# Devoir surveillé n° 7 – Sujet B

**samedi 14 mars 2026**

*La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.*

*Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.*

*Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

*Rédigez sur une copie double* ***lisiblement et proprement****. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur.* ***Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

*Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements.* ***Tout résultat doit être justifié****. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

## Questions en vrac

1) Factoriser le polynôme $P = 2X^6 - 8X^5 - X^4 + 36X^3 - 41X^2 + 20X - 20$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme

$$Q_n = 5 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (2X)^k.$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+1)^n - X^n - 1$ par $(X+1)^2$.
*On ne demande pas le quotient.*

4) Déterminer le polynôme d'interpolation de Lagrange qui passe par les points $(-1,-4)$, $(2,5)$ et $(3,12)$.
*On présentera la réponse sous forme factorisée au maximum bien sûr.*

5) Existe-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = n^2 + (-1)^n$ ?

6) Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$, $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On note

$$A = (a_i)_{1 \leqslant i,j \leqslant n} = \begin{pmatrix} a_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ a_2 & a_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ a_3 & a_3 & a_3 & \cdots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n & a_n & \cdots & a_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

et $t = \mathrm{tr}(A)$. On pose enfin $M = A - \lambda \mathrm{I}_n$.

   a) Établir que $M^2 = (t - 2\lambda)M + \lambda(t-\lambda)\mathrm{I}_n$.
   *On vérifiera cette identité coefficient par coefficient avec les formules définissant les produits et sommes matriciels et aucun « produit en papillon ».*

   b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pourtant sur $\lambda$ pour que $M$ soit inversible. Le cas échéant, préciser $M^{-1}$ en fonction de $M$, $\lambda$ et $t$.

7) Notons $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$. Calculer $A^{2026}$.
*On commencera par calculer les puissances successives de $B = A + \mathrm{I}_3$. Une récurrence immédiate suffira pour les puissances de $B$ mais on n'utilisera aucun raisonnement par récurrence pour le calcul de $A^{2026}$.*

8) Décomposer en éléments simples

$$R = \frac{X^2}{X^3+5X^2+8X+4}$$

dans $\mathbb{R}(X)$ puis montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{3k^2}{4n^3+8kn^2+5k^2n+k^3} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 3\ln(2)-2.$$

## Problème 1 : Quelques propriétés des matrices de Hilbert

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère

$$H = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \cdots & \frac{1}{n} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \cdots & \frac{1}{n+1} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \cdots & \frac{1}{n+2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n+1} & \frac{1}{n+2} & \cdots & \frac{1}{2n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

Autrement dit, pour tout $(i,j) \in [\![1\,;n]\!]^2$, le coefficient d'indice $(i,j)$ de $H$ est $h_{i,j} = \dfrac{1}{i+j-1}$.

### Partie A : Inversibilité

1) a) Former la matrice $H$ dans le cas $n=2$. Justifier qu'elle est inversible et expliciter $H^{-1}$.

   b) Former la matrice $H$ dans le cas $n=3$. A l'aide de la méthode de Gauss-Jordan, montrer qu'elle est inversible et expliciter $H^{-1}$.
   *Pour éviter de manipuler des fractions, on calculera $(60H)^{-1}$. Même si les nombres apparaissant dans les matrices pourront avoir trois chiffres, le calcul est tout à fait accessible. La méthode de Gauss-Jordan doit être respectée à la lettre et toutes les opérations devront obligatoirement apparaitre sur la copie. Aucune fraction ne peut apparaître sans éventuellement à l'ultime étape.*

Dans la suite, on fixe $n \in \mathbb{N}\backslash\{0;1\}$. On admet (on montrera cela dans le chapitre 32) que si le système $HY = 0_{n,1}$, d'inconnue $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, admet $0_{n,1}$ pour unique solution, alors $H$ est inversible.

