Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 4 – Sujet B

samedi 13 décembre 2025

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice : Quand n divise $2^n + 1$

On note $A = \{n \in \mathbb{N}^* \,|\, n \text{ divise } 2^n + 1\}$ l'ensemble des entiers naturels n non nuls tels que n divise $2^n + 1$. L'objectif de cet exercice est d'étudier plusieurs propriétés de l'ensemble A.

Dans cet exercice, lorsque l'on parle de diviseur ou de multiple, il s'agit, par défaut, d'entiers naturels.

1) a) Justifier que tout élément de A est impair.

   b) Justifier que les multiples de 5 ne sont pas des éléments de A.
   On pourra ne considérer que les multiples impairs de 5 (compte tenu de la question précédente) et raisonner modulo 5.

   c) Calculer les restes des puissances successives de 2^7 modulo 7 et conclure que les multiples de 7 n'appartiennent pas non plus à A.
   Une récurrence immédiate sera tolérée dans cette question.

   Avec le même type de techniques, on pourrait aussi montrer (on ne demande pas de le faire) que les multiples de 11, 13 et 17 n'appartiennent pas non plus à A. En revanche il y a des multiples de 19 qui appartiennent à A : c'est le cas de 171.

   d) Déterminer enfin les trois plus petits éléments de A.

2) Soit $n \in A \backslash \{1\}$. On note p le plus petit diviseur premier de n.

   a) Notons $d = (2n) \wedge (p - 1)$. En utilisant le théorème de Bezout et le petit théorème de Fermat, montrer que $2^d \equiv 1\,[p]$.

   b) Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $d = 2k$.

   c) En raisonnant par l'absurde, montrer que $k = 1$.

   d) Conclure que $p = 3$.

3) Soit $a \in \mathbb{N}^*$ impair. Soit $n \in \mathbb{N}$.

   a) Montrer que $2^n + 1$ divise $2^{an} + 1$ et exprimer $\dfrac{2^{an}+1}{2^n+1}$ sous la forme d'une somme.

   b) Soit d un diviseur de $2^n + 1$. Déterminer une congruence simple de $\dfrac{2^{an}+1}{2^n+1}$ modulo d.

4) En raisonnant par récurrence, en déduire que $3^p \in A$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

5) a) Montrer que, pour tout $(m, n) \in A^2$, $n \vee m \in A$.
   On pourra considérer les entiers $a = \dfrac{n \vee m}{m}$ et $a' = \dfrac{n \vee m}{n}$.

b) Montrer que, pour tout $n \in A$ et pour tout diviseur d de n, $dn \in A$.

c) Conclure que, pour tout $(m, n) \in A^2$, $mn \in A$.

d) Montrer enfin que, pour tout $n \in A$, tout multiple de n qui possède les mêmes diviseurs premiers que n appartient encore à A.

6) Soit $n \in A\backslash\{1\}$. On note $E_n = \{k \in \mathbb{N}^* \mid 2^k \equiv 1\,[n]\}$.

a) Justifier que, parmi les entiers $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^n$, deux au moins ont la même congruence modulo n.

b) En déduire que E_n possède un plus petit élément ω_n et que $\omega_n < n$.

Dans cette question et les suivantes, nous noterons simplement ω au lieu de ω_n.

c) En utilisant le théorème de la division euclidienne, montrer que $E_n = \omega\mathbb{N}^*$, l'ensemble des multiples de ω.

Autrement dit, un entier a appartient à E_n si et seulement si $\omega|a$.

d) Justifier que $\omega|2n$.

e) Notons q et r le quotient et le reste, respectivement, de la division euclidienne de n par ω. Justifier que $\omega|2r$ puis que $\omega = 2r$.

f) Conclure que $r \in A$.

Nous venons donc de montrer que, si $n \in A$, alors $\dfrac{\omega_n}{2}$ est un diviseur de n qui appartient à A.

