

Devoir maison n° 22

À rendre le lundi 1^{er} juin 2026

Ne rendre que l'un des deux exercices. Le premier est plutôt destiné aux élèves prenant d'habitude les sujets A (et B quand il y a un sujet C) en DS. Le deuxième est bien plus difficile et plutôt destiné aux élèves prenant les sujets B (voire C).

Rédigez sur une copie double lisiblement et proprement. Laissez une marge à gauche, écrivez à l'encre bleue ou noire et encadrez ou soulignez les résultats principaux.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. Tout résultat doit être justifié. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez.

EXERCICE 1 : AUTOUR DE LA SOMME DE NUMÉROS DE BOULES

Soit n un entier naturel non nul. On dispose d'une urne contenant n boules numérotées de 1 à n . On effectue une suite de tirages d'une boule avec remise jusqu'à ce que la somme cumulée des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

A chaque tirage cette somme cumulée augmente de 1 au minimum si bien que, dans le pire des cas, elle dépassera ou atteindra n au $n^{\text{ième}}$ tirage. Pour simplifier l'étude, on suppose donc que l'on effectue exactement n tirages successifs avec remise dans cette urne et que l'on s'intéresse au nombre de tirages nécessaires pour que la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

- 1) Rappeler la définition d'une probabilité \mathbb{P} sur un espace probabilisable fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$.
- 2) Déterminer un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ associé à cette expérience. Préciser le cardinal de Ω .
- 3) Soit $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$. Notons U_k la variable aléatoire comptant le nombre de boules numérotées 1 obtenues lors des k premiers tirages. Déterminer la loi de U_k et donner, sans faire de calculs de somme, son espérance et sa variance.

Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire égale au numéro de la boule obtenue au $i^{\text{ième}}$ tirage.

Pour tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on note $S_k = \sum_{i=1}^k X_i$ la somme des numéros des boules obtenues lors des k premiers tirages.

On considère enfin la variable aléatoire T_n égale au nombre de tirages nécessaires pour que, pour la première fois, la somme des numéros des boules obtenues soit supérieure ou égale à n .

Un exemple : Supposons que $n = 10$ et que les numéros obtenus sont, dans cet ordre, 2, 1, 5, 1, 8, 4, 3, 1, 7, 3. Dans ce cas, les événements $[S_1 = 2]$, $[S_2 = 3]$, $[S_3 = 8]$, $[S_4 = 9]$, $[S_5 = 17]$, $[S_6 = 21]$, $[S_7 = 24]$, $[S_8 = 25]$, $[S_9 = 32]$, $[S_{10} = 35]$ sont réalisés. Puisque les événements $[S_4 < 10]$ et $[S_5 \geq 10]$ sont réalisés, on en déduit que $[T_{10} = 5]$ est réalisé.

- 4)
 - a) Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, déterminer la loi de X_i et donner, sans faire de calculs de somme, son espérance et sa variance.
 - b) En déduire l'espérance de S_k pour tout $k \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$.
- 5)
 - a) Déterminer $T_n(\Omega)$, en justifiant brièvement.
 - b) Calculer $\mathbb{P}(T_n = 1)$.
 - c) Montrer que $\mathbb{P}(T_n = n) = \frac{1}{n^{n-1}}$.
- 6) **Quelques cas particuliers.**
 - a) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 2$. Déterminer la loi de T_2 .
 - b) Dans cette question seulement, on suppose que $n = 3$. Déterminer la loi de T_3 et calculer son espérance et sa variance.

- 7) a) Déterminer $S_k(\Omega)$ pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.
 b) Fixons $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$. Écrire S_{k+1} en fonction de S_k et X_{k+1} .
 c) Soient $i \in \llbracket k+1; n \rrbracket$ et $j \in S_k(\Omega)$. Déterminer alors $\mathbb{P}_{[S_k=j]}(S_{k+1} = i)$.
On séparera les cas où $j \leq i-1$ et $j \geq i$.

d) En déduire que

$$\forall i \in \llbracket k+1; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_{k+1} = i) = \frac{1}{n} \sum_{j=k}^{i-1} \mathbb{P}(S_k = j).$$

- 8) a) A l'aide de la formule du triangle de Pascal et d'une somme télescopique¹, montrer que pour tous entiers naturels a et b tels que $a \leq b$,

$$\sum_{j=a}^b \binom{j-1}{a-1} = \binom{b}{a}.$$

b) Pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, notons $H(k)$ la propriété :

$$\llcorner \quad \forall i \in \llbracket k, n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(S_k = i) = \frac{1}{n^k} \binom{i-1}{k-1} \quad \lrcorner.$$

Montrer par récurrence² que, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la propriété $H(k)$ est vraie.

