

Devoir surveillé n° 8

vendredi 3 avril 2026

La durée de l'épreuve est de 4 heures et aucune sortie définitive avant la fin n'est autorisée. Il est possible d'obtenir la note maximale sans avoir traité l'intégralité du sujet.

Avant de commencer, lisez l'intégralité du sujet.

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Rédigez sur une copie double **lisiblement et proprement**. Laissez une marge à gauche et de la place au début de la copie pour mes appréciations. Écrivez à l'encre bleue ou noire. N'utilisez pas de blanc correcteur. **Encadrez ou soulignez les résultats principaux**.

Veuillez apporter un soin particulier à la rédaction, à la rigueur et aux raisonnements. **Tout résultat doit être justifié**. Ces éléments seront pris en compte dans la notation. N'oubliez pas d'introduire toutes les variables que vous utilisez, lorsqu'il le faut. Évitez les symboles \forall , \exists , \Rightarrow et \Leftrightarrow sauf si vous savez les utiliser correctement.

EXERCICE : SINUS EN VRAC

Les trois questions de cet exercice sont indépendantes.

1) On introduit une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ définie par $x_1 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x_n}{n}\right).$$

a) Justifier que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée puis montrer que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{2}$.

b) En injectant dans l'équation de récurrence, établir que

$$x_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4n} + o\left(\frac{1}{n}\right).$$

c) En injectant une fois de plus dans l'équation de récurrence, expliciter un réel α tel que

$$x_n \underset{+\infty}{=} \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{4n} + \frac{\alpha}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$u_n = \prod_{k=1}^n \sin\left(\frac{1}{k}\right).$$

a) Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, notons $v_n = (n-1)! u_{n-1}$. Montrer que la série $\sum \ln\left(\frac{v_{n+1}}{v_n}\right)$ converge.

b) En déduire qu'il existe $\lambda > 0$ (que l'on ne cherchera pas à expliciter) tel que $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{\lambda}{n!}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $B_n = \sum_{k=0}^n \sin(k)$.

a) Établir, sans raisonner par récurrence, que

$$\forall N \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}, \quad \sum_{n=1}^N \frac{\sin(n)}{n} = \frac{B_N}{N} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n}{n(n+1)}.$$

b) Montrer que $(B_n)_{n \geq 1}$ est bornée et déterminer la nature de la série $\sum \frac{\sin(n)}{n}$.

L'objectif de ce problème est de montrer que, pour tout réel x non nul,

$$\frac{\sin(x)}{x} = \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right),$$

ce qui signifie que

$$\prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 n^2}\right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Cette formule s'appelle le développement Eulérien de la fonction sinus.

Partie A : Étude de fonctions auxiliaires

On note $D = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. On définit les fonctions φ et g par :

$$\forall x \in D, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{n^2 - x^2}.$$

et

$$\forall x \in D \cup \{0; 1\}, \quad g(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).$$

Enfin, pour tous $x \in D \cup \{0; 1\}$ et $N \in \mathbb{N} \setminus \{0; 1\}$, on note

$$G_N(x) = \sum_{n=2}^N \left(\frac{1}{n-x} - \frac{1}{n+x} \right).$$

- 1) Montrer que φ est bien définie sur D et que g est bien définie sur $D \cup \{0; 1\}$.
- 2) Montrer que φ est impaire sur D .
- 3) Vérifier que

$$\forall x \in D, \quad \varphi(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} - g(x).$$

- 4) Soit $x \in D$. Montrer que $\frac{x}{2} \in D$, $\frac{x+1}{2} \in D$ et

$$\varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\varphi(x).$$

On utilisera la formule de la question précédente et, pour faire des calculs, on reviendra impérativement aux sommes partielles de la série définissant la fonction g (introduites en début d'énoncé).

On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que φ est 1-périodique sur D .

- 5) a) Justifier l'existence de

$$C = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)\left(n - \frac{3}{2}\right)}$$

puis montrer que

$$\forall h \in \left] -\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right[, \quad \forall x \in [0; 1], \quad |g(x+h) - g(x)| \leq 2C|h|.$$

- b) En déduire que g est continue sur $[0; 1]$.
- c) Conclure que φ est continue sur D .

