Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 6

samedi 14 février 2026

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Questions en vrac

Cet exercice devra être traité sur une copie séparée. Il ne pourra être traité que lors des 90 premières minutes de ce devoir. Les copies seront ensuite ramassées et les 150 dernières minutes devront être consacrées exclusivement à l'exercice 2 et au problème. Il est tout à fait possible de commencer à traiter l'exercice 2 et le problème avant la fin des 90 premières minutes et même de ne pas traiter du tout les questions en vrac.

Temps conseillé pour les questions de cet exercice : 10 min, 10 min, 15 min, 25 min, 10 min, 5 min

1) Justifier que $f : x \longmapsto x^2\cos(x)$ est de classe $\mathscr{C}^{2026}$ sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f^{(2026)}$.

2) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $f(x) = x^{\mathrm{Arctan}(x^2)}$. Montrer que f est prolongeable en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ tout entier. On calculera f' sur $\mathbb{R}_+$.

3) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que

$$n^2\left(\mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{n+1}\right) - \mathrm{Arccos}\left(\frac{1}{n}\right)\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

4) On définit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $u_0 \in \mathbb{R}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\cos(u_n)$.

   a) Montrer que $f : x \longmapsto \dfrac{1}{2}\cos(x)$ admet un unique point fixe α sur $\mathbb{R}$ et que celui-ci appartient à $[0\,;1]$.

   b) Justifier que $|u_2 - \alpha| \leqslant 1$.

   c) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, si $n_k = \lfloor k\log_2(10)\rfloor + 3$, alors u_{n_k} est une approximation de α à 10^{-k} près.

5) Soient f et g deux fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles. On suppose que f et g admettent des limites finies en $+\infty$. Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter) tel que $g - \alpha \leqslant f \leqslant g + \alpha$.

6) Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ qui est dérivable en 0 et telle que $f(0) = 0$ et $f'(0) > 0$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(c) > 0$.
   On attend une preuve complète utilisant uniquement la définition quantifiée d'une limite (et aucun autre résultat du cours).

Exercice 2 : Zéros entrelacés

Soit $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$(E_q) : y'' + q(x)\, y = 0$$

d'inconnue y deux fois dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 (mais pas à coefficients constants à moins que q ne soit une fonction constante non nulle).

1) Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Résoudre l'équation (E_q) lorsque q est la fonction constante égale à k.

Dans le cas général, on ne sait pas exprimer les solutions de (E_q) à l'aide de fonctions usuelles. On admet (cela sera montré en deuxième année) que le résultat vu dans le chapitre 11 sur l'existence et l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy d'ordre 2 reste valable pour les équations (E_q) lorsque q est continue :

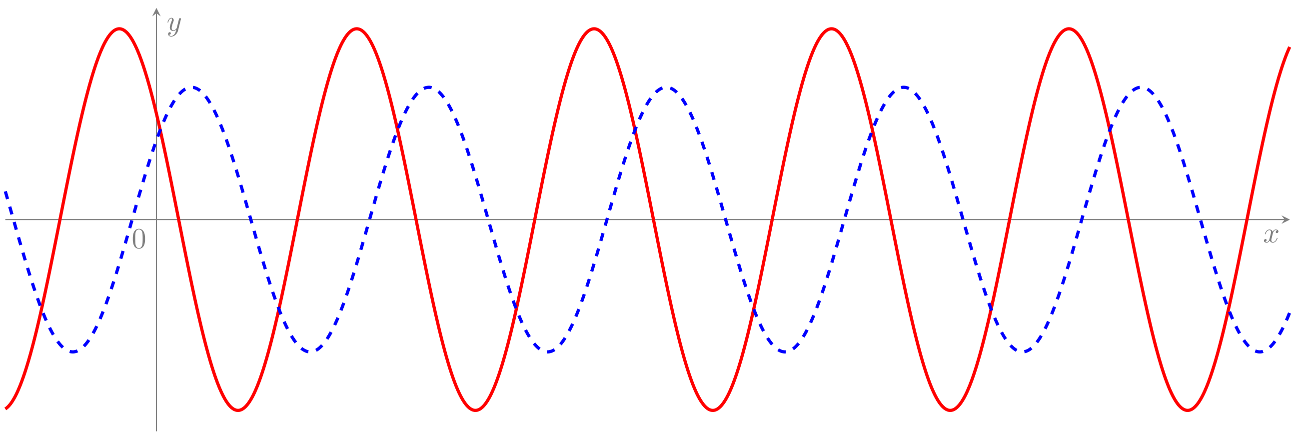
Théorème (admis). *Pour tout $(x_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^3$, il existe une unique solution φ de l'équation différentielle (E_q) vérifiant $\varphi(x_0) = y_0$ et $\varphi'(x_0) = y_1$.*

On admet aussi (cela se vérifie aisément) que le principe de superposition reste valable pour ce type d'équation : toute combinaison linéaire de solutions de (E_q) est encore une solution de (E_q) (car c'est une équation homogène).

