Devoir maison nº 2

À rendre le lundi 15 septembre 2025

*Ce devoir est **individuel** et **obligatoire**. Si vous n'arrivez pas à traiter une question, demandez de l'aide à vos camarades ou à moi même et, si vous n'y arrivez vraiment pas, je préfère que vous ne traitiez pas la question plutôt que de la recopier sur quelqu'un d'autre.*

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

Exercice 1 : Questions en vrac

1) Résoudre l'inéquation $3x - 5 + \sqrt{13 - 6x} > 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
   On ne fera pas d'étude de variations d'une fonction pour résoudre cette inéquation.
2) Résoudre l'inéquation $\lfloor 3 - 2x \rfloor = \lfloor x \rfloor^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Problème : Équation de Pell-Fermat

Dans ce problème, on se donne un entier naturel non nul d. On cherche à résoudre l'équation (dite de Pell-Fermat)

$$(E_d) \qquad x^2 - dy^2 = 1$$

d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Autrement dit, on cherche tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que $x^2 - dy^2 = 1$.

Bien sûr le couple $(1, 0)$ est solution de (E_d). On dit qu'un couple d'entiers (x, y) est solution non triviale de l'équation (E_d) lorsque (x, y) est solution de (E_d) et que $y \in \mathbb{N}^*$. Le but de ce problème est de déterminer les solutions non triviales.

Partie A : Le cas où d est un carré parfait

On suppose dans cette partie uniquement que d est un carré parfait : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $d = k^2$. En utilisant une identité remarquable, montrer que l'équation (E_d) n'admet pas de solution non triviale, c'est-à-dire que $(1, 0)$ est la seule solution de (E_d).

Partie B : Une classe de solutions

Dans cette partie et les suivantes, on suppose que d n'est pas un carré parfait. En particulier $d \in \mathbb{N}^*$ et on admet que $\sqrt{d}$ est un irrationnel [1].

On admet aussi (E_d) possède une solution non triviale.

1) a) Justifier que l'ensemble $A_d = \{y \in \mathbb{N}^* \mid \exists x \in \mathbb{N},\, x^2 - dy^2 = 1\}$ admet un minimum. On note alors $y_1 = \min(A_d)$ et on pose $x_1 = \sqrt{1 + dy_1^2}$.
   b) Pourquoi x_1 est-il un entier naturel non nul ?
   c) Expliciter le couple (x_1, y_1) lorsque $d = 2$, $d = 3$ et $d = 5$.

Dans la suite, on suppose que d est un entier naturel non nul quelconque et n'étant pas un carré parfait.

1. On le montrera dans le chapitre 12.

On définit les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ par :

$$\forall n \geqslant 1, \qquad \begin{cases} x_{n+1} = x_1 x_n + d y_1 y_n \\ y_{n+1} = y_1 x_n + x_1 y_n \end{cases}.$$

2) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, x_n et y_n sont des entiers naturels non nuls vérifiant

$$x_n + y_n\sqrt{d} = (x_1 + y_1\sqrt{d})^n \qquad \text{et} \qquad x_n - y_n\sqrt{d} = (x_1 - y_1\sqrt{d})^n.$$

b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (x_n, y_n) est solution non triviale de (E_d).
On ne raisonnera pas par récurrence à cette question.

c) Montrer que les suites $(x_n)_{n\geqslant 1}$ et $(y_n)_{n\geqslant 1}$ sont strictement croissantes[1]. Que peut-on en affirmer concernant le nombre de solutions de (E_d) ?

Partie C : Ce sont les seules solutions

On vient donc de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, le couple (x_n, y_n) est solution non triviale de (E_d). Le but de cette partie est de montrer qu'il s'agit des seules solutions non triviales de (E_d). On se donne donc une solution non triviale (x, y), c'est-à-dire que $y > 0$ et $x^2 - dy^2 = 1$.

1) Posons $n_0 = \left\lfloor \dfrac{\ln(x + y\sqrt{d})}{\ln(x_1 + y_1\sqrt{d})} \right\rfloor$. A l'aide de la question B2a, montrer que

$$1 \leqslant \frac{x + y\sqrt{d}}{x_{n_0} + y_{n_0}\sqrt{d}} < x_1 + y_1\sqrt{d}.$$

2) a) Montrer qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ (que l'on explicitera) tel que

$$\frac{x + y\sqrt{d}}{x_{n_0} + y_{n_0}\sqrt{d}} = a + b\sqrt{d}.$$

b) Vérifier par le calcul que $a^2 - db^2 = 1$.

3) Justifier que $x > y\sqrt{d}$ et que $x_{n_0} > y_{n_0}\sqrt{d}$. En déduire que $a \in \mathbb{N}^*$.

4) On suppose que $b < 0$.

a) Montrer que $b\sqrt{d} = -\sqrt{a^2 - 1}$. En déduire que

$$a + b\sqrt{d} = \frac{1}{a + \sqrt{a^2 - 1}}.$$

b) En déduire que $a = 1$ et aboutir à une absurdité.

5) En déduire que (a, b) est solution de (E_d).

6) Supposons que (a, b) est une solution non triviale de (E_d). En utilisant la minimalité de y_1, aboutir à une absurdité.

7) Conclure que $x = x_{n_0}$ et $y = y_{n_0}$.
On utilisera le fait que $\sqrt{d}$ est rationnel.

Ainsi toute solution non triviale est bien l'un des couples (x_n, y_n), $n \in \mathbb{N}^*$. En notant $(x_0, y_0) = (1, 0)$, on conclut que $\{(x_n, y_n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est l'ensemble des solutions de l'équation de Pell-Fermat[2].

---

1. C'est-à-dire que, pour tout $n \geqslant 1$, $x_{n+1} > x_n$ et $y_{n+1} > y_n$.
2. Pour autant, cette résolution n'est pas entièrement satisfaisante :
   - Déjà nous nous sommes contentés d'admettre qu'il existait une solution non triviale (ce qui est vrai, mais non montré dans ce problème).
   - Le fait de savoir qu'il existe une solution non triviale ne nous dit pas comment la trouver. Par exemple :
     - ⋆ Si $d = 13$, on a $y_1 = 180$, ce qui force déjà à vérifier beaucoup de nombres avant de trouver y_1.
     - ⋆ Si $d \leqslant 60$, on peut montrer que $y_1 \leqslant 10000$.
     - ⋆ Si $d = 61$, on a $y_1 = 226153980$. Bon courage pour la trouver à la main !