7) Montrer alors que tout élément de $A\backslash\{1; 3\}$ est divisible par 9.

On pourra raisonner par l'absurde et considérer n le plus petit élément de $A\backslash\{1; 3\}$ qui n'est pas divisible par 9.

Nous sommes encore loin d'avoir décrit l'ensemble A totalement. On peut montrer que les premiers éléments de A qui sont plus grands strictement que 3 et qui ne sont pas une puissance de 3 sont $171 = 9 \times 19$, $513 = 3^3 \times 19$ et $1539 = 3^4 \times 19$. Il faut ensuite attendre $13203 = 3^4 \times 163$ pour obtenir le premier élément de A qui possède un diviseur premier différent de 3 ou 19.

Problème : Une suite hypersensible

On se donne deux réels a et c. Notons

$$f : x \longmapsto x^2 + c.$$

On introduit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad x_{n+1} = f(x_n) = x_n^2 + c.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier le comportement asymptotique de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de a et c.

Partie A : Préliminaires et premiers résultats

1) Supposons que $c = 0$. Déterminer une expression explicite de x_n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon les valeurs de $|a|$.

2) a) Étudier les valeurs d'annulation et le signe (au sens strict du terme) de la fonction $g : x \longmapsto f(x) - x$, selon les valeurs de c.

Lorsque g s'annule, on notera α sa plus petite valeur d'annulation et β sa plus grande valeur d'annulation (éventuellement confondues).

b) Dresser le tableau de variations de f dans le cas où $c = \dfrac{1}{4}$, dans le cas où $0 < c < \dfrac{1}{4}$ puis dans le cas où $c < 0$.

On fera à chaque fois apparaître les points d'abscisses 0, α, β et $-\beta$. On fera bien attention dans la suite au fait que α et β dépendent[1] de c. Il faudra donc toujours veiller à ce que c soit bien précisé (par l'énoncé ou sur la copie) ***avant*** *de mentionner α ou β.*

1. Mais plus généralement f et la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aussi. On aurait pu noter f_c, $(x_{c,n})_{n\in\mathbb{N}}$, α_c et β_c au lien de f, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, α et β mais cela alourdirait les notations.

Dans toute la suite, se référer à ces tableaux de variations constituera une preuve suffisante de la stabilité de certains intervalles par f.

3) Montrer que, si $c > \dfrac{1}{4}$, alors $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

4) Supposons que $c \leqslant \dfrac{1}{4}$ et $a \in \left]-\infty\,;-\beta\right[\cup\left]\beta\,;+\infty\right[$. Vérifier que $x_1 > \beta$ puis montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

5) Supposons que $c \leqslant \dfrac{1}{4}$. Caractériser la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ lorsque $a \in \{-\beta;\beta\}$ et lorsque $a \in \{-\alpha;\alpha\}$. Quelle est alors sa limite ?

6) Supposons que $c \in \left]2\,;\frac{1}{4}\right]$.
   a) Justifier que $-\beta < c$.
   b) En déduire que, si $a \in \left]-\beta\,;\beta\right[$, alors $x_n \in \left[c\,;\beta\right[$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Faisons un premier bilan :

- Lorsque $c > \dfrac{1}{4}$, la suite diverge vers $+\infty$ quelle que soit la valeur de a.
- Lorsque $-2 \leqslant c \leqslant \dfrac{1}{4}$, la suite diverge vers $+\infty$ si $|a| > \beta$, converge vers β si $|a| = \beta$ et elle est bornée si $|a| < \beta$.

Dans la partie B, nous allons étudier la nature de la suite lorsque $a \in \left]0\,;\frac{1}{4}\right]$, ainsi que la vitesse de convergence ou divergence. Dans la partie C, nous étudierons partiellement le cas où $c \in \left[-2\,;0\right[$ et $|a| < \beta$.

