

Devoir maison n° 16

À rendre le lundi 9 mars 2026

EXERCICE 1 : THÉORÈME DE WEIERSTRASS TRIGONOMÉTRIQUE

On dit qu'une fonction $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est un polynôme trigonométrique s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et $(a_k)_{k \in [-d; d]} \in \mathbb{C}^{2d+1}$ tel que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad p(t) = \sum_{k=-d}^d a_k e^{ikt}.$$

Autrement¹ dit, il existe un polynôme $P \in \mathbb{C}_{2d}[X]$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $p(t) = e^{-idt} P(e^{it})$.

L'objectif de cet exercice est de prouver que toute fonction continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} est « limite uniforme » d'une suite de polynômes trigonométriques.

Commençons par construire un polynôme trigonométrique particulier.

- 1) a) Justifier que $t \mapsto 1 + \cos(t)$ est un polynôme trigonométrique.
- b) Montrer que le produit de deux polynômes trigonométriques est un polynôme trigonométrique. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $u_n : t \mapsto (1 + \cos(t))^n$ est un polynôme trigonométrique.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $c_n = \int_0^{2\pi} u_n(t) dt$.

- c) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$c_n \geq 2 \int_0^\pi u_n(t) \sin(t) dt.$$

- d) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale de l'inégalité ci-dessus et en déduire que $c_n > 0$ et que

$$\forall a \in]0; \pi], \quad \frac{(1 + \cos(a))^n}{c_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

- e) Conclure que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $v_n : t \mapsto \frac{u_n(t)}{c_n}$ est un polynôme trigonométrique à valeurs dans \mathbb{R}_+ et que

$$\int_0^{2\pi} v_n(t) dt = 1.$$

On se donne maintenant une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui est continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} .

- 2) a) Montrer que f est bornée sur \mathbb{R} .
- b) Montrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R} .
On pourra commencer par justifier que f est uniformément continue sur $[-\pi; 3\pi]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f_n : x \mapsto \int_0^{2\pi} f(x-t)v_n(t) dt.$$

- 3) a) Montrer que, si g est une fonction continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} , alors

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \int_a^{a+2\pi} g(u) du = \int_0^{2\pi} g(u) du.$$

- b) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \int_0^{2\pi} f(u)v_n(x-u) du.$$

- c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est un polynôme trigonométrique.

1. On ne demande pas de prouver que ces deux définitions sont équivalentes. Le polynôme P est $\sum_{k=0}^{2d} a_{k-d} X^k$.

4) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f_n(x) = \int_0^{2\pi} (f(x) - f(x-t))v_n(t) dt.$$

5) Soit $\varepsilon > 0$.

a) Montrer qu'il existe un réel $\alpha \in]0; \pi]$ tel que, pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0; \alpha]$, $|f(x) - f(x-t)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$.

On se donne $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

b) Dédurre de la question précédente que

$$\int_0^\alpha |f(x) - f(x-t)|v_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que

$$\int_{2\pi-\alpha}^{2\pi} |f(x) - f(x-t)|v_n(t) dt \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

c) Montrer que

$$\int_\alpha^{2\pi-\alpha} |f(x) - f(x-t)|v_n(t) dt \leq 4\pi \times \sup_{\mathbb{R}} |f| \times \frac{(1 + \cos(\alpha))^n}{c_n}.$$

6) a) En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tous $n \geq n_0$ et $x \in \mathbb{R}$, $|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon$.

On justifiera bien que n_0 ne dépend pas de x .

b) Conclure que $\sup_{\mathbb{R}} |f - f_n| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

On dit que la suite de fonctions polynômes trigonométriques $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers f . On vient donc de montrer que toute fonction continue et 2π -périodique sur \mathbb{R} est limite uniforme d'une suite de polynômes trigonométriques.

EXERCICE 2 : RÉGULARITÉ D'UN TAUX D'ACCROISSEMENT

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} telle que $f(0) = 0$. On définit la fonction g sur \mathbb{R}^* par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g(x) = \frac{f(x)}{x}.$$

Le but de cet exercice est de montrer que g se prolonge en une fonction de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et de calculer ses dérivées successives.

1) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* et que g est prolongeable par continuité en 0.

On précisera le prolongement et on note toujours g la fonction ainsi prolongée.

2) Montrer que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^* et, en utilisant la formule de Leibniz, établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*, \quad g^{(n)}(x) - \frac{f^{(n+1)}(x)}{n+1} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)(-x)^k}{k!}.$$

3) Montrer que, pour tout $x \in [-1, 1]$,

$$\left| \sum_{k=0}^{n+1} \frac{f^{(k)}(x)(-x)^k}{k!} \right| \leq \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \sup_{[-1,1]} |f^{(n+2)}|.$$

4) En déduire que $g^{(n)}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1}$.

5) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons

$$H_n : \text{« } g \text{ est de classe } \mathcal{C}^n \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } g^{(n)}(0) = \frac{f^{(n+1)}(0)}{n+1} \text{ »}.$$

En procédant par récurrence, montrer que H_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$. Conclure que g est de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} tout entier.