

Devoir maison n° 17

À rendre le lundi 23 mars 2026

EXERCICE : QUESTIONS EN VRAC

1) Montrer que la fonction

$$f : x \mapsto \operatorname{ch} \left(\frac{1}{x} \right) \sqrt[3]{x^3 - 3x^2 + x + 1}$$

admet une asymptote en $+\infty$ dont on donnera l'équation. On précisera aussi la position relative de la courbe de f par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\sin(t)}{\sqrt{n+t}} dt.$$

À l'aide de deux intégrations par parties successives, montrer que

$$I_n \underset{+\infty}{=} \frac{2}{\sqrt{n}} - \frac{\pi}{2n^{3/2}} + \mathcal{O} \left(\frac{1}{n^{5/2}} \right).$$

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $I_n = \left[n\pi; \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$.

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x \tan(x) = 1$ admet une unique solution x_n dans I_n .

b) Justifier que $x_n = n\pi + \operatorname{Arctan} \left(\frac{1}{x_n} \right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

c) En déduire que

$$x_n \underset{+\infty}{=} n\pi + \frac{1}{n\pi} - \frac{4}{3\pi^3 n^3} + \mathcal{o} \left(\frac{1}{n^3} \right).$$

On obtiendra chacun des trois termes de ce développement asymptotique « tour à tour » (et chacun permettra de gagner des points).

4) Déterminer la nature de la série

$$\sum \operatorname{Arctan}(n!) \left(1 - \cos \left(\frac{\ln(n)}{n^{5/6}} \right) \right).$$

5) Déterminer la nature de la série

$$\sum \frac{(-1)^n}{n^{4/5} + \cos(n)}.$$

PROBLÈME : UNE SÉRIE EN LIEN AVEC LA FONCTION ζ DE RIEMANN

Pour tout $x \in]1; +\infty[$, la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^x}$ converge et on note

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier une fonction définie par la somme d'une série convergente et de montrer au passage que la série $\sum \frac{\zeta(n)}{2^n}$ converge et de calculer sa somme.

Partie A : La constante d'Euler

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}, \quad U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2k-1}, \quad \text{et} \quad u_n = H_n - \ln(n).$$

1) Montrer que

$$u_{n+1} - u_n \underset{+\infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

2) En déduire qu'il existe un réel γ (que l'on ne cherchera pas calculer) tel que

$$H_n \underset{+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1).$$

Le réel γ s'appelle la constante d'Euler.

3) a) Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad U_n + \frac{1}{2}H_n = H_{2n}.$$

b) En déduire que

$$2U_n - H_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2 \ln(2).$$

Partie B : Une fonction définie à l'aide d'une série

1) Pour tout $x \in]-\infty; 1]$, justifier que la série $\sum_{n \geq 2} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n} \right)$ converge. On note alors

$$F_1(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n} \right).$$

2) Calculer $F_1(0)$, $F_1(1)$ et $F_1(-1)$.

3) Justifier que $F_1\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \ln(2) - 1$.

4) Sans utiliser de dérivées, justifier que F_1 est une fonction strictement croissante sur $]-\infty; 1]$ puis en déduire le signe de F_1 sur $]-\infty; 1]$.

Partie C : Régularité de la fonction F_1

1) Pour tous $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $x \in]-\infty; 1]$, justifier que la série $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{(n-x)^k}$ converge. On note alors

$$F_k(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^k}.$$

2) On se donne $x \in [-1; 1]$, $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$.

a) Justifier que, pour tout $y \in [-1; 1]$,

$$\left| \frac{1}{(n-y)^k} - \frac{1}{(n-x)^k} - \frac{k(y-x)}{(n-x)^{k+1}} \right| \leq (y-x)^2 \frac{k(k+1)}{2(n-1)^{k+2}}.$$

b) En déduire que, lorsque $y \in [-1; 1] \setminus \{x\}$,

$$\left| \frac{F_k(y) - F_k(x)}{y-x} - kF_{k+1}(x) \right| \leq |y-x| \times \frac{k(k+1)}{2} F_{k+2}(1).$$

c) En déduire que F_k est dérivable en x et préciser $F_k'(x)$.

3) Conclure que F_1 est de classe \mathcal{C}^∞ sur $[-1; 1]$ et que

$$\forall x \in]-1; 1[, \quad \forall k \in \mathbb{N}, \quad F_1^{(k)}(x) = k! F_{k+1}(x).$$

On peut montrer (on ne demande pas de le faire) que F_1 est dérivable sur tout $]-\infty; 1]$ et que la formule ci-dessus reste valable sur $]-\infty; 1]$.

4) Montrer que, pour tous $k \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$ et $t \in [0; 1[$, $F_{k+2}(t) \leq \zeta(2)$.

5) Soit $x \in [0; 1[$.

a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| F_1(x) - \sum_{k=1}^n (\zeta(k+1) - 1)x^k \right| \leq |x|^{n+1} \zeta(2).$$

b) En déduire que la série $\sum (\zeta(n) - 1)x^n$ converge et que

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (\zeta(n) - 1)x^n = xF_1(x).$$

c) Donner enfin la valeur exacte de $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\zeta(n)}{2^n}$.

Partie D : Étude locale de la fonction F

On définit la fonction F sur $]-\infty; 1[$ par

$$\forall x \in]-\infty; 1[, \quad F(x) = \frac{1}{1-x} - 1 + F_1(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n} \right)$$

1) On rappelle (on l'a vu trois fois cette année) que $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$. Justifier alors que

$$F(x) - \frac{\pi^2}{6}x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \zeta(3)x^2.$$

Quelle est la position relative de la courbe de F par rapport à sa tangente en 0 ?

2) Calculer la limite de F en 1^- .

3) Soient $x \in \mathbb{R}_-^*$. Soit $N \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$. Notons

$$S_N(x) = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n} \right).$$

a) Déterminer les variations de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t-x} - \frac{1}{t}$ sur \mathbb{R}_+^* .

b) En faisant une comparaison série/intégrale, montrer que

$$S_N(x) - \frac{x}{N(N-x)} \leq \int_1^N \left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{t} \right) dt \leq S_N(x) - \frac{x}{1-x}.$$

c) Calculer cette intégrale puis en déduire que

$$-\ln(1-x) + \frac{x}{1-x} \leq F(x) \leq -\ln(1-x).$$

d) Conclure que $F(x) \underset{x \rightarrow -\infty}{\sim} -\ln(-x)$.

4) Représenter graphiquement l'allure de la courbe représentative de F .

On tracera aussi les tangentes et asymptotes révélées par les questions précédentes, quelques points particuliers et la courbe de $x \mapsto -\ln(-x)$. On fera aussi attention à la convexité/concavité de la fonction.