définition, le sous-espace vectoriel  $F$  est unique, et on l'appelle la direction du sous-espace affine  $A$ .

DÉMONSTRATION.



C'est intuitif : l'espace vectoriel  $F$  est obtenu en soustrayant un élément de  $E$ , c'est-à-dire en le translatant de manière à ce qu'il contienne  $0_E$  et donc est unique (voir les dessins ci-dessus).

□

### Exemples :

- Si  $a \in E$ ,  $\{a\} = a + \{0_E\}$  donc  $\{a\}$  est un sous-espace affine de direction  $\{0_E\}$ .
- $E$  est un sous-espace affine de  $E$  de direction  $E$  lui-même.

**Définition.** On appelle droite affine un sous-espace affine dont la direction une droite vectorielle. On appelle plan affine un sous-espace affine dont la direction une plan vectoriel.

### Remarque :

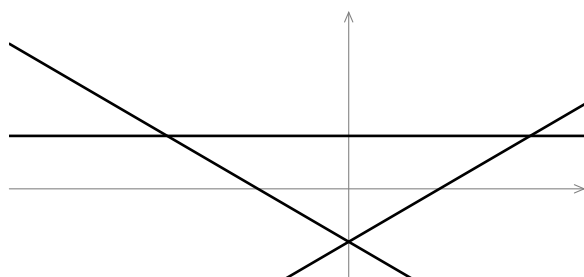
- Une droite affine est donc de la forme  $a + \text{Vect}(u)$  avec  $a \in E$  et  $u$  un vecteur non nul de  $E$ . Autrement dit, il s'agit de  $\{a + \lambda u \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ .
- Un plan affine est donc de la forme  $a + \text{Vect}(u, v)$  avec  $a \in E$  et  $u$  et  $v$  deux vecteurs non colinéaires de  $E$ . Autrement dit, il s'agit de  $\{a + \lambda u + \mu v \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$ .

### Proposition.

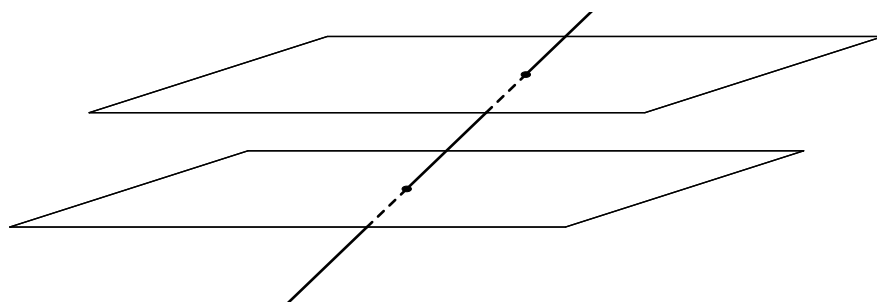
- Les sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^2$  sont exactement les singletons, les droites affines et  $\mathbb{R}^2$  tout entier.
- Les sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^3$  sont exactement les singletons, les droites affines, les plans affines et  $\mathbb{R}^3$  tout entier.

DÉMONSTRATION. Découle du résultat donnant tous les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}^2$  et de  $\mathbb{R}^3$  vu dans le chapitre 28 et démontré dans le chapitre 31.  $\square$

**Exemple :** Ci-dessous, trois sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^2$  :



et ci-dessous, trois sous-espaces affines de  $\mathbb{R}^3$  :



On voit que des sous-espaces affines peuvent être disjoints (contrairement à des sous-espaces vectoriels), cf. paragraphe II.5.

### 3) Égalité de deux sous-espaces affines

**Proposition.** Soit  $(a, b) \in E^2$ . Soient  $F$  et  $G$  deux sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $a + F = b + G$  si et seulement si  $F = G$  et  $b - a \in F = G$ .

DÉMONSTRATION.

Pour reprendre la structure affine présentée en introduction, si  $A$  et  $B$  sont deux points de l'espace  $E$ , alors les sous-espaces affines  $A + F$  et  $B + G$  sont égaux si et seulement si  $F = G$  et  $\overrightarrow{AB} \in F = G$ .

