Devoir surveillé n° 7 – Sujet A

samedi 14 mars 2026

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

*Rédigez sur une copie double **lisiblement et proprement**. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur. **Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

*Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. **Tout résultat doit être justifié**. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Exercice 1 : Questions en vrac sur les polynômes et les fractions rationnelles

1) Déterminer le degré et le coefficient dominant du polynôme $(X+2)^{2026}-(X-2)^{2026}$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^{2026}-X^{2026}+1$ par $(X+1)^2$.
On ne demande pas le quotient.

3) Résoudre l'équation $(X^2+1)P'' = 6P$, d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.
On s'intéressera aux coefficients dominants.

4) Factoriser $3X^4-11X^3+9X^2+4$ dans $\mathbb{R}[X]$ puis dans $\mathbb{C}[X]$.

5) Factoriser X^4-6X^2+25 dans $\mathbb{C}[X]$ et dans $\mathbb{R}[X]$.

6) Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Factoriser X^6+a^6 dans $\mathbb{C}[X]$ d'abord, puis dans $\mathbb{R}[X]$.

7) Déterminer un polynôme P de degré 4 tel que $P(3)=P'(3)=P(1)=0$, $P(2)=-2$ et $P'(4)=20$.
On l'écrira sous forme factorisée dans $\mathbb{R}[X]$.

8) Soient P et Q deux polynômes tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P\left(\mathrm{Arctan}(x^4)\right) = Q\left(\mathrm{Arctan}(x^4)\right)$. Justifier que $P=Q$.

9) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par les points $(-1,-4)$, $(2,5)$ et $(3,12)$.
On présentera la réponse sous forme factorisée au maximum bien sûr.

10) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la décomposition en éléments simples de $\dfrac{1}{X(X+1)(X+2)\cdots(X+n)}$ dans $\mathbb{R}(X)$ est
$$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{X+k}.$$

11) Soit $P=\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ tel que $a_0 \neq 0$. On suppose que P est scindé. On note $x_1,\dots,x_n$ ses racines distinctes et $m_1,\dots,m_n$ les ordres de multiplicité respectifs de ces racines. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{m_k}{x_k} = -\frac{a_1}{a_0}.$$

Exercice 2 : Questions en vrac sur les matrices

1) Montrer que, dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, pour tout $(i,j,k,\ell) \in [\![1\,;n]\!]^4$, $E_{i,j}E_{k,\ell} = \delta_{j,k}E_{i,\ell}$. En déduire l'action de la multiplication à gauche et à droite d'une matrice carrée quelconque par une matrice élémentaire.

2) Montrer que

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

est inversible et calculer A^{-1} à l'aide de la méthode du pivot de Gauss.

La méthode du pivot de Gauss devra être respectée à la lettre. Aucune interversion de lignes ne doit avoir lieu si le pivot est non nul. Aucune fraction ne doit apparaître dans les calculs sauf éventuellement à l'ultime étape. On présentera A^{-1} sous la forme $\frac{1}{q}B$ où $q \in \mathbb{N}^*$ et B est une matrice à coefficients entiers.

3) Notons

$$B = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

a) Déterminer $a \in \mathbb{Z}$ tel que $B^2 = aB - 2\mathrm{I}_3$.

b) En déduire que B est inversible et expliciter B.
On n'utilisera pas la méthode du pivot de Gauss à cette question.

4) Notons

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

a) Posons $N = M - \mathrm{I}_3$. Calculer N^2 et obtenir que $N^3 = 0_3$.

b) En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$.
On pourra s'arrêter en donnant le résultat sous la forme d'une combinaison linéaire de trois matrices.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $A = \left(\dfrac{i^2+j}{n}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = \left(\dfrac{6ij}{n+1}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Déterminer le coefficient d'indice (i,j) de la matrice AB pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$.

6) Montrer que, si A et B commutent et que B est inversible, alors A et B^{-1} commutent.

Exercice 3 : Questions en vrac sur l'intégration sur un segment

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = H_n - \ln(n).$$

En utilisant des comparaisons avec des intégrales, montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive. En déduire qu'elle admet une limite.

2) Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{n^2 k}{n^4+k^4}.$$

3) a) Énoncer (sans démonstration) la formule de Taylor avec reste intégral à tout ordre.

b) Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \qquad \sqrt[5]{1+5x} \leqslant 1 + x - 2x^2 + 6x^3.$$

4) a) Montrer que,

$$\forall t \in [0\,;1]\,, \qquad |\operatorname{sh}(t) - t| \leqslant \frac{\mathrm{e}\,t^2}{4}.$$

b) En déduire que

$$\int_x^{3x} \frac{\operatorname{sh}(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ln(3).$$