Devoir surveillé n$^{\text{o}}$ 7 – Sujet C

samedi 14 mars 2026

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

*Rédigez sur une copie double **lisiblement et proprement**. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur. **Encadrez ou soulignez les résultats principaux.***

*Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. **Tout résultat doit être justifié**. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles $\forall$, $\exists$, $\Rightarrow$ et $\Leftrightarrow$ sauf si vous savez les utiliser correctement.*

Apéritif

1) Factoriser le polynôme $P = 2X^6 - 8X^5 - X^4 + 36X^3 - 41X^2 + 20X - 20$ dans $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.
2) Existe-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = n^2 + (-1)^n$?

Exercice 1 : Un théorème de Laguerre

On se donne $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que P est scindé dans $\mathbb{R}[X]$ et que P admet une racine non nulle.

Soit $\alpha \in \mathbb{R} \setminus [0\,;n]$. On pose $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k (k-\alpha) X^k$.

1) Vérifier que $B = XP' - \alpha P$, que B est de degré n et préciser son coefficient dominant.
2) a) Soit r une racine non nulle de P d'ordre de multiplicité m. Justifier que r est racine de B si et seulement si $m \geqslant 2$ et que, dans ce cas, son ordre de multiplicité dans B est $m-1$.

   b) Montrer que, si 0 est racine de P d'ordre de multiplicité m, alors 0 est encore racine de B d'ordre de multiplicité m.

Dans la suite, on s'autorisera l'abus de notation consistant à dire qu'un réel qui n'est pas racine d'un polynôme est une racine d'ordre de multiplicité 0.

On note $\mathcal{R}$ l'ensemble des racines de P et $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R} \cup \{0\}$. Puisqu'on a supposé que P admet une racine non nulle, on a $p = \operatorname{card}(\mathcal{R}_0) \geqslant 2$. On note $r_1, \dots, r_p$ les éléments de $\mathcal{R}_0$ de sorte que $r_1 < r_2 < \cdots < r_p$. On note aussi i_0 l'entier de $[\![1\,;p]\!]$ tel que $r_{i_0} = 0$. Enfin, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!]$, on note m_i l'ordre de multiplicité de r_i dans P. Par conséquent, pour tout $i \in [\![1\,;p]\!] \setminus \{i_0\}$, $m_i \in \mathbb{N}^*$ mais m_{i_0} peut être nul si 0 n'est pas racine de P.

3) Montrer que, dans $\mathbb{R}(X)$,

$$B = XP\left(\frac{m_{i_0} - \alpha}{X} + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ k \neq i_0}} \frac{m_k}{X - r_k}\right).$$

4) On pose

$$f : x \longmapsto \frac{m_{i_0} - \alpha}{x} + \sum_{\substack{1 \leqslant k \leqslant p \\ k \neq i_0}} \frac{m_k}{x - r_k}$$

a) Justifier que $D_f = \mathbb{R} \backslash \mathcal{R}_0$.

b) Montrer que, si $\alpha < 0$, alors f s'annule au moins $p-1$ fois sur $D_f \cap]r_1\,;r_p[$.

c) Montrer que f a les mêmes limites en $+\infty$ et $-\infty$ que la fonction $x \longmapsto \dfrac{n-\alpha}{x}$.
On pourra remarquer que $f(x) = \dfrac{B(x)}{xP(x)}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R} \backslash \mathcal{R}_0$.

d) On suppose que $\alpha > n$. Montrer que, si $i_0 \neq 1$ alors f s'annule sur $]-\infty\,;r_1[$ et, si $i_0 \neq p$, alors f s'annule sur $]r_p\,;+\infty[$. Conclure que f s'annule au moins $p-1$ fois sur D_f.
On commencera par expliquer brièvement les différences avec la question 4b, sans tout redémontrer.

On en déduit que B admet au moins $p-1$ racines qui ne sont pas dans $\mathcal{R}_0$.

5) Former la somme des ordres de multiplicités de toutes les racines déjà trouvées de B et conclure que B est scindé dans $\mathbb{R}[X]$.

6) Soit $q \in \mathbb{N} \backslash \{0; 1\}$. Soient $\alpha_1, \dots, \alpha_q$ des réels qui n'appartiennent pas à $[0\,;n]$. Pour tout $j \in [\![1\,;q]\!]$, posons $Q_j = (X-\alpha_1)(X-\alpha_2)\dots(X-\alpha_j)$. Montrer par récurrence, à l'aide des questions précédentes (dans l'initialisation et l'hérédité) que, pour tout $j \in [\![1\,;q]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} c_k Q_j(k) X^k$est scindé sur $\mathbb{R}[X]$.

7) On se donne $P = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ et Q des polynômes scindés dans $\mathbb{R}[X]$ tels que les racines de Q n'appartiennent pas à $[0\,;\deg(P)]$. Déduire des questions précédentes que le polynôme

$$\sum_{k=0}^{n} a_k Q(k) X^k$$

est scindé dans $\mathbb{R}[X]$. Ce résultat est un théorème du mathématicien français Edmond Laguerre.

Exercice 2 : Décomposition de Cholesky

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices symétriques à coefficients réels.

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ est **définie positive** lorsque, pour toute matrice $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $X^\top M X \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $X = 0$.

En toute rigueur, $X^\top M X$ *est une matrice de* $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ *mais on l'identifiera à son unique coefficient (qui est un réel).*

1) Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie positive. Pour tout $X = (x_k)_{1 \leqslant k \leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, exprimer le réel $X^\top M X$ sous la forme d'une somme double.