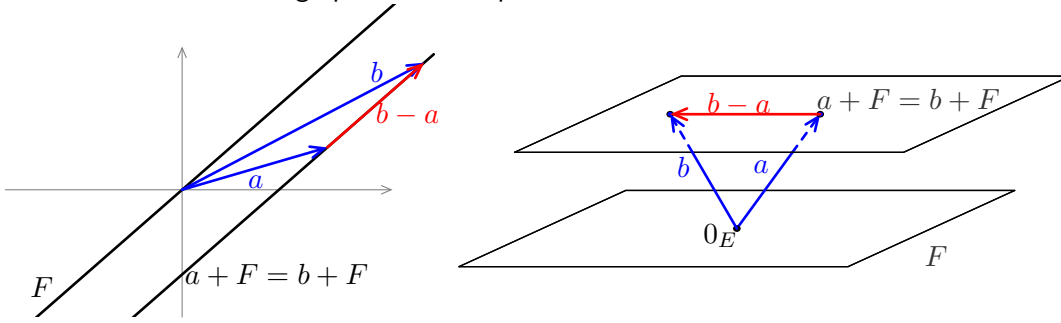
**Corollaire.** Soit  $A = a + F$  un sous-espace affine de  $E$ . Alors :

$$\forall b \in A, \quad A = b + F.$$

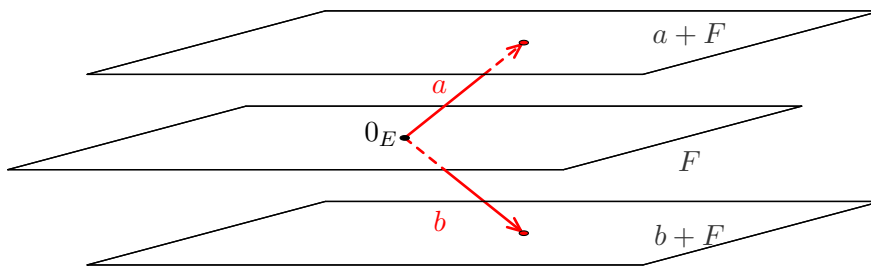
On peut remplacer  $a$  par n'importe quel élément de  $A$ .

DÉMONSTRATION. Soit  $b \in A$ . Alors il existe  $x \in F$  tel que  $b = a + x$  si bien que  $b - a \in F$ . La proposition précédente entraîne que  $A = b + F$ .  $\square$

**Remarque :** Cela se voit bien sur le dessin ci-dessous : si on ajoute  $b$  à la place de  $a$ , avec  $b - a \in F$ , cela ne change pas le sous-espace affine.



**⚠** Deux espaces affines peuvent avoir la même direction sans être égaux : on dit alors qu'ils sont parallèles.

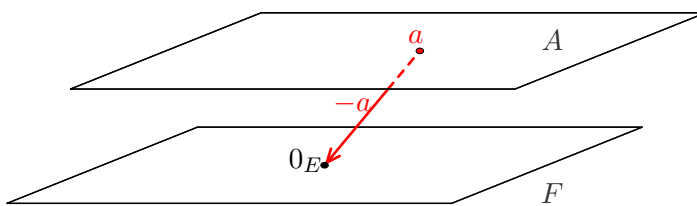


**Corollaire.** Une partie  $A$  est un sous-espace affine de  $E$  si et seulement si, pour tout  $a \in A$ ,  $A - a = \{x - a \mid x \in A\}$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ . Ce sous-espace vectoriel est alors la direction de  $A$ .

**DÉMONSTRATION.** Soit  $A$  un sous-espace affine : il existe  $F$  un sous-espace vectoriel tel que, pour tout  $a \in A$ ,  $A = a + F$  et donc  $A - a = F$  est un sous-espace vectoriel. La réciproque est immédiate.  $\square$

**Remarques :**

- En d'autres termes, on obtient la direction en soustrayant un élément de  $A$  ce qui a pour effet de « changer  $a$  en l'origine » et on peut faire ça avec n'importe quel élément de l'espace affine !



- Ce dernier résultat offre une méthode pour montrer qu'une partie d'un sous-espace vectoriel est un sous-espace affine et pour obtenir sa direction
  - \* On cherche un élément de  $A$  quelconque mais explicite. Notons-le  $a$ .
  - \* On prouve que  $F = A - a$  est un sous-espace vectoriel. Lorsque  $A$  est défini par une équation, on peut voir  $a$  comme une solution particulière et l'injection permet de se ramener à une équation linéaire (cf. paragraphe II.4).

On conclut  $A$  est un sous-espace affine de direction  $F$ .

**Exemples :**

- Montrer que  $A = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid (X^2 + 1)P'' - 6P = -6X\}$  est un espace affine dont on précisera la direction.

Plus précisément, on dit que  $A$  est parallèle à  $B$  si la direction de  $A$  est incluse dans celle de  $B$  (penser à une droite parallèle à un plan) et que  $A$  et  $B$  sont parallèles lorsqu'ils ont la même direction, mais cela dépasse le cadre du programme.