- 6) a) Montrer que $\varphi(x) = \frac{1}{x} + o(1)$ puis donner un équivalent de φ en 0.
 b) En déduire que $\varphi(x) = \frac{1}{x-1} + o(1)$ ainsi qu'un équivalent de φ en 1.
- 7) On introduit la fonction $\cot : x \mapsto \pi \frac{\cos(\pi x)}{\sin(\pi x)}$.
- a) Justifier que \cot est bien définie sur D puis qu'elle est continue, impaire et 1-périodique sur D .
 b) Vérifier que
- $$\forall x \in D, \quad \cot\left(\frac{x}{2}\right) + \cot\left(\frac{x+1}{2}\right) = 2\cot(x).$$
- c) Déterminer un équivalent de $\cot(x) - \frac{1}{x}$ quand x tend vers 0 puis conclure que les résultats de la questions A6 sur φ sont aussi valables pour la fonction \cot .

Partie B : Étude d'un endomorphisme

On note E le \mathbb{R} -espace vectoriel (on ne demande pas de montrer que c'est un espace vectoriel) des fonctions continues sur le segment $[0; 1]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On définit sur E l'application T par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in [0; 1], \quad T(f)(x) = f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right),$$

c'est-à-dire

$$\forall f \in E, \quad T(f) : \begin{cases} [0; 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) \end{cases}.$$

- 1) Montrer que T est un endomorphisme de E .
- 2) Peut-on affirmer que φ et \cot sont dans $\text{Ker}(T - 2\text{Id}_E)$?
- 3) Soit $f \in \text{Ker}(T - 2\text{Id}_E)$.
 - a) Justifier que f admet sur $[0; 1]$ un minimum m et un maximum M qui sont atteints en des réel x_0 et y_0 respectivement.
 - b) Soit $x \in [0; 1]$ tel que $m = f(x)$. Montrer que $m = f\left(\frac{x}{2}\right)$.
 - c) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $m = f\left(\frac{x_0}{2^n}\right)$.
 - d) Conclure que $m = f(0)$.

On montrerait de même (on ne demande pas de le faire) que $M = f(0)$.

- e) En déduire que $\text{Ker}(T - 2\text{Id}_E) = \text{Vect}(x \mapsto 1)$.
- 4) a) Montrer que $\varphi - \cot$ se prolonge en une fonction ψ qui est continue sur $[0; 1]$ et vérifie $\psi \in \text{Ker}(T - 2\text{Id}_E)$.
 b) Montrer alors que $\varphi = \cot$ sur D .

Partie C : Développement Eulérien du sinus

On revient maintenant à notre problème. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction β_N sur $[0; 1[$ par

$$\forall x \in [0; 1[, \quad \beta_N(x) = \sum_{n=1}^N \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right).$$

- 1) Justifier que, pour tout $x \in [0; 1[$, la série $\sum \ln\left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)$ converge.

On définit alors la fonction β sur $]0; 1[$ par

$$\forall x \in]0; 1[, \quad \beta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \ln \left(1 - \frac{x^2}{n^2} \right).$$

2) Soit $x \in]0; 1[$.

a) Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, calculer

$$\int_0^x \sum_{n=1}^N \left(\frac{2t}{n^2 - t^2} \right) dt$$

en fonction de $\beta_N(x)$.

b) Notons

$$\gamma : t \in]0; 1[\mapsto \begin{cases} \varphi(t) - \frac{1}{t} & \text{si } t \in]0; 1[\\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

Justifier que $\int_0^x \gamma(t) dt$ existe.

c) Montrer que

$$\left| \int_0^x \sum_{n=1}^N \left(\frac{2t}{n^2 - t^2} \right) dt + \int_0^x \gamma(t) dt \right| \leq 2x^2 \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 - 1}.$$

d) En déduire que

$$\beta(x) = \int_0^x \gamma(t) dt$$

puis que

$$\beta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon}^x \left(\varphi(t) - \frac{1}{t} \right) dt.$$

3) Conclure que

$$\forall x \in]0; 1[, \quad \beta(x) = \ln \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi x} \right).$$

On rappelle que l'on a montré, dans la partie B, que $\varphi = \cot$ sur $]0; 1[$.

Pour tous $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$P_n(x) = x \prod_{k=1}^n \left(1 - \frac{x^2}{\pi^2 k^2} \right).$$

4) a) Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $(P_n(x))_{n \geq 1}$ converge.

On pourra passer au logarithme népérien, quitte à enlever des termes, et s'inspirer de la preuve de la question C1.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note

$$P(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n(x).$$

b) Déduire de la question C3 que, pour tout $x \in [0; \pi[$, $P(x) = \sin(x)$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}$. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $n > \frac{x}{\pi}$,

$$P_n(x + \pi) = -\frac{(n+1)\pi + x}{n\pi - x} P_n(x).$$

En déduire que $P(x + \pi) = -P(x)$.

d) Montrer alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = \sin(x)$.

Il s'agit bien de la formule que l'on voulait montrer en début de problème (quitte à diviser par x lorsque $x \neq 0$).