- 9) a) Justifier avec des phrases que, pour tout $k \in \llbracket 1; n-1 \rrbracket$, $[T_n > k] = [S_k \leq n-1]$.
 b) En déduire que, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

c) Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n > k) = \frac{1}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

On pourra écrire la formule définissant $\mathbb{P}(T_n > k)$ ci-dessus comme un produit et remarquer que c'est une fonction rationnelle en la variable n .

d) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P}(T_n = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

- 10) a) Montrer que, si Z est une variable aléatoire telle que $Z(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$, alors

$$\mathbb{E}(Z) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{P}(Z > k).$$

b) En appliquant la formule précédente avec $Z = T_n$, montrer que

$$\mathbb{E}(T_n) = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n-1}.$$

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(T_n)$.

1. On rappelle que $\binom{n}{k} = 0$ lorsque k et n sont des entiers naturels tels que $k > n$.
 2. ... sur la variable k (n est fixé).

On se donne dans tout ce problème un entier n supérieur ou égal à 3.

On dispose de n urnes numérotées de 1 à n , ainsi que de n boules numérotées de 1 à n . On répartit de façon indépendante et équiprobable les boules dans les urnes. Plus précisément : pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, la probabilité de chaque boule d'être dans l'urne numérotée i est égale à $\frac{1}{n}$, et ce indépendamment des autres boules.

On admet l'existence d'un espace probabilisé fini $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience.

- Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on note X_i le nombre de boules dans l'urne numérotée i .
- On pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
- On pose $s_n = \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$. On fixe dans tout le problème un réel $\alpha > 0$ et on pose $v_n = \lfloor \alpha s_n \rfloor$. Précisons que le réel α est fixe dans tout l'exercice (sauf mention du contraire) : ainsi, quand on parlera de limite, d'équivalents etc. ce sera quand n tend vers $+\infty$.
- Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, on note $Y_i = \mathbb{1}_{[X_i \geq v_n]}$. On pose ensuite $Z_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. En d'autres termes, Z_n compte le nombre d'urnes qui contiennent au moins v_n boules (il n'est pas demandé de prouver cette affirmation).

L'objectif de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique de $E(Z_n)$ (c'est-à-dire du nombre moyen d'urnes contenant au moins v_n boules) et de M_n (c'est-à-dire du nombre de boules dans l'urne qui en contient le plus).

Partie A : Modélisation probabiliste

- 1) Proposer un espace probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ qui modélise cette expérience.
- 2) Pour tout $i \in \llbracket 1 ; n \rrbracket$, donner la loi de X_i . Donner sans démonstration son espérance et sa variance.
- 3) Calculer $\mathbb{P}(X_1 = 0, \dots, X_n = 0)$. En déduire que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n ne sont pas indépendantes.
- 4) Soit $(i, j) \in \llbracket 0 ; n \rrbracket^2$.
 - a) Que vaut $\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j])$ lorsque $i + j > n$?
 - b) Supposons que $i + j \leq n$. Avec des arguments combinatoires, justifier que

$$\mathbb{P}([X_1 = i] \cap [X_2 = j]) = \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} \frac{(n-2)^{n-i-j}}{n^n}.$$

Partie B : $\mathbb{P}(X_1 \geq v_n)$ et $\mathbb{P}(X_1 = v_n)$ sont équivalents

- 1) On note $\lambda_n = \frac{n - v_n}{(v_n + 1)(n - 1)}$. Justifier que

$$\forall k \geq v_n, \quad \frac{\mathbb{P}(X_1 = k + 1)}{\mathbb{P}(X_1 = k)} = \frac{n - k}{(k + 1)(n - 1)} \leq \lambda_n.$$

- 2) Montrer que si une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ alors $[u_n] \underset{+\infty}{\sim} u_n$. En déduire un équivalent de v_n et de $n - v_n$ quand n tend vers $+\infty$ puis la limite de la suite de terme général λ_n .
- 3) Montrer par une récurrence que l'on rédigera que

$$\forall k \in \llbracket v_n ; n \rrbracket, \quad \mathbb{P}(X_1 = k) \leq \lambda_n^{k - v_n} \mathbb{P}(X_1 = v_n)$$

1. Le choix de cette valeur surprenante sera justifié plus tardivement dans le sujet.

4) En déduire que, pour n assez grand,

$$\mathbb{P}(X_1 \geq v_n) \leq \frac{\mathbb{P}(X_1 = v_n)}{1 - \lambda_n}.$$

5) En déduire que $\mathbb{P}(X_1 = v_n) \underset{+\infty}{\sim} \mathbb{P}(X_1 \geq v_n)$.

Partie C : Limite de la suite de terme général $\mathbb{E}(Z_n)$

1) Justifier que $\mathbb{E}(Z_n) = n\mathbb{P}(X_1 \geq v_n)$.

2) En utilisant la partie précédente, conclure que

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} n \binom{n}{v_n} \left(\frac{1}{n}\right)^{v_n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-v_n}.$$

Le but de cette partie est de donner la limite de la suite de terme général $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque $\alpha \neq 1$.

3) Donner la limite de la suite de terme général $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-v_n}$.