Partie B : Le cas où $c \in \left]0\,;\frac{1}{4}\right]$

Dans toute cette partie, on suppose que $c \in \left]0\,;\frac{1}{4}\right]$.

1) Supposons que $a \in \left]-\beta\,;\beta\right[$. La question A6b assure que $x_1 \in \left]0\,;\beta\right[$. Déterminer les variations de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ selon que $x_1 = \alpha$, $0 < x_1 < \alpha$ ou $x_1 > \alpha$ puis montrer que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$ dans les trois cas.

L'objectif des questions suivantes est d'étudier la vitesse de convergence vers α dans le cas où $a \in \left]-\beta\,;\beta\right[$ et la vitesse de divergence vers $+\infty$ dans le cas où $a \in \left]-\infty\,;-\beta\right[\cup\left]\beta\,;+\infty\right[$

2) Supposons dans cette question uniquement que $c \neq \dfrac{1}{4}$ (donc $0 < c < \dfrac{1}{4}$) et que $a \in \left]-\beta\,;\beta\right[\setminus\{\pm\alpha\}$. Il s'ensuit que $x_1 \neq \alpha$ (ce que l'on ne demande pas de montrer). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $u_n = |x_n - \alpha|$.
   a) Montrer que :
      - Si $x_1 < \alpha$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leqslant 2\alpha u_n$.
      - Si $\alpha < x_1 < \beta$ alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} \leqslant (x_1 + \alpha)u_n$.

      On s'aidera de la monotonie de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ obtenue à la question précédente.
   b) En déduire qu'il existe $M_c \in \left]0\,;1\right[$ et $K_c > 0$ tels que
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad |x_n - \alpha| \leqslant K_c \times M_c^n.$$

   La convergence vers α a donc lieu exponentiellement vite.

3) Supposons dans cette question uniquement que $c = \dfrac{1}{4}$ et $a \in \left]-\beta\,;\beta\right[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $y_n = \beta - x_n$ (c'est-à-dire $y_n = \dfrac{1}{2} - x_n$). D'après la question B1, on a donc $y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
   a) Justifier brièvement que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $y_n \in \left]0\,;1\right[$.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $z_n = \dfrac{1}{1 - y_n}$. Vérifier que
   $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad \frac{1}{y_{k+1}} - \frac{1}{y_k} = z_k.$$

c) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n > n_0$,

$$\left|\sum_{k=n_0}^{n-1}(z_k - 1)\right| \leqslant \frac{n\varepsilon}{2}$$

puis qu'il existe $n_0' \geqslant n_0$ tel que, pour tout $n > n_0'$,

$$\left|\sum_{k=1}^{n_0-1}(z_k - 1)\right| \leqslant \frac{n\varepsilon}{2}.$$

d) En déduire que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

e) Conclure que $n\left(\dfrac{1}{2} - x_n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

La convergence vers $\alpha = \dfrac{1}{2}$ a donc lieu « à vitesse $\dfrac{1}{n}$ », ce qui est bien plus lent que dans le cas $c < \dfrac{1}{4}$.

4) Supposons dans cette question uniquement que $a \in]-\infty\,;-\beta[\cup]\beta\,;+\infty[$. On a vu plus haut que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$b_n = \frac{\ln(x_n)}{2^n}.$$

a) Justifier brièvement que $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est bien définie et vérifier que

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad b_{k+1} - b_k = \frac{1}{2^k}\ln\left(1 + \frac{c}{x_k^2}\right).$$

b) Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, notons $t_p = \ln\left(1 + \dfrac{1}{4x_p^2}\right)$. Montrer alors que

$$\forall (p,q) \in \mathbb{N}^*, \qquad q > p \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant b_q - b_p \leqslant t_p \times \sum_{k=p}^{q-1}\frac{1}{2^{k+1}} \leqslant \frac{t_p}{2^p}.$$

c) En déduire que $(b_n)_{n\geqslant 1}$ est bornée et conclure qu'elle admet une limite réelle ℓ (que l'on ne cherchera pas à déterminer) qui est strictement positive.

d) Déduire de la question B4b que $2^n(\ell - b_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis conclure que

$$\frac{x_n}{\mathrm{e}^{\ell\, 2^n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

Cela signifie qu'asymptotiquement $(x_n)_{n\geqslant 1}$ se comporte comme la suite $(\mathrm{e}^{\ell\, 2^n})_{n\geqslant 1}$ qui diverge (par définition) exponentiellement vite vers $+\infty$.