En particulier, un espace affine contient  $0_E$  si et seulement si c'est un espace vectoriel.

On a déjà employé cette démarche avec des systèmes linéaires, avec des suites arithmético-géométriques, avec des solutions d'EDL d'ordre 1 ou 2, avec des similitudes. On en reparlera dans le paragraphe suivant.

- Notons  $J$  la matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  dont tous les coefficients valent 1. Montrons que  $\mathcal{B} = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid M + M^T = J\}$  est un espace affine dont on précisera la direction.



Si on remplace  $J$  par la matrice élémentaire  $E_{1,n}$ , alors  $\mathcal{B}$  n'est pas un sous-espace affine car il est vide (en effet  $E_{1,n}$  ne peut pas être la somme d'une matrice et de sa transposée puisque cette dernière est forcément symétrique).

#### 4) Notion d'équation linéaire

Le but de ce paragraphe est de donner un cadre aux exemples du paragraphe précédent. Soit  $F$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Définition.** Soient  $a \in F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'équation  $u(x) = a$ , d'inconnue  $x \in E$ , est appelée une équation linéaire.



Rappelons que  $F$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

**Proposition.** Soient  $a \in F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . L'ensemble des solutions de l'équation linéaire  $u(x) = a$  est un espace affine dirigé par  $\text{Ker}(u)$  lorsque  $a \in \text{Im}(u)$ . Il est vide sinon.

DÉMONSTRATION. Soit  $\mathcal{S}_a$  l'ensemble des solutions de  $u(x) = a$ . Si  $a \notin \text{Im}(u)$ , il n'y a pas de solution. Supposons que  $a \in \text{Im}(u)$ .

□

Ainsi toute solution d'une équation linéaire (qui en admet une) s'écrit sous la forme : **solution particulière + élément du noyau**. On a déjà rencontré ce cas de figure à de nombreuses reprises. Revisitons-les :

**Exemples :**

- L'ensemble des solutions d'un système linéaire

$$(S) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

En notant  $A$  la matrice associée au système et  $B$  le second membre, il s'agit de l'équation linéaire  $u(X) = B$  avec  $u : X \mapsto AX$  de  $\mathbb{K}^p$  dans  $\mathbb{K}^n$ .

est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine de  $\mathbb{K}^p$  : plus précisément, s'il existe une solution  $X = (x_1, \dots, x_p)$ , alors l'ensemble des solutions est le sous-espace affine  $X + \mathcal{S}_H$  où  $\mathcal{S}_H$  est l'ensemble des solutions du système homogène

$$(S_0) \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,p}x_p = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,p}x_p = 0 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,p}x_p = 0 \end{cases}$$

C'est bien un espace vectoriel car ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Par exemple, le système

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

est un sous-espace affine de  $\mathbb{R}^3$  car  $(1, 1, 1)$  est solution évidente, et sa direction est l'ensemble des solutions du système homogène

$$\begin{cases} x + y = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$$

Il était attendu que l'ensemble des solutions du système homogène soit une droite vectorielle puisque c'est l'intersection de plans distincts.

On trouve facilement qu'il s'agit de  $\text{Vect}((1, -1, -2))$ . L'ensemble des solutions du système (non homogène) est donc l'espace affine  $(1, 1, 1) + \text{Vect}((1, -1, 2))$ .