On adopte les définitions suivantes :

- On appelle zéro d'une solution f de (E_q) tout réel x tel que $f(x) = 0$.
- On dit que deux zéros x_1 et x_2 d'une solution f de (E_q) sont consécutifs si $x_1 < x_2$ et si f ne s'annule pas sur $]x_1\,;x_2[$.
- On dit qu'un zéro x de f est isolé s'il existe $\delta > 0$ tel que f ne s'annule pas sur $]x-\delta\,;x[\,\cup\,]x\,;x+\delta[$.

On se donne dans la suite deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui sont toutes les deux solutions non identiquement nulles de (E_q).On suppose de plus que f et g ne sont pas proportionnelles[1]. L'objectif des questions suivantes est de montrer que les zéros de f et g sont entrelacés, c'est-à-dire qu'ils sont isolés et que, entre deux zéros consécutifs quelconques de l'une, se trouve un et un seul zéro de l'autre.



On définit la fonction w sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad w(x) = f'(x)g(x) - f(x)g'(x).$$

2) Montrer que w est constante sur $\mathbb{R}$.

3) L'objectif de cette question est de montrer que w n'est pas la fonction nulle. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose que c'est le cas.

   a) Justifier qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}$ tel que $g(x_0) = Cf(x_0)$ et $g'(x_0) = Cf'(x_0)$.

   b) En considérant un problème de Cauchy, conclure à une absurdité.

1. Deux fonctions sont dites proportionnelles s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f = Cg$ ou $g = Cf$

4) Le but de cette question est de montrer que les zéros de f sont tous isolés. Pour cela on raisonne par l'absurde et on suppose qu'il existe un zéro x de f qui ne soit pas isolé.

   a) Montrer qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers x et dont les termes sont des zéros de f différents de x.

   b) A l'aide d'un taux d'accroissement, montrer que $f'(x) = 0$.

   c) En considérant un problème de Cauchy, conclure à une absurdité.

Les rôles de f et g étant symétriques dans ce problème (quitte à remplacer w par son opposé), on montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que tous les zéros de g sont isolés.

5) Soient a et b deux zéros consécutifs de f (avec $a < b$). Montrer que f est de signe constant sur $]a\,;b[$.

Quitte à remplacer f par $-f$, supposons que f est strictement positive sur $]a\,;b[$.

6) Montrer que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont non nuls.

7) En exprimant $f'(a)$ et $f'(b)$ comme des limites de taux d'accroissements, montrer que $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$.

8) Montrer que $g(a)$ et $g(b)$ sont non nul et de signes opposés puis en déduire que g s'annule au moins une fois sur $]a\,;b[$.

9) Montrer que g s'annule une unique fois sur $]a\,;b[$.

On vient de montrer que, lorsque f et g ne sont pas proportionnelles, entre deux zéros consécutifs de f, la solution g s'annule une unique fois. Les rôles de f et g étant symétriques, entre deux zéros consécutifs de g, la solution f s'annule une unique fois. Comme tous les zéros de f et g sont isolés, cela signifie que les zéros de f et g sont entrelacés.

Problème : Approximation des fonctions convexes, croissantes et Lipschitziennes

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. L'objectif de ce problème est de montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- $(\mathcal{P}_f)$: f est convexe, croissante et Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.
- $(\mathcal{Q}_f)$: il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions polynomiales non identiquement nulles à coefficients positifs telle que la suite $\left(\frac{1}{n}\deg(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{n}\ln(P_n(\mathrm{e}^t)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t).$$

Dans la partie A, on établit un résultat préliminaire appelée inégalité de Hölder. Dans la partie B, nous démontrons que, pour tout $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(\mathcal{Q}_f)$ implique $(\mathcal{P}_f)$. Dans la partie C, nous démontrons la réciproque. La partie C est indépendante des deux premières parties.

Partie A : Inégalité de Hölder

On se donne deux réels strictement positifs p et q qui vérifient $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1) Montrer l'inégalité de Young :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^2, \qquad xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

   On utilisera la concavité de la fonction $\ln$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \ldots, t_n, z_1, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^{2n}$ tels que

$$\sum_{k=1}^{n} |t_k|^p = \sum_{k=1}^{n} |z_k|^q = 1.$$

   À l'aide de l'inégalité de Young, montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} |t_k z_k| \leqslant 1.$$

3) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^{2n}$. Le but de cette question est de montrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n} |x_k y_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

a) Montrer l'inégalité de Hölder dans le cas où $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p = 0$ ou $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q = 0$.

b) On suppose maintenant que ces deux sommes sont non nulles. En appliquant l'inégalité de la question A2 des réels $t_1, \ldots, t_n, z_1, \ldots, z_n$ bien choisis, prouver l'inégalité de Hölder.