4) a) Prouver que

$$\binom{n}{v_n} = \frac{n^{v_n}}{(v_n)!} \prod_{j=0}^{v_n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right).$$

b) Montrer que $\left(1 - \frac{v_n}{n}\right)^{v_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.

c) En encadrant judicieusement $\prod_{j=0}^{v_n-1} \left(1 - \frac{j}{n}\right)$, justifier que

$$\binom{n}{v_n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^{v_n}}{(v_n)!}.$$

5) Déduire des questions précédentes que

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{e\sqrt{2\pi}} \exp\left(v_n - v_n \ln(v_n) - \frac{\ln(v_n)}{2}\right).$$

6) Justifier que $\ln(v_n) \underset{+\infty}{\sim} \ln(\ln(n))$. En déduire que

$$\mathbb{E}(Z_n) \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{e\sqrt{2\pi}} \exp((1 - \alpha) \ln(n) + o(\ln(n))).$$

7) Donner la limite de la suite de terme général $\mathbb{E}(Z_n)$ lorsque $\alpha < 1$ et lorsque $\alpha > 1$.

On comprend a posteriori le choix de v_n en tant que valeur critique au sens où le comportement asymptotique de $\mathbb{E}(Z_n)$ change radicalement selon que $\alpha < 1$ ou $\alpha > 1$. Explorons cela plus en détails dans les parties suivantes.

Partie D : Limite de $\mathbb{P}(Z_n = 0)$ lorsque $\alpha < 1$

1) Prouver que $[Z_n = 0] \subset [|Z_n - \mathbb{E}(Z_n)| \geq \mathbb{E}(Z_n)]$. En déduire que

$$\mathbb{P}(Z_n = 0) \leq \frac{\mathbb{E}(Z_n^2)}{\mathbb{E}(Z_n)^2} - 1.$$

2) Prouver que $\mathbb{E}(Z_n^2) = \mathbb{E}(Z_n) + n(n-1)\mathbb{E}(Y_1 Y_2)$.

On pourra utiliser sans le justifier le fait que, si $i \neq j$, alors $Y_1 Y_2$ a la même loi que $Y_i Y_j$.

3) À l'aide de la question A4,

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2) = \sum_{i=v_n}^n \sum_{j=v_n}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n-i}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^{i+j} \left(1 - \frac{2}{n}\right)^{n-i-j}.$$

4) a) Prouver que $1 - \frac{k}{n} \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

b) Soient i et j vérifiant $i + j \leq n$. Montrer que

$$\binom{n-i}{j} = \binom{n}{j} \times \prod_{k=0}^{j-1} \left(\frac{n-i-k}{n-k}\right) \leq \binom{n}{j} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{ij}.$$

5) En déduire que

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2) \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(v_n-1)^2-1} \sum_{i=v_n}^n \sum_{j=v_n}^{n-i} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \left(\frac{1}{n}\right)^{i+j} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{2n-i-j}$$

6) Montrer finalement que

$$\mathbb{E}(Y_1 Y_2) \leq \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(v_n-1)^2-1} \mathbb{P}(X_1 \geq v_n)^2.$$

7) On montrerait de même que dans la partie C (on ne demande pas de le faire) que $\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{(v_n-1)^2} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$.
 En se souvenant que $\mathbb{E}(Z_n) = n\mathbb{P}(X_1 \geq v_n)$, et à l'aide de la question D1, prouver que $\mathbb{P}(Z_n = 0) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ lorsque $\alpha < 1$.

Partie E : Comportement asymptotique de M_n

On fixe dans toute cette partie $\varepsilon \in]0; 1[$. On rappelle que $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, $s_n = \frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}$ et $v_n = \lfloor \alpha s_n \rfloor$.

1) Justifier que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{M_n}{s_n} - 1\right| \geq \varepsilon\right) = \mathbb{P}(M_n \geq (1 + \varepsilon)s_n) + 1 - \mathbb{P}(M_n > (1 - \varepsilon)s_n).$$

2) a) Exprimer l'événement $[M_n \geq v_n]$ en fonction de l'événement $[Z_n = 0]$.

b) Justifier que, pour n assez grand,

$$(1 - \varepsilon)s_n < \left\lfloor \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) s_n \right\rfloor.$$

On pourra calculer la limite du quotient de ces deux quantités.

c) En déduire qu'il existe une valeur de α (que l'on explicitera) telle que, pour n assez grand,

$$\mathbb{P}(M_n \geq v_n) \leq \mathbb{P}(M_n > (1 - \varepsilon)s_n).$$

d) Prouver que, pour cette valeur de α ,

$$\mathbb{P}(M_n > (1 - \varepsilon)s_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1.$$

3) a) Montrer que $\mathbb{P}(M_n \geq v_n) \leq \mathbb{E}(Z_n)$ quelle que soit la valeur de α .

On exprimera $[M_n \geq v_n]$ en fonction de l'événement $[Z_n \geq 1]$.

b) Montrer finalement que

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{M_n}{\frac{\ln(n)}{\ln(\ln(n))}} - 1\right| \geq \varepsilon\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0.$$