Devoir maison n° 15

À rendre le vendredi 20 février 2026

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Problème : Quelques propriétés des matrices circulantes

On fixe $n \in \mathbb{N} \backslash \{0;1\}$. On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Pour tout $(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$, on note

$$C(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n & a_0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$$

et on dit que le polynôme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$ est son polynôme associé.

On note $\mathcal{C}_n(\mathbb{C}) = \{C(a_0, \ldots, a_{n-1}) \,|\, (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n\}$. Il s'agit donc d'un sous-ensemble de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ appelé ensemble des matrices circulantes.

Parmi les matrices circulantes, on note

$$A = C(0, 1, 0, \ldots, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit $(A)_{n,1} = 1$, pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $(A)_{k,k+1} = 1$, et les autres coefficients de A sont nuls.

Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons E_k la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui à la $k^{\text{ième}}$ ligne. Remarquons que :

- $C(1, 0, 0, 0, \ldots, 0) = \mathrm{I} = (E_1|E_2|\cdots|E_{n-1}|E_n)$
- $C(0, 1, 0, 0, \ldots, 0) = A = (E_n|E_1|E_2|\cdots|E_{n-1})$
- $C(0, 0, 1, 0 \ldots, 0) = (E_{n-1}|E_n|E_1|E_2|\cdots|E_{n-2})$
- etc.

On rappelle que, lorsque $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{d} c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors $P(M)$ désigne la matrice $\displaystyle\sum_{k=0}^{d} c_k M^k$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On pourra utiliser sans démonstration le fait que, pour tous $(P, Q) \in \mathbb{C}[X]^2$, $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\lambda P(M) + \mu Q(M) = (\lambda P + \mu Q)(M) \quad \text{et} \quad P(M) \times Q(M) = (PQ)(M) = Q(M) \times P(M).$$

Partie A : Cas particulier où $n = 3$

On suppose dans cette partie <u>uniquement</u> que $n = 3$. On a alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On note $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et on pose

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{j} & \mathrm{j}^2 \\ 1 & \mathrm{j}^2 & \mathrm{j} \end{pmatrix}.$$

1) Vérifier que $Q^{-1} = \dfrac{1}{3}\overline{Q}$ où $\overline{Q}$ désigne la matrice obtenue en remplaçant les coefficients de Q par leur conjugué.

2) On se donne $(a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{C}^3$. On pose $C = C(a_0, a_1, a_2)$ et on note

$$P_C = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$$

son polynôme associé.

   a) Vérifier que $C = P_C(A)$.

   b) Vérifier par le calcul que $D = Q^{-1}AQ$ est une matrice diagonale.

   c) En déduire que $Q^{-1}CQ$ est aussi une matrice diagonale. On exprimera les coefficients diagonaux en fonction du polynôme P_C.

3) Dans cette question, on suppose que $a_0 = -1$ et $a_1 = a_2 = 1$ de sorte que

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad P_C = X^2 + X - 1.$$

   a) À l'aide de la méthode du pivot de Gauss, montrer que C est inversible et calculer C^{-1}.

   b) Expliciter le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les points

$$\left(1, \frac{1}{P_C(1)}\right), \qquad \left(\mathrm{j}, \frac{1}{P_C(\mathrm{j})}\right) \qquad \text{et} \qquad \left(\mathrm{j}^2, \frac{1}{P_C(\mathrm{j}^2)}\right).$$

   On le notera $\widehat{P}$.
   On le simplifiera au maximum mais sans le factoriser.

   c) Déterminer une matrice circulante dont le polynôme associé est $\widehat{P}$. Que remarque-t-on ?

Partie B : Puissances et inversibilité de la matrice A

Dans cette partie et les suivantes, tout calcul de produit de matrice doit être montré par calculs algébriques ou avec la formule de la définition du produit. Aucun produit « en papillon » avec des pointillés ne sera accepté pour preuve.

Pour tout $j \in [\![0\,;n-1]\!]$, notons $E_{-j} = E_{n-j}$ pour simplifier les calculs.

1) Montrer que, pour tous $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $j \in [\![1\,;n]\!]$, ME_j est la $j^{\text{ième}}$ colonne de M.

2) Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, posons $H(k)$: « Pour tout $j \in [\![1\,;n]\!]$, $A^k E_j = E_{j-k}$ ».
Montrer que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $H(k)$ est vraie.

3) Montrer alors que, pour tout $k \in [\![1\,;n-1]\!]$, $A^k = C(0, \ldots, 0, \underset{k+1}{1}, 0 \ldots, 0)$ et que $A^n = \mathrm{I}$.

4) En déduire que A est inversible et que $A^{-1} = A^T$.

Partie C : Structure d'anneau de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$

1) En utilisant la question B3, montrer que,

$$\forall (a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n, \qquad C(a_0, \ldots, a_{n-1}) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k A^k.$$

Autrement dit, si $C = C(a_0, \ldots, a_{n-1})$, alors $C = P_C(A)$ où P_C désigne le polynôme associé à C.

2) Montrer alors que

$$\mathcal{C}_n(\mathbb{C}) = \{\, P(A) \mid P \in \mathbb{C}[X] \,\}.$$

3) Montrer que $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$ est un sous-anneau de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ qui est commutatif.

Partie D : Diagonalisation et inversibilité des matrices de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$

Notons $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{n}}$. On définit la matrice $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que

$$\forall (k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^2, \qquad (Q)_{k,\ell} = \omega^{(k-1)(\ell-1)}.$$

On note $\overline{Q}$ la matrice obtenue en remplaçant chaque coefficient de Q par son conjugué.

1) Calculer le produit $Q\overline{Q}$ et en déduire que $Q \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

2) On note $D = \mathrm{diag}(1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{n-1})$.

   a) Vérifier que $AQ = QD$.

   b) En déduire que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $D^k = Q^{-1}A^kQ$.

3) Soit $(a_0, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Notons $C = C(a_0, \ldots, a_{n-1})$ et $P_C = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k$.

   a) Montrer que $Q^{-1}CQ = \mathrm{diag}(P_C(1), P_C(\omega), \ldots, P_C(\omega^{n-1}))$.

   b) En déduire que C est inversible si et seulement si, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, ω^k n'est pas racine de P_C.

   c) Caractériser enfin $U(\mathcal{C}_n(\mathbb{C}))$, le groupe des inversibles de $\mathcal{C}_n(\mathbb{C})$.
   Comme dans la partie A, on pensera à utiliser un polynôme d'interpolation de Lagrange (sans l'expliciter).