Partie C : Le cas où $c \in [-2\,;0[$

1) Notons $h : x \longmapsto f\circ f(x) - x$.

a) Déterminer une application polynomiale P de degré 2 telle que $h = g \times P$.

b) Vérifier que, lorsque $-\dfrac{3}{4} \leqslant c < 0$, α et β sont les deux seules valeurs d'annulation de h.

On montre aisément (on ne demande pas de le faire) que, si $-1 < c < -\dfrac{3}{4}$, alors P admet deux racines γ et δ vérifiant $c < \delta < \alpha < \gamma < 0$.

2) Supposons que $c \in \left[-\frac{3}{4}\,;0\right[$ et $a \in \left]-\beta\,;\beta\right[$. On rappelle (cf. question A6b) que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x_n \in [c\,;\beta[$.

   a) Justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $x_k \in [c\,;0]$.

   b) En déduire que, pour tout $n \geqslant k$, $x_n \in [c\,;0]$ puis que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

3) Supposons que $c \in \left]-1\,;\frac{3}{4}\right[$ et $a \in \left]-\beta\,;\beta\right[$. On montre comme dans la question précédente (on ne demande pas de le faire) qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant k$, $x_k \in [c\,;0]$. Justifier que, si $x_k < \delta$, alors $x_{k+2n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \delta$. En déduire que $x_{k+2n+1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \gamma$.

On peut montrer (on ne demande pas de le faire) que, plus généralement, à moins que $|x_0| = \alpha$, les suites $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers δ et γ ou le contraire. En particulier, dans ce cas, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ possède deux valeurs d'adhérence (c'est-à-dire il y a deux limites possibles pour les suites extraites convergentes).

4) Supposons que $c = -2$ et $a \in [-2\,;2]$. Notons $\theta_a = \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{a}{2}\right)$.

   a) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2\cos\left(2^n\theta_a\right)$.

   b) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons[1] $q = 2^k + 1$. Prenons $a = 2\cos(\frac{2\pi}{q})$. On a alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = 2\cos\left(\frac{2^{n+1}\pi}{q}\right)$ d'après la question précédente. Justifier que $x_k = x_0$ mais que, pour tout $n \in [\![1\,;k-1]\!]$, $x_n \neq x_0$.

   On en déduit que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est k-périodique. Elle a donc k valeurs d'adhérences distinctes.