Partie B : Preuve de $(\mathcal{Q}_f) \Longrightarrow (\mathcal{P}_f)$

On considère une fonction polynomiale $P : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non identiquement nulle et à coefficients positifs. Il existe donc $d \in \mathbb{N}$ (le degré de P) et $(a_0, \ldots, a_d) \in (\mathbb{R}_+)^{d+1}$ tel que $a_d > 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{d} a_k x^k.$$

On définit ensuite la fonction

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(P(\mathrm{e}^t)) \end{array} \right.$$

1) Justifier que φ est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Le but de cette question est de démontrer que φ est convexe.

a) On note $\psi : t \longmapsto P(\mathrm{e}^t)$. Justifier que ψ et φ sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ puis exprimer φ'' en fonction de ψ, ψ' et ψ''.

b) En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \left(\sum_{k=0}^{d} k a_k \mathrm{e}^{kt}\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=0}^{d} k^2 a_k \mathrm{e}^{kt}\right) \left(\sum_{k=0}^{d} a_k \mathrm{e}^{kt}\right).$$

c) Conclure que φ est convexe.

3) a) Justifier que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $0 \leqslant \mathrm{e}^t P'(\mathrm{e}^t) \leqslant d\, P(\mathrm{e}^t)$.

b) Calculer la dérivée de φ puis montrer que φ est d-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Nous sommes désormais prêts pour démontrer le sens indirect de l'équivalence. Supposons que $(\mathcal{Q}_f)$ est vraie, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ d'applications polynomiales non nulles et à coefficient positifs telle la suite numérique $\left(\frac{1}{n}\deg(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \frac{1}{n}\ln(P_n(\mathrm{e}^t)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(t).$$

On note :

- C un majorant strictement positif de la suite $\left(\frac{1}{n}\deg(P_n)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d_n le degré de P_n.
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi_n : t \longmapsto \ln(P_n(\mathrm{e}^t))$ et $f_n : t \longmapsto \dfrac{1}{n}\ln(P_n(\mathrm{e}^t))$.

Les questions précédentes permettent déjà d'affirmer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \times f_n = \varphi_n$ est convexe et d_n-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

4) a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est convexe, croissante et C-Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

b) En déduire que f est convexe, croissante et Lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Partie C : Preuve de $(\mathcal{P}_f) \Longrightarrow (\mathcal{Q}_f)$

On suppose désormais $(\mathcal{P}_f)$, c'est-à-dire que f est convexe, croissante et Lipschitzienne. Notons C un réel strictement positif tel que f est C-Lipschitzienne.

On fixe dans toutes les questions suivantes (sauf la toute dernière) un entier naturel $n \geqslant 2$.

- Pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, on pose $t_k = -\ln(n) + \dfrac{2k}{n} \times \ln(n)$. Remarquons[1] que $t_0 = -\ln(n)$, $t_n = \ln(n)$ et

$$\forall k \in [\![0\,;n-1]\!], \qquad t_{k+1} - t_k = \frac{2\ln(n)}{n}.$$

- Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, on pose

$$p_k = \frac{f(t_{k+1}) - f(t_k)}{t_{k+1} - t_k} \qquad \text{et} \qquad q_k = \lfloor n \times p_k \rfloor.$$

- Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, on définit les fonctions

$$\ell_k : t \longmapsto f(t_k) + p_k(t - t_k) \qquad \text{et} \qquad \lambda_k : t \longmapsto f(t_k) + \frac{q_k}{n}(t - t_k).$$

Remarquons que, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, les réels t_k, q_k, p_k et les fonctions ℓ_k et λ_k dépendent de k et aussi de n mais la dépendance en n est omise pour alléger les notations.