2) a) Soit $M = (m_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie positive. Montrer que, pour tout $k \in [\![1\,;n]\!]$, $m_{k,k} > 0$.

b) Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice diagonale soit symétrique définie positive.

c) Montrer que, pour tout $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$, $A^\top A$ est symétrique définie positive.

d) Soit $M \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ définie positive et soit $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $P^\top M P$ est symétrique définie positive.

3) Notons $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Former $M = A^\top A$.

b) Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes de M pour la transformer en une matrice triangulaire supérieure M' à coefficients entiers puis, effectuer sur I_3 les mêmes opérations élémentaires (et dans le même ordre) que celles que l'on vient d'effectuer sur M. On note B la matrice ainsi obtenue.

c) On pose $Q = B^\top$. Calculer $M'Q$ et AQ. Que remarque-t-on ?

4) On note $\mathcal{T}_n^{+>}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs. Justifier qu'il s'agit d'un groupe multiplicatif.

5) Soit $M = (m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ une matrice symétrique définie positive.

a) Rappeler, sans démonstration, le résultat du produit de deux matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Déduire (en le démontrant) le produit de M par une matrice élémentaire quelconque à gauche et à droite.

b) Pour tout $k \in [\![2\,;n]\!]$, préciser l'action du produit de M par la matrice

$$A_k = \mathrm{I}_n + (m_{1,1} - 1)E_{k,k} - m_{1,k}E_{1,k}$$

à droite et par la matrice $A_k^\top$ à gauche.

c) Montrer alors qu'il existe $P_1 \in \mathcal{T}_n^{+>}(\mathbb{R})$ telle que $P_1^\top M P_1$ est une matrice donc la première ligne et la première colonne son nulles à l'exception du coefficient sur la diagonale.

d) Montrer qu'il existe $Q \in \mathcal{T}_n^{+>}(\mathbb{R})$ telle que $D = Q^\top M Q$ est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont strictement positifs.

On s'inspirera de la démarche de la question précédente et on pourra s'autoriser à l'expliquer dans les grandes lignes.

e) En déduire qu'il existe $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs telle que $M = T^\top T$. Cette décomposition est appelée décomposition de Cholesky.

On pourra commencer par déterminer $\Delta \in \mathcal{T}_n^{+>}(\mathbb{R})$ diagonale telle que $\Delta^\top \Delta = D$.

f) On suppose qu'il existe deux matrices T_1 et T_2 triangulaires supérieures à coefficients diagonaux strictement positifs telles que $T_1^\top T_1 = T_2^\top T_2$. Justifier que $T_2 T_1^{-1}$ et $T_1 T_2^{-1}$ sont triangulaires supérieures et conclure que $T_1 = T_2$: la décomposition de Cholesky est unique.

Problème : La fonction Γ

Partie A : Une définition de la fonction Γ

Pour tous $x \in [1\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$\Gamma_n(x) = \int_0^n t^{x-1}\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t.$$

Soit $x \in [1\,;+\infty[$.

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Gamma_n(x) \leqslant \int_0^n t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

2) a) Justifier que la fonction $\varphi : t \longmapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}$ est majorée sur $\mathbb{R}_+$.

b) En déduire que la suite $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée.

3) a) Montrer que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in [0\,;n[$,

$$n \ln\left(1 - \frac{t}{n}\right) \leqslant (n+1)\ln\left(1 - \frac{t}{n+1}\right).$$

On pensera à utiliser la concavité de $u \longmapsto \ln(1-u)$ sur $]0\,;1[$.

b) En déduire que la suite $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

Pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, on pose alors

$$\Gamma(x) = \lim_{n\to+\infty} \Gamma_n(x).$$

La fonction Γ est une fonction usuelle très importante en mathématiques. Vous la rencontrerez assurément plusieurs fois en deuxième année [1].

Partie B : Un propriété fondamentale de Γ

1) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\frac{n!}{X(X+1)(X+2)\cdots(X+n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{(-1)^k}{X+k}.$$

On ne raisonnera pas par récurrence.

2) En déduire que, pour tous $x \in [1\,;+\infty[$ et $n \in \mathbb{N}^*$

$$\Gamma_n(x) = \frac{n!\, n^x}{x(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}.$$

3) Montrer alors que, pour tout $x \in [1\,;+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

4) Que vaut $\Gamma(k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$?

Partie C : Dérivabilité de Γ en 1

1) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{et} \qquad u_n = H_n - \ln(n).$$

En utilisant des comparaisons avec des intégrales, montrer que $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et positive. En déduire qu'elle admet une limite γ.

2) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Vérifier que

$$\ln(\Gamma_n(1+t)) - \ln(\Gamma_n(1)) = -t\left(u_n + \frac{1}{n+1}\right) - \sum_{k=1}^{n+1}\left(\ln\left(1+\frac{t}{k}\right) - \frac{t}{k}\right).$$

3) Montrer que

$$\forall u \in \mathbb{R}_+, \qquad |\ln(1+u) - u| \leqslant \frac{u^2}{2}\,.$$

4) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k(k-1)} \leqslant 1.$$

5) Déduire des deux questions précédentes que, pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$.

$$\left|\sum_{k=1}^{n+1}\left(\ln\left(1+\frac{t}{k}\right) - \frac{t}{k}\right)\right| \leqslant t^2.$$

6) Montrer alors que $\ln \circ \Gamma$ est dérivable en 1 et préciser sa dérivée.

7) Conclure que Γ est dérivable en 1 et que $\Gamma'(1) = -\gamma$.

---

1. ... mais plutôt avec la définition (équivalente bien sûr) suivante :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t = \lim_{A\to+\infty}\int_0^{A} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$