- Soit  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  tel que  $a \neq 1$ . L'ensemble  $A = \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = au_n + b\}$  est un sous-espace affine de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ . En effet, si on note  $c$  la suite constante égale à  $\frac{b}{1-a}$ , alors une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  appartient à  $A$  si et seulement si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} - c$  est géométrique de raison  $a$  si et seulement si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} - c$  appartient à l'espace vectoriel  $\text{Vect}((a^n)_{n \in \mathbb{N}})$  (en effet  $x = \frac{b}{1-a}$  vérifie  $x = ax + b$ ). Ainsi  $A = c + \text{Vect}((a^n)_{n \in \mathbb{N}})$ . Plus précisément,  $A$  est une droite affine car sa direction est un espace vectoriel de dimension 1 (même si  $a = 0$  car alors c'est la suite dont le terme d'indice 0 vaut 1 et les autres sont nuls).
- Notons  $y_0$  une solution particulière de l'équation linéaire du premier ordre  $(E) : y' + ay = b$  avec  $a$  et  $b$  des fonctions continues sur un intervalle  $I$ . Alors  $y \in \mathcal{S}_E$  si et seulement si  $y - y_0 \in \mathcal{S}_H$ , l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée. Or  $\mathcal{S}_H$  est un espace vectoriel de dimension 1 (cf. chapitre 31) si bien que  $\mathcal{S}_E = y_0 + \mathcal{S}_H$  est une droite affine (de direction  $\mathcal{S}_H$  qui est une droite vectorielle).
- Notons  $y_0$  une solution particulière de l'équation linéaire du second ordre  $(E) : y'' + ay' + by = f$  avec  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  et  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ . Alors  $y \in \mathcal{S}_E$  si et seulement si  $y - y_0 \in \mathcal{S}_H$ , l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée. Or  $\mathcal{S}_H$  est un espace vectoriel de dimension 2 (cf. chapitre 31) si bien que  $\mathcal{S}_E = y_0 + \mathcal{S}_H$  est un plan affine (de direction  $\mathcal{S}_H$  qui est un plan vectorielle).
- Revisions encore une fois les polynômes interpolateurs de Lagrange. On se donne  $n \in \mathbb{N}^*$  puis  $a_1, \dots, a_n$  des éléments distincts de  $\mathbb{K}$  et enfin  $b_1, \dots, b_n$  des éléments de  $\mathbb{K}$ . On a vu dans le chapitre 21 que

Il s'agit de l'équation linéaire  $f((u_n)_n) = (b)_n$  avec  $f : (u_n)_n \mapsto (u_{n+1} - au_n)_n$  de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  dans lui-même.

Il s'agit de l'équation linéaire  $\varphi(y) = b$  avec  $\varphi : y \mapsto y' + ay$  de  $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ .

Il s'agit de l'équation linéaire  $\varphi(y) = f$  avec  $\varphi : y \mapsto y'' + ay' + by$  de  $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{R})$  dans  $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$ .

$$L = \sum_{k=1}^n b_k \times \prod_{i \neq k} \frac{(X - a_i)}{(a_k - a_i)}$$

est l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à  $n - 1$  vérifiant, pour tout  $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ ,  $P(a_i) = b_i$ . On a aussi vu la forme des autres polynômes vérifiant ces égalités mais procédons différemment.

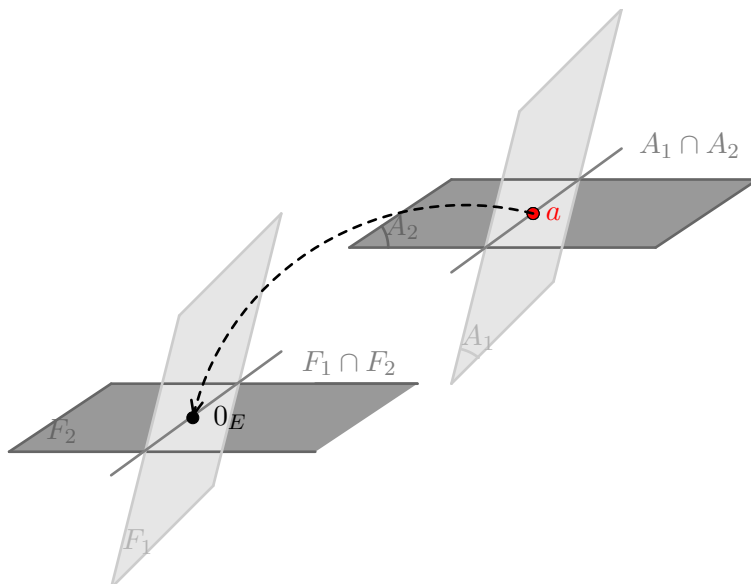
### 5) Intersection de sous-espaces affines

On a vu au paragraphe II.2 que, contrairement à ce qui se passe avec des espaces vectoriels, des espaces affines peuvent avoir une intersection vide :

**Proposition.** Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces affines indexée par un ensemble  $I$  non vide. Pour tout  $i \in I$ , notons  $F_i$  la direction de  $A_i$ . Alors  $\bigcap_{i \in I} A_i = \emptyset$  ou  $\bigcap_{i \in I} A_i$  est un sous-espace affine de direction  $\bigcap_{i \in I} F_i$ .

Autrement dit, l'intersection d'une famille de sous-espaces affines est soit vide, soit un espace affine de direction l'intersection des directions des sous-espaces affines.

DÉMONSTRATION.



□ Cela se voit bien sur le dessin ci-contre : l'intersection des deux plans affines ci-est une droite affine, dirigée par l'intersection des directions respectives de  $A_1$  et  $A_2$ .