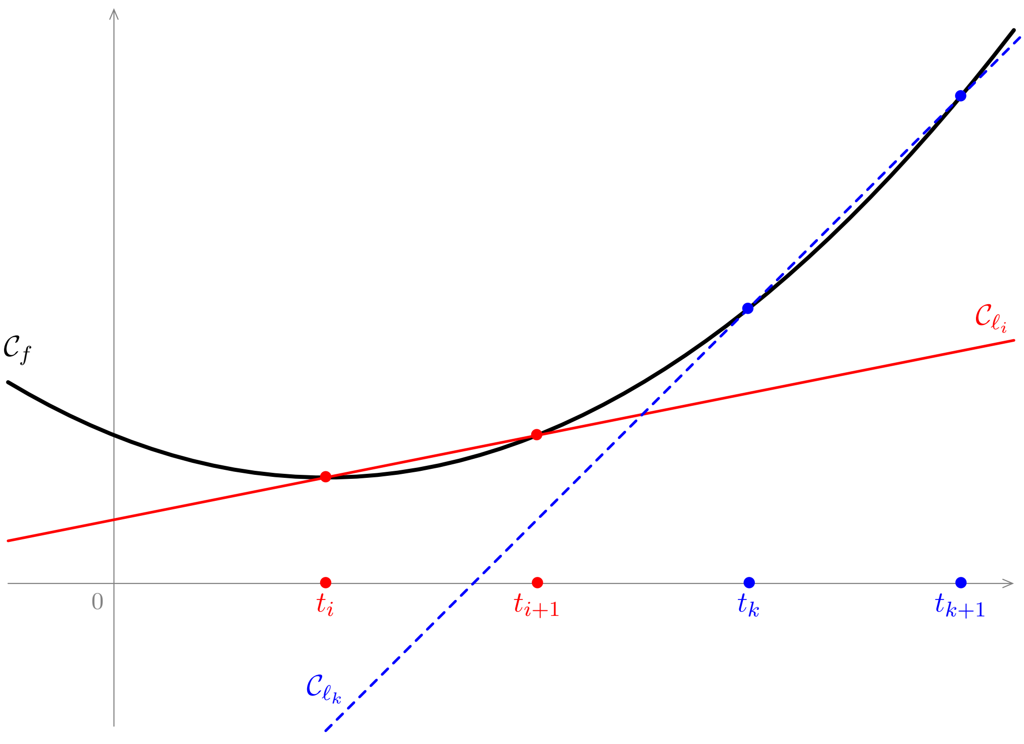
On définit enfin l'application polynomiale

$$P_n : x \longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{e}^{n\lambda_k(0)} x^{q_k}.$$

1) Justifier que, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $0 \leqslant p_k \leqslant C$, $q_k \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant p_k - \dfrac{q_k}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.

2) On se donne, dans la suite de cette question, un entier $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ et un entier $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ distinct de i. On cherche à prouver que

$$\forall t \in [t_i\,;t_{i+1}], \qquad \ell_k(t) \leqslant f(t) \leqslant \ell_i(t).$$



1. Dans le chapitre 24, nous avons dit que $(t_k)_{0\leqslant k\leqslant n}$ est une subdivision régulière de $[\![-\ln(n)\,;\ln(n)]\!]$.

a) Prouver sans calcul l'inégalité de droite.

b) Justifier que la fonction

$$x \longmapsto \frac{f(x) - f(t_k)}{x - t_k}$$

est croissante puis montrer l'inégalité de gauche.

On considère désormais un réel $t \in [-\ln(n)\,;\ln(n)[$.

3) a) Justifier qu'il existe un unique $i \in [\![0\,;n-1]\!]$ tel que $t_i \leqslant t < t_{i+1}$.
On explicitera i en fonction de t et de n.

b) Montrer que

$$0 \leqslant \ell_i(t) - \lambda_i(t) \leqslant \frac{2\ln(n)}{n^2}.$$

4) On suppose dans cette question que $i \in [\![0\,;n-2]\!]$. Vérifier que $\ell_i(t) = p_i(t - t_{i+1}) + f(t_{i+1})$ puis prouver que

$$0 \leqslant \ell_i(t) - f(t) \leqslant \frac{2C\ln(n)}{n}.$$

On appliquera l'inégalité de la question C2 avec $k = i+1$.

On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que cette dernière inégalité reste vraie si $i = n-1$ (en prenant $k = i-1 = n-2$). Elle est donc vraie quelle que soit la valeur de i et peut donc être utilisée dans la suite sans faire de distinction sur la valeur de i.

5) En déduire que

$$-\frac{2C\ln(n)}{n} \leqslant f(t) - \lambda_i(t) \leqslant \frac{2\ln(n)}{n^2}.$$

6) Vérifier que, pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, $n\lambda_k(0) + q_k t = n\lambda_k(t)$, puis prouver que

$$\frac{1}{n}\ln(P_n(\mathrm{e}^t)) = \lambda_i(t) + A_n \quad \text{avec} \quad A_n = \frac{1}{n}\ln\left(1 + \sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n-1\\ k\neq i}} \mathrm{e}^{n(\lambda_k(t)-\lambda_i(t))}\right).$$

7) Soit $k \in [\![0\,;n-1]\!]\backslash\{i\}$. Justifier que

$$\lambda_k(t) - \lambda_i(t) \leqslant |\lambda_k(t) - \ell_k(t)| + |\lambda_i(t) - \ell_i(t)|$$

puis montrer qu'il existe une constante K (indépendante de t, i, k et n), que l'on précisera, telle que

$$\lambda_k(t) - \lambda_i(t) \leqslant \frac{K\ln(n)}{n}.$$

8) En déduire que

$$0 \leqslant A_n \leqslant \frac{1}{n}\ln(1 + n^{K+1}).$$

9) Conclure que $(\mathcal{Q}_f)$ est vraie.