Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 4 – Sujet A

samedi 13 décembre 2025

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Questions en vrac d'arithmétique

1) Écrire la décomposition primaire de 504 et en déduire son nombre de diviseurs positifs.
2) Déterminer le chiffre des unités de 1988^{1988}.
3) Résoudre $24x + 35y = 3$ d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.
4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^{31} \equiv n\,[231]$.
5) Soit $(x, y) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que $x^2 + y^2$ est divisible par 7 si et seulement si x et y le sont.
6) Soient a et b deux entiers non nuls tels que $a^6 | b^5$. Montrer que $a|b$.
7) Soit p un nombre premier. Soient k, a et b des entiers naturels non nuls.
   a) Rappeler (sans démonstration) une expression de $v_p(a \vee b)$ en fonction de $v_p(a)$ et $v_p(b)$.
   b) Montrer que, si p^k divise $a \vee b$, alors $p^k | a$ ou $p^k | b$.
8) Soient a et n dans $\mathbb{N}\backslash\{0; 1\}$. Montrer que $a \wedge n = 1$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^k \equiv 1\,[n]$. Expliciter ensuite un tel k lorsque $a \wedge n = 1$ et n est premier.

Exercice 2 : Questions en vrac sur les suites

1) **Questions de cours.** Montrer le théorème de la limite monotone (dans le cas croissant).
2) **Questions de cours.** Énoncé le théorème de Bolzano-Weierstrass puis démontrer la version complexe en utilisant la version réelle.
3) Expliciter le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = 7u_n - 2. \end{cases}$$

4) Expliciter le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \quad u_1 = 1/3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad 9u_{n+2} = -6u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

5) Expliciter le terme général de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = -1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n}{3}.$$

6) Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor \pi n^3 \rfloor}{n^3}$ puis

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\lfloor \pi n^3 \rfloor - \sqrt{n}(\ln(n))^4}{n^3 + 2n^5\left(\frac{\pi}{6}\right)^n - \cos(2025^{n!})}.$$

7) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$u_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad v_n = \sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{k}$$

  a) Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont adjacentes.

  b) On rappelle que, pour tout $x \in \,]-1\,;+\infty[$, $x \geqslant \ln(1+x)$. On en déduit que, pour tout $x \in \,]-\infty\,;1[$, $x \leqslant -\ln(1-x)$. On ne demande pas de justifier ces deux inégalités. En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad u_n \leqslant \ln(2) \leqslant v_n.$$

  c) Conclure que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ convergent vers $\ln(2)$.

8) Montrer que l'ensemble $A = \{(-1)^n + 1 + 3^{-n} \,|n \in \mathbb{N}\}$ possède un maximum (que l'on explicitera) et une borne inférieure (que l'on explicitera) qui n'est pas un minimum.

9) Montrer qu'une suite d'entiers qui converge est stationnaire.

Exercice 3 : Une suite récurrente

On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_{n+1} = u_n^2 - \frac{1}{4}.$$

On introduit $f : x \longmapsto x^2 - \dfrac{1}{4}$ de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1) a) Déterminer le signe de $g : x \longmapsto f(x) - x$ et ses valeurs d'annulation.
  On notera α et β ses valeurs d'annulations de sorte que $\beta > \alpha$.

  b) Tracer le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.
  On fera apparaître les points d'abscisses $-\beta$, β, α et 0.

2) Caractériser la suite lorsque $u_0 = \beta$. Quelle est sa limite ?

3) On suppose que $|u_0| > \beta$.

  a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n > \beta$.

  b) Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

4) On suppose que $u_0 \in \,]-\beta\,;\beta[$.

  a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in \left[-\frac{1}{4}\,;\beta\right[$.

  b) On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0\,;\beta[$. Montrer alors que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et aboutir à une absurdité.

  c) En déduire qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \in \left]-\frac{1}{4}\,;0\right[$.

  d) Montrer que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

  e) Déterminer le quotient et le reste de la fonction polynomiale $h : x \longmapsto f \circ f(x)$ par la fonction polynomiale g.

  f) Conclure que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.