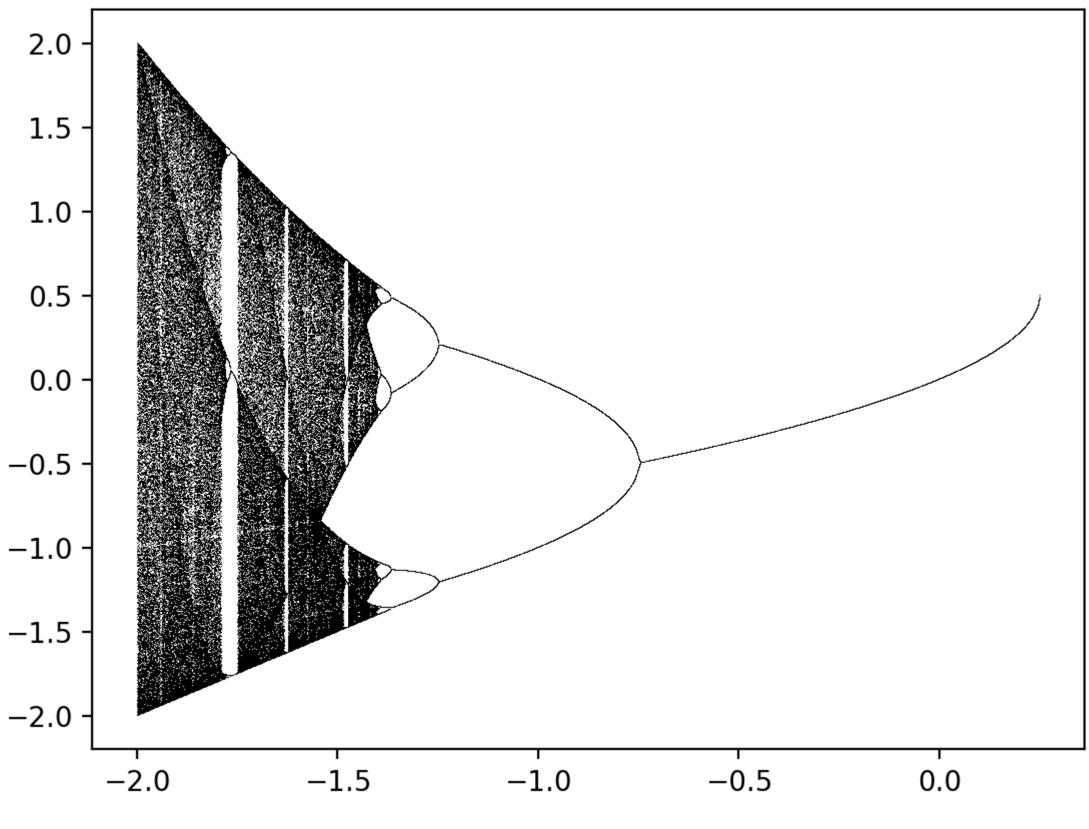
On vient de démontrer que, si $c = -2$, on peut trouver des valeurs initiales pour lesquelles la suite possède un nombre arbitrairement grand (fini) de valeurs d'adhérences. On peut même montrer (mais c'est bien plus difficile) que pour « la plupart » des valeurs de a, la suite possède tous les réels de $[-2\,;2]$ pour valeurs d'adhérence.

Que se passe-t-il entre -2 et -1 ? Au fur et à mesure que c décroit vers 2, le nombre de valeurs d'adhérence évolue de façon totalement chaotique. Le diagramme au verso prend en abscisse c et place en ordonnée un point pour chaque valeur d'adhérence de la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque $a = 0$. On observe bien une seule valeur d'adhérence pour $c \geqslant -\frac{3}{4}$ (la limite α), deux valeurs pour $-\frac{5}{4} < \alpha < -\frac{3}{4}$ (les limites δ et γ des termes de rangs pairs et impairs). On passe ensuite à quatre valeurs d'adhérence, puis à huit, puis à seize, etc. (la largeur de l'intervalle des valeurs de c conduisant au même nombre d'oscillations décroît rapidement). Arrive ensuite une bifurcation (vers $c = -1,401$) totalement chaotique (sauf exceptions). L'étude de la suite devient alors particulièrement ardue.

Le cas où $c < -2$ est aussi très surprenant[2] puisqu'on peut montrer que l'ensemble des valeurs de a pour lesquelles la suite est bornée est infini sans contenir aucun intervalle ouvert mais ce devoir est déjà assez long comme ça...

1. Toute ressemblance avec l'exercice précédent est purement fortuite...

2. Les plus curieux d'entre vous pourront chercher « ensemble de Mandelbrot » sur internet pour découvrir encore d'autres facettes de cette suite. Quand on pense que tout cela est généré par la fonction f...


2.0
1.5
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
−1.5
−2.0
−2.0
−1.5
−1.0
−0.5
0.0