On se donne donc $Y = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_n \end{pmatrix}^\top \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ vérifiant $HY = \mathrm{O}_{n,1}$. On note $P$ le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par les $n$ points du plan de coordonnées

$$\Big(-k, (-1)^k k!(n-1-k)!y_{k+1}\Big), \qquad k \in [\![0\,;n-1]\!].$$

2) a) Donner, sans démonstration, une expression de $P$.
   *On ne demande pas de simplifier cette expression, encore moins de la factoriser.*

   b) Notons $R = \displaystyle\prod_{j=0}^{n-1}(X+j)$. Vérifier par le calcul que, dans $\mathbb{R}(X)$,

$$\frac{P}{R} = \sum_{k=1}^{n} \frac{y_k}{X+k-1}.$$

3) a) Déduire de la question précédente que les éléments de $[\![0\,;n-1]\!]$ sont racines de $P$.

   b) Conclure que $P=0$ puis que $Y=0$.

Compte tenu de ce que l'on a admis plus haut, cela prouve que $H$ est inversible.

### Partie B : Somme des coefficients de $H^{-1}$

Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, notons $m_{i,j}$ le coefficient d'indice $(i,j)$ de $H^{-1}$. L'objectif de cette partie est de calculer $\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j}$, c'est-à-dire la somme des coefficients de $H^{-1}$.

1) Calculer la somme des coefficients de $H^{-1}$ dans le cas où $n=2$ et $n=3$.

2) Soit $U$ la matrice de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, notons $v_k$ le $k^{\text{ième}}$ coefficient de la matrice $V = H^{-1}U$. Vérifier que

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} v_i.$$

3) On introduit le polynôme

$$S = \sum_{k=1}^{n} v_k \prod_{\substack{0 \leqslant j \leqslant n-1 \\ j \neq k-1}} (X+j)$$

puis on pose $Q = R - S$ où $R$ est le polynôme introduit dans la partie précédente.

   a) Déterminer le degré et le coefficient dominant de $Q$.
   b) Justifier que les éléments de $[\![1\,;n]\!]$ sont des racines de $Q$.
   c) En déduire une factorisation de $Q$.
   d) En calculant le coefficient de degré $n-1$ de $S = R - Q$ de deux façons différentes, conclure que

$$\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} m_{i,j} = n^2.$$

## Problème 2 : La fonction $\Gamma$

---

### Partie A : Une définition de la fonction $\Gamma$

Pour tous $x \in [1\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Soit $x \in [1\,;+\infty[$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma_n(x) \leqslant \int_0^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

2) a) Justifier que la fonction $\varphi : t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$.
   b) En déduire que la suite $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

3) a) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0\,;n[$,

$$n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant (n+1)\ln\left(1 - \frac{t}{n+1}\right).$$

   *On pensera à utiliser la concavité de* $u \longmapsto \ln(1-u)$ *sur* $]0\,;1[$.

   b) En déduire que la suite $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, on pose alors
$$\Gamma(x) = \lim_{n \to +\infty} \Gamma_n(x).$$

La fonction $\Gamma$ est une fonction usuelle très importante en mathématiques. Vous la rencontrerez assurément plusieurs fois en deuxième année [1].

**Partie B : Un propriété fondamentale de $\Gamma$**

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{n!}{X(X+1)(X+2)\cdots(X+n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{X+k}.$$
*On ne raisonnera pas par récurrence.*

2) En déduire que, pour tous $x \in [1\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$
$$\Gamma_n(x) = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

3) Montrer alors que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

4) Que vaut $\Gamma(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ ?

**Partie C : Dérivabilité de $\Gamma$ en $1$**

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons
$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = H_n - \ln(n).$$
En utilisant des comparaisons avec des intégrales, montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive. En déduire qu'elle admet une limite $\gamma$.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Vérifier que
$$\ln(\Gamma_n(1+t)) - \ln(\Gamma_n(1)) = -t\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n+1}\left(\ln\left(1+\frac{t}{k}\right) - \frac{t}{k}\right).$$

3) Montrer que
$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \qquad |\ln(1+u) - u| \leqslant \frac{u^2}{2}\,.$$

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k-1)} \leqslant 1.$$

5) Déduire des deux questions précédentes que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$.
$$\left|\sum_{k=1}^{n+1}\left(\ln\left(1+\frac{t}{k}\right) - \frac{t}{k}\right)\right| \leqslant t^2.$$

6) Montrer alors que $\ln \circ \Gamma$ est dérivable en $1$ et préciser sa dérivée.

7) Conclure que $\Gamma$ est dérivable en $1$ et que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

1. ... mais plutôt avec la définition (équivalente bien sûr) suivante :
$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A \to +\infty} \int_0^{A} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$