

# Devoir maison n° 20

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

## PROBLÈME : QUELQUES PROPRIÉTÉS MATRICIELLES DES ESPACES STABLES

---

Dans ce problème,  $\mathbb{K}$  désigne le corps  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul. Pour tout endomorphisme  $f$  de  $E$  on définit la suite  $(f^k)_{k \in \mathbb{N}}$  des puissances de  $f$  par

$$\begin{cases} f^0 = \text{Id}_E \\ \forall k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f \circ f^k = f^k \circ f \end{cases}$$

On dit qu'un sous-espace vectoriel  $F$  de  $E$  est stable par un endomorphisme  $f$  si, pour tout  $x \in F$ ,  $f(x) \in F$ .

### Partie A :

Dans cette partie,  $f$  est un endomorphisme de  $E$ .

- 1) Soit  $F$  une droite de  $E$  engendrée par un vecteur  $u$  (non nul). Montrer que  $F$  est stable par  $f$  si et seulement s'il existe  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel que  $f(u) = \lambda u$  (on dit que  $u$  est un vecteur propre et que  $\lambda$  est une valeur propre).
- 2) a) Montrer qu'il existe au moins deux sous-espaces vectoriels de  $E$  stables par  $f$ .  
b) Dans cette question uniquement, on suppose que  $f$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  canoniquement associé à la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

À l'aide d'un dessin, caractériser géométriquement l'application  $f$ , puis expliquer rapidement pourquoi elle n'admet que les deux sous-espaces stables donnés à la question précédente.

- c) Montrer que  $\text{Ker } f$  et  $\text{Im } f$  sont stables par  $f$ .
- d) On suppose dans cette question uniquement que  $f$  est non nulle et non injective, et que  $E$  est de dimension finie impaire. Montrer que  $f$  admet au moins quatre sous-espaces stables.
- 3) a) Montrer que si  $F$  est engendré par  $(x_1, \dots, x_n)$  vecteurs propres associés aux valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  (cf. définition dans la première question), alors  $F$  est stable par  $f$ .  
b) Que peut-on dire de  $f$  si tous les sous-espaces de  $E$  sont stables par  $f$  ?
- 4) On suppose que  $E$  est de dimension finie et admet une base de vecteurs propres  $(e_1, \dots, e_n)$ . Montrer que tout sous-espace vectoriel de  $E$  admet un supplémentaire dans  $E$  stable par  $f$ .  
*On pourra partir d'une base de  $F$  et utiliser le théorème de la base incomplète.*

### Partie B :

Dans cette partie,  $n$  et  $p$  sont deux entiers naturels au moins égaux à 2 et  $f$  est un endomorphisme de  $E$ . On suppose qu'il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  des éléments de  $\mathbb{K}$  distincts tels que

$$E = \bigoplus_{k=1}^p E_k$$

où, pour tout  $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $E_k = \{x \in E \mid f(x) = \lambda_k x\}$ , c'est-à-dire que tout élément de  $E$  s'écrit de façon unique comme somme d'éléments des  $E_k$  (vous verrez les sommes directes de plus de deux espaces vectoriels officiellement l'an prochain).

Le but de cette partie est de montrer qu'un sous-espace  $F$  de  $E$  est stable par  $f$  si et seulement si

$$F = \bigoplus_{k=1}^p (F \cap E_k)$$

c'est-à-dire si et seulement si tout élément de  $F$  s'écrit de façon unique comme somme d'éléments des  $F \cap E_k$ .

- 1) Montrer que si  $F$  vérifie cette condition, alors il est stable par  $f$ .
- 2) On veut à présent montrer la réciproque : soit  $F$  un sous-espace de  $E$  stable par  $f$  et soit  $x \in F$  non nul. Montrer l'existence et l'unicité de  $x_1, \dots, x_p \in E_1 \times \dots \times E_p$  tels que

$$x = \sum_{k=1}^p x_k.$$

- 3) Puisque  $x$  est non nul, les  $x_i$  sont non tous nuls. Soit  $r$  le nombre de  $x_i$  non nuls. Quitte à renuméroter les  $x_i$ , on suppose que les  $r$  premiers exactement sont non nuls, c'est-à-dire que

$$x = \sum_{k=1}^r x_k$$

avec  $x_1, \dots, x_r$  non nuls. Montrer que  $\mathcal{B}_x = (x_1, \dots, x_r)$  est une base de  $V_x = \text{Vect}(x_1, \dots, x_r)$ .

- 4) Montrer que pour tout  $j \in \llbracket 1; r \rrbracket$ ,  $f^{j-1}(x) \in V_x$  et donner la matrice dont les vecteurs colonnes sont les vecteurs  $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$ , écrits dans la base  $\mathcal{B}_x$ .
- 5) Montrer que cette matrice est inversible (on utilisera sans démonstration l'exemple du cours). En déduire que  $(f^{j-1}(x))_{1 \leq j \leq r}$  est une base de  $V_x$ .
- 6) En déduire que pour tout  $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$ ,  $x_i \in F$  et conclure.

### Partie C :

On considère l'endomorphisme  $D$  de dérivation sur  $\mathbb{R}[X]$  défini par  $D(P) = P'$  pour tout  $P$  dans  $\mathbb{R}[X]$ .

- 1) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}_n[X]$  est stable par  $D$  et donner la matrice  $A_n$  de l'endomorphisme canoniquement associé.
- 2) Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{R}[X]$  stable par  $D$ . On suppose que  $F$  est de dimension finie  $d$  non nulle. Soit  $(P_1, \dots, P_d)$  une base de  $F$ .
  - a) Soit  $R$  un polynôme de cette base de degré maximal, soit  $n$  son degré. Montrer que  $F$  est inclus dans  $\mathbb{R}_n[X]$ .
  - b) Montrer que la famille  $(D^i(R))_{0 \leq i \leq n}$  est libre dans  $F$ .
  - c) En déduire que  $F = \mathbb{R}_n[X]$ .
- 3) Soit  $F$  un sous-espace de  $\mathbb{R}[X]$  de dimension infinie stable par  $D$ .
  - a) Montrer que pour tout  $n$ ,  $F$  contient un polynôme  $P$  de degré supérieur ou égal à  $n$ .
  - b) En déduire que  $F = \mathbb{R}[X]$ , puis donner tous les sous-espaces vectoriels de  $\mathbb{R}[X]$  stables par  $D$ .
- 4) Donner un endomorphisme  $u$  de  $\mathbb{R}[X]$  tel qu'aucun sous-espace de  $\mathbb{R}[X]$  de dimension finie non nulle ne soit stable par  $u$ . Existe-t-il un sous-espace de  $\mathbb{R}[X]$  distinct de  $\mathbb{R}[X]$  et de  $\{0\}$  qui soit stable par  $u$ ?
- 5) On considère dans cette question un endomorphisme  $f$  de  $E$  de dimension  $n \geq 2$  tel que  $f^n = 0$  et  $f^{n-1} \neq 0$ .
  - a) Déterminer l'ensemble des  $x \in E$  tel que la famille  $(x, f(x), \dots, f^{n-1}(x))$  soit une base de  $E$ .
  - b) Dans le cas où cette condition est vérifiée, donner la matrice de  $f$  dans cette base.
  - c) Déterminer une base de  $E$  telle que la matrice de  $f$  dans cette base soit  $A_{n-1}$ .