

Devoir maison n° 18

À rendre le lundi 13 avril 2026

EXERCICE 1 : QUESTIONS EN VRAC

- 1) Montrer que les vecteurs $u = (-2, 1, 0)$, $v = (2, 2, 2)$ et $w = (0, 1, 2)$ forment une base de \mathbb{R}^3 et donner les coordonnées du vecteur $(1, 2, 3)$ dans cette base.
- 2) Expliciter $F = \text{Vect}((1, 2, 1, 2), (1, 0, 1, -1), (-1, 4, -1, 7))$ à l'aide d'une ou de plusieurs équations¹.
- 3) Montrer que $E_1 = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid \int_0^3 f(t) dt = 0 \right\}$ et E_2 , l'ensemble des fonctions constantes, sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, et expliciter la projection sur E_1 parallèlement à E_2 , ainsi que la symétrie par rapport à E_1 parallèlement à E_2 .

EXERCICE 2 : LEMME DES NOYAUX

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel. On rappelle que, lorsque f est un endomorphisme de E et

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$$

alors, on note $P(f)$ l'endomorphisme

$$P(f) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k f^k.$$

- 1) Soient $f \in \mathcal{L}(E)$.
 - a) Pourquoi, pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)$ est-il bien un endomorphisme ?
 - b) Montrer que, pour tous $(P, Q) \in \mathbb{K}[X]^2$,

$$(P + Q)(f) = P(f) + Q(f), \quad (PQ)(f) = (QP)(f) = P(f) \circ Q(f) \quad \text{et} \quad (\lambda P)(f) = \lambda P(f).$$

Comment peut-on qualifier l'application $P \mapsto P(f)$ (qui va de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathcal{L}(E)$) ?

- 2) On se donne $f \in \mathcal{L}(E)$ ainsi que P et Q deux polynômes premiers entre eux.
 - a) Justifier que $\text{Ker}((PQ)(f))$ contient $\text{Ker}(P(f))$ et $\text{Ker}(Q(f))$.
 - b) À l'aide d'une relation de Bézout, justifier que $\text{Ker}((PQ)(f)) = \text{Ker}(P(f)) + \text{Ker}(Q(f))$.
 - c) Justifier que $\text{Ker}(P(f))$ et $\text{Ker}(Q(f))$ sont en somme directe.

On vient donc de montrer le lemme des noyaux : pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ et pour tous polynômes P et Q premiers entre eux,

$$\text{Ker}((PQ)(f)) = \text{Ker}(P(f)) \oplus \text{Ker}(Q(f)).$$

- 3) **Application.** Soit $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose² qu'il existe $P \neq 0$ tel que $P(f)$ est l'endomorphisme nul. On dit que P est un polynôme annulateur de f . Soit $\alpha \in \mathbb{K}$ une racine de P . Notons m son ordre de multiplicité et Q le quotient de la division euclidienne de P par $(X - \alpha)^m$. Montrer que

$$E = \text{Ker}((f - \alpha \text{Id}_E)^m) \oplus \text{Ker}(Q(f)).$$

Une autre application du lemme des noyaux est proposée dans le prochain exercice.

1. C'est-à-dire, trouver un système linéaire homogène (d'un ou plusieurs équations) dont les éléments de F sont exactement les solutions.

2. Si E est de dimension finie, cette existence sera bientôt prouvée en cours.

Pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et on note $\mathcal{H}_n(a)$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = 0,$$

c'est-à-dire l'ensemble des fonctions f qui sont n fois dérivable sur \mathbb{R} et qui vérifient

$$f^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k f^{(k)} = 0.$$

On note $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On rappelle que c'est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

- 1) Justifier que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}_n(a)$ est un sous-espace vectoriel de E .
- 2) Justifier que $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de E et que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{H}_n(a) = \text{Ker}(P(D))$ avec

$$P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k.$$

- 3) a) Déterminer une base de $\mathcal{H}_1(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
- b) Déterminer une base de $\mathcal{H}_2(a)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^2$.
On fera trois cas selon le signe du discriminant de $X^2 + a_1 X + a_0$.

- 4) On suppose dans cette question que $n = 3$. Soit $a = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$. On note $P = X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$. On suppose enfin que P n'admet pas de racine triple.

- a) Justifier qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ et $b = (b_0, b_1) \in \mathbb{R}^2$ tel que $Q = X^2 + b_1 X + b_0$ est premier avec $X - r$ et $P = (X - r)Q$.
- b) En utilisant le lemme des noyaux (cf. exercice précédent), justifier que $\mathcal{H}_3(a) = \mathcal{H}_1(-r) \oplus \mathcal{H}_2(b)$.
- c) En déduire une base de $\mathcal{H}_3(a)$.
On fera trois cas selon le signe du discriminant de P .

- 5) Soit $r \in \mathbb{R}$.

- a) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation différentielle $f' - \alpha f = P(x)e^{\alpha x}$.
- b) Vérifier que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in E$,

$$f \in \text{Ker}((D - r \text{Id}_E)^{n+1}) \iff f' - r f \in \text{Ker}((D - r \text{Id}_E)^n).$$

- c) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(x \mapsto x^k e^{rx})_{0 \leq k \leq n-1}$ est une base de $\text{Ker}((D - r \text{Id}_E)^n)$.
Pour le caractère générateur, on raisonnera par récurrence.
- d) Déterminer alors une base de $\mathcal{H}_3(a)$ lorsque $a = (a_0, a_1, a_2) \in \mathbb{R}^3$ est tel que $X^3 + a_2 X^2 + a_1 X + a_0$ admet r pour racine triple.

Nous venons donc de résoudre totalement les équations différentielles linéaires homogènes d'ordre 3 à coefficients réels constants. On peut procéder de même si les coefficients sont complexes. On peut ensuite poursuivre cette démarche pour résoudre les équations différentielles linéaires d'ordre 4, puis 5, etc. Mais le nombre de cas à faire explose donc cette méthode devient assez rapidement fastidieuse. Elle sera reprise en deuxième année car c'est une application classique de réduction d'endomorphismes.

- 6) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a = (a_0, \dots, a_{n-1}) \in \mathbb{R}^n$ et $g \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. on note $\mathcal{E}_n(a, g)$ l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$y^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k y^{(k)} = g.$$

On admet que cet ensemble est non vide, c'est-à-dire que cette équation différentielle admet une solution. Montrer alors que $\mathcal{E}_n(a, g)$ est un sous-espace affine de $\mathcal{D}^n(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ dont la direction est $\mathcal{H}